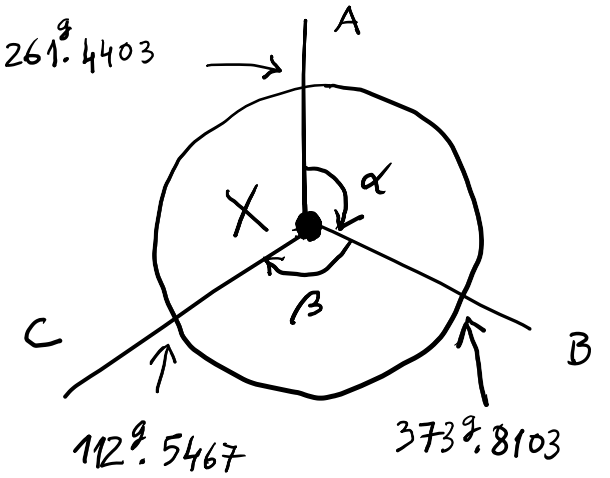
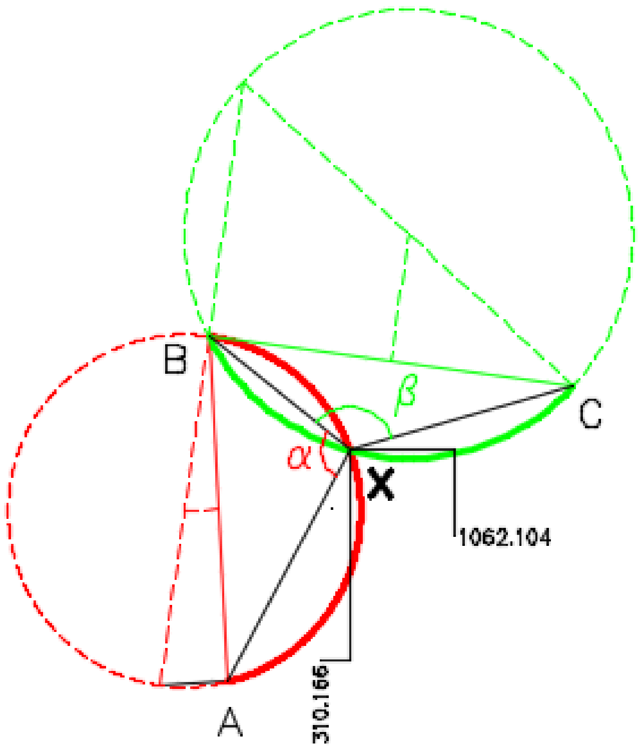
1. a)



$$\alpha = A\hat{X}B = L_B^{Az} - L_A^{Az} = 112^g.3700$$

$$\beta = B\hat{X}C = L_C^{Az} - L_B^{Az} = 138^g.7364$$



Para utilizar as expressões que constam no formulário: **A** -> A, **M** -> B, **B** -> C, **P** -> X

```
> pi:=evalf(Pi);
```
$$\pi := 3.141592654$$
```
> MA:=-1892.347;
```
$$MA := -1892.347$$
```
> PA:=-3109.654;
```
$$PA := -3109.654$$
```
> MM:=-2238.727;
```
$$MM := -2238.727$$
```
> PM:=3123.593;
```
$$PM := 3123.593$$
```
> MB:=4342.500;
```
$$MB := 4342.500$$
```
> PB:=2231.474;
```
$$PB := 2231.474$$
```
> alfa:=112.3700*pi/200;
```
$$alfa := 1.765103833$$
```
> beta:=138.7364*pi/200;
```
$$\beta := 2.179266275$$
```
> TM:=((PB-PA)+(MM-MA)/tan(alfa)+(MM-MB)/tan(beta))/((MA-MB)+(PM-PA)/tan(alfa)+(PM-PB)/tan(beta));
```
$$TM := -1.236433129$$
```
> TA:=(TM-tan(alfa))/(1+TM*tan(alfa));
```
$$TA := .5279580060$$
```
> TB:=(TM+tan(beta))/(1+TM*tan(beta));
```
$$TB := -.9628967445$$
```
> PP:=(MM-MA-PM*TM+PA*TA)/(TA-TM);
```
$$PP := 1062.104147$$
```
> MP:=MA-(PA-PP)*TA;
```
$$MP := 310.166113$$

b) Sendo E o ponto estação e V um ponto visado, ambos de coordenadas conhecidas, tem-se: $R0 = R^{EV} - L_{AZ}^{EV}$;

$$\left\{ \begin{array}{l} R^{XA} = a\tan\dfrac{M_A - M_X}{P_A - P_X} = a\tan\dfrac{-1892.347 - 310.166}{-3109.654 - 1062.104} = a\tan\dfrac{-2\,202{,}513}{-4\,171{,}758} = 230^g.9246 \\ \\ R0 = R^{XA} - L_{AZ}^{XA} = 230^g.9246 - 261^g.4403 = 369^g{,}4843 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R^{XB} = a\,tan\dfrac{M_B - M_X}{P_B - P_X} = a\,tan\dfrac{-2238.727 - 310.166}{3123.593 - 1062.104} = a\,tan\dfrac{-2\,548{,}893}{2\,061{,}489} = 343^g.2946 \\ \\ R0 = R^{XB} - L_{AZ}^{XB} = 343^g.2946 - 373^g.8103 = 369^g.4843 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R^{XC} = a\,tan\dfrac{M_C - M_X}{P_C - P_X} = a\,tan\dfrac{4342.500 - 310.166}{2231.474 - 1062.104} = a\,tan\dfrac{4\,032{,}334}{1\,169{,}370} = 82^g.0310 \\ \\ R0 = R^{XC} - L_{AZ}^{XC} = 82^g.0310 - 112^g.5467 = 369^g.4843 \end{array} \right\}$$

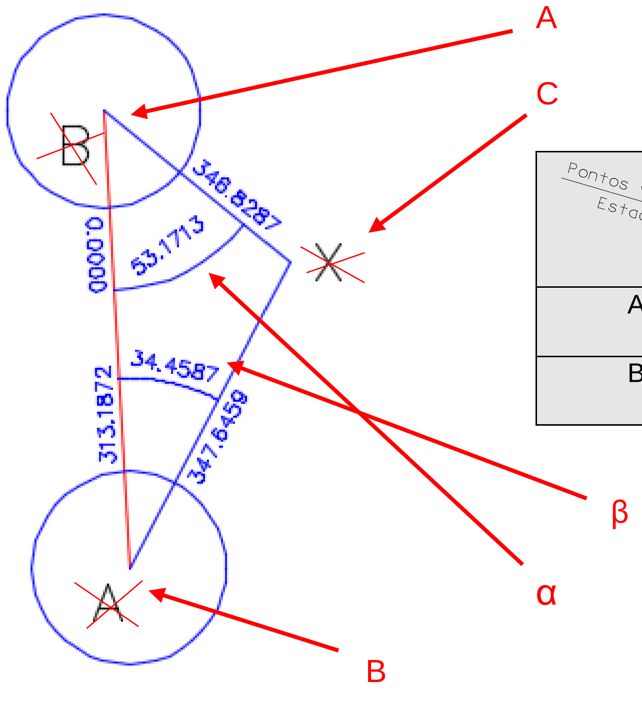
c)

$$dh^{XA} = \sqrt{(M_X - M_A)^2 + (P_X - P_A)^2} = \sqrt{(310.166 + 1892.347)^2 + (1062.104 + 3109.654)^2} = \sqrt{2\,202{,}513^2 + 4\,171{,}758^2}$$
$$= 4\,717{,}481\,m$$

$$cota_X + 1.670 + \frac{dh^{XA}}{tan(101^g.2255))} = 387.022 \Rightarrow cot\,a_X = 476{,}175\,m$$

(atendendo às distâncias envolvidas, o efeito conjunto da refracção e da esfericidade terrestre deveria ser considerado)

d) Calcular as coordenadas do ponto X por intersecção directa, estacionando em A e em B. Adaptando a figura do formulário à figura pretendida, tem-se: B->A, A->B, X->C, α=53ᵍ.1713, β=34ᵍ.6459:



Pontos visados / Estacao	X	A	B
A	$347^g.6459$	---	$313^g.1872$
B	$346^g.8287$	$0^g.0000$	---

$$R_{AB} = a\,tan\frac{-1892.347 + 2238.727}{-3109.654 - 3123.593} = a\,tan\frac{346.380}{-6233.247} = 196^g.4660$$

$$R_{AX} = R_{AB} - \alpha = 143^g.2947$$

$$R_{BA} = R_{AB} + 200^g = 396^g.4660$$

$$R_{BX} = R_{BA} + \beta - 400^g = 30^g.9247$$

```
> pi:=evalf(Pi);
```

$$\pi := 3.141592654$$

```
> MB:=-1892.347;
```

$$MB := -1892.347$$

```
> PB:=-3109.654;
```

$$PB := -3109.654$$

```
> MA:=-2238.727;
```

$$MA := -2238.727$$

```
> PA:=3123.593;
```

$$PA := 3123.593$$

```
> RAC:=143.2947/200*pi;
```

$$RAC := 2.250867884$$

```
> RBC:=30.9247/200*pi;
```

$$RBC := .4857640517$$

```
> MC:=((PB-PA)+MA/tan(RAC)-MB/tan(RBC))/(cot(RAC)-cot(RBC));
```

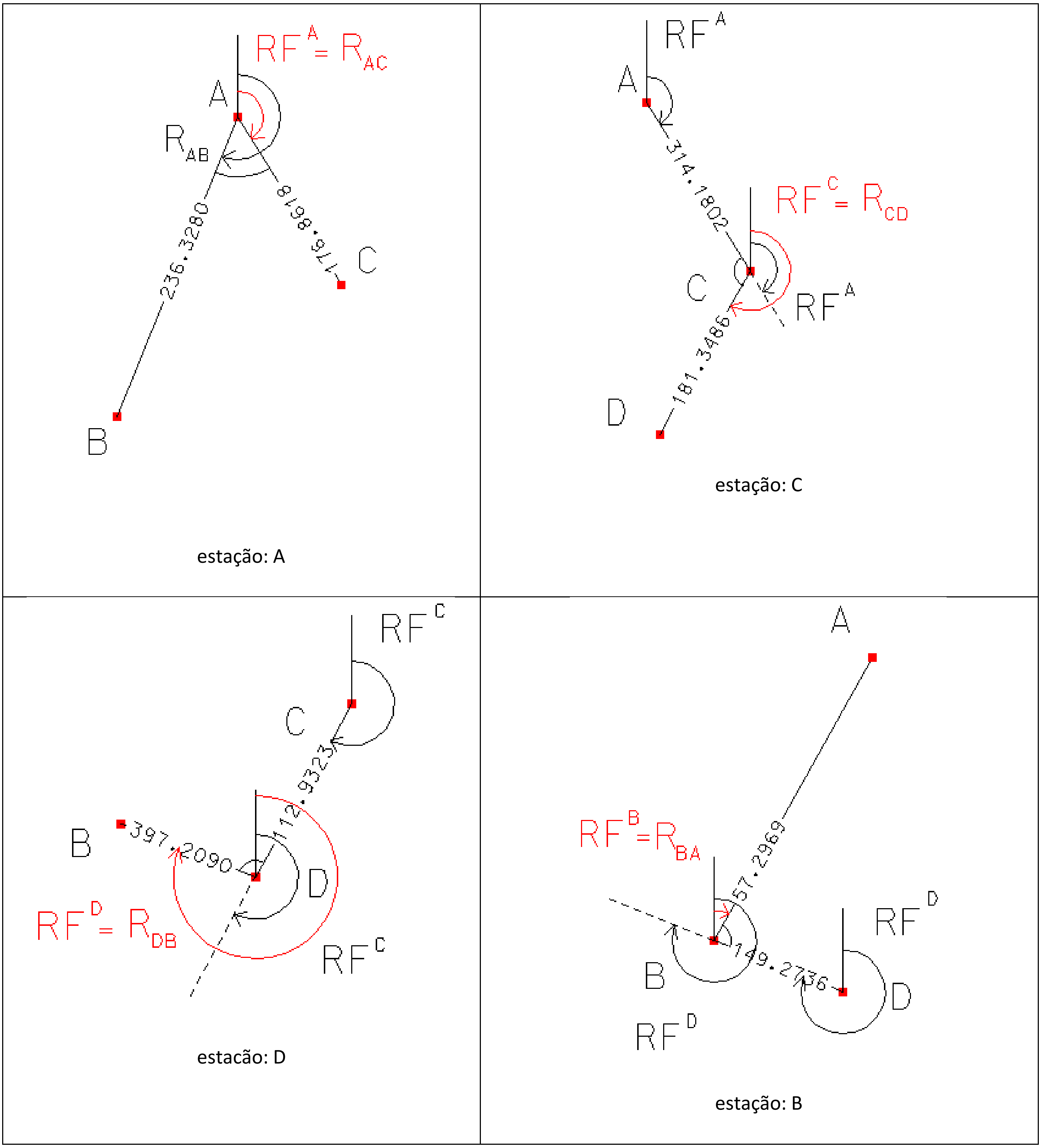
$$MC := 310.1683052$$

```
> PC:=(PB*cot(RAC)-PA*cot(RBC)+(MA-MB)*cot(RAC)*cot(RBC))/(cot(RAC)-cot(RBC));
```

$$PC := 1062.098136$$

2.

$$R_{AB} = \operatorname{atan}\frac{M_B - M_A}{P_B - P_A} = \operatorname{atan}\frac{7188.68 - 7282.08}{-3875.39 + 3642.32} = \operatorname{atan}\frac{-93.40}{-233.07} = 224^g.2643$$



$$RF^A = R_{AC} = R_{AB} - (L_{AZ}^B - L_{AZ}^C) = 224.2643 - (236.3280 - 176.8618) = 164.7981$$

$$RF^C = R_{CD} = RF^A + 200 - (L_{AZ}^A - L_{AZ}^D) = 164.7981 + 200 - (314.1802 - 181.3486) = 231.9665$$

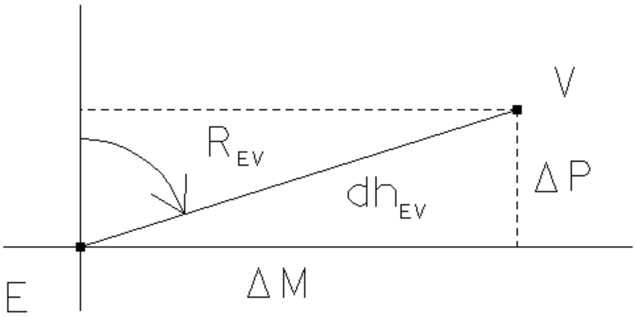
$$RF^D = R_{DB} = RF^C + 200 - (L_{AZ}^C - L_{AZ}^B) = 231.9665 + 200 - (112.9323 - 397.2090) = 316.2432$$

$RF^{B} = R_{BA} = RF^{D} + 200 - (L_{AZ}^{D} - L_{AZ}^{A}) = 316.2432 + 200 - (149.2736 - 57.2969) = 24.2665$

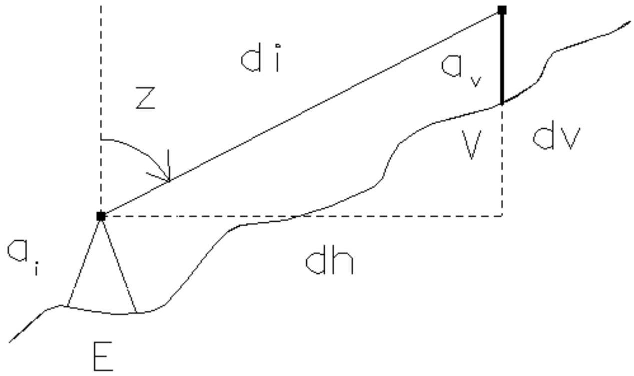
$\varepsilon_A = R_{BA}^{\text{transporta do}} - R_{BA}^{\text{calculado}} = 24.2665 - (224.2643 - 200) = 0.0022$

$T_{alta} = 0.02 > |\varepsilon_A|$

3. Supondo M_E=100.0, P_E=100.0, C_E=100.0, $R0_E$=0.0, tem-se:



(plano horizontal)



(plano vertical)

$\sin R_{EV} = \frac{\Delta M}{dh_{EV}} \Rightarrow \Delta M = dh_{EV} \sin R_{EV}$

$\cos R_{EV} = \frac{\Delta P}{dh_{EV}} \Rightarrow \Delta P = dh_{EV} \cos R_{EV}$

$C_E + a_i + dv - a_v = C_V$

$\cos z = \frac{dv}{di} \Rightarrow dv = di \quad \cos z$

$\sin = \frac{dh}{di} \Rightarrow dh = di \quad \sin z$

$$\begin{cases} M_A = M_E + \Delta M = 100.0 + 91.96 \times \sin(103^g.28) \times \sin(68^g.60) = 180.89 \\ P_A = P_E + \Delta P = 100.0 + 91.96 \times \sin(103^g.28) \times \cos(68^g.60) = 143.48 \\ C_A = 100.0 + 1.73 + 91.96 \times \cos(103^g.28) - 1.56 = 95.43 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_B = M_E + \Delta M = 100.0 + 145.24 \times \sin(92^g.64) \times \sin(206^g.00) = 86.42 \\ P_B = P_E + \Delta P = 100.0 + 145.24 \times \sin(92^g.64) \times \cos(206^g.00) = -43.63 \\ C_B = 100.0 + 1.73 + 145 \times \cos(92^g.64) - 1.45 = 117.03 \end{cases}$$

$dh_{AB} = \sqrt{(M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2} = 137.46$

$dv_{AB} = C_B - C_A = 21.60$

$\text{declive} = \tan \quad i = \frac{dv}{dh} = \frac{21.60}{137.46} = 15.7\%$

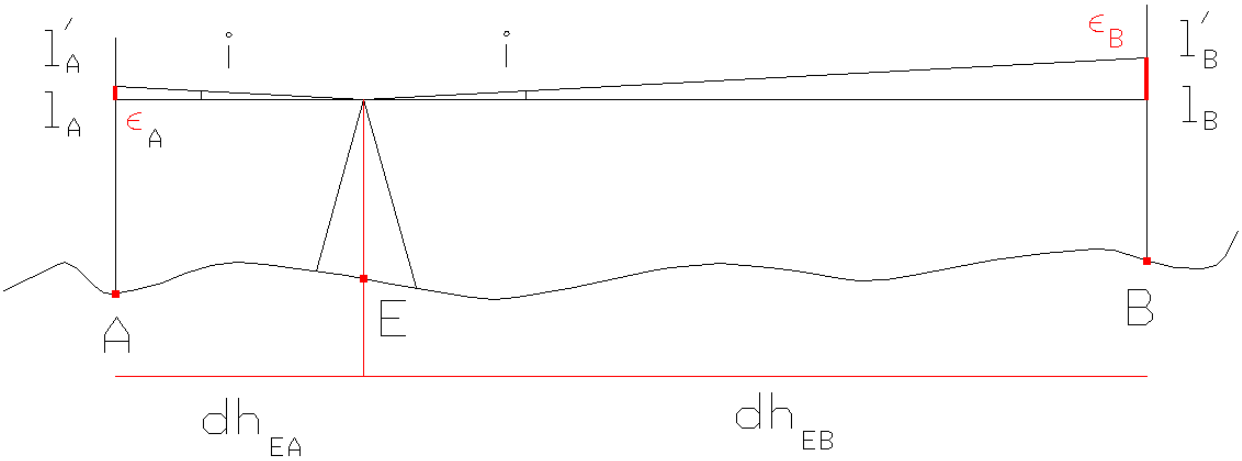
4. a) $\Delta_{AB} = 1.493 - 2.092 = -0.599 \quad m$

$dh_{E1-A} = (1.694 - 1.292) * 100 = 40.2 \quad m$

$dh_{E1-B} = (2.293 - 1.891) * 100 = 40.2 \quad m$

Não é possível afirmar se o nível está afectado por erro de colimação mas como o aparelho foi colocado exactamente a igual distância dos pontos A e B, mesmo que exista erro de colimação, a sua influência tem igual magnitude nas 2 leituras e portanto cancela na diferença das leituras, obtendo-se assim o desnível correcto entre os 2 pontos onde a mira foi colocada.

b)
$$\begin{cases} \Delta_{AB} = 1.626 - 2.199 = -0.573 \quad m \\ dh_{E2-A} = (1.923 - 1.329) * 100 = 59.4 \quad m \\ dh_{E2-B} = (2.372 - 2.026) * 100 = 34.6 \quad m \end{cases}$$



$$\left\{ \tan \quad i = \frac{\varepsilon_A}{dh_{E2-A}} = \frac{\varepsilon_B}{dh_{E2-B}} \Rightarrow \varepsilon_A = \varepsilon_B \frac{dh_{E2-A}}{dh_{E2-B}} \right.$$

$$\left\{ \Delta_{AB} = \ell_A - \ell_B = (\ell'_A - \varepsilon_A) - (\ell'_B - \varepsilon_B) = (\ell'_A - \ell'_B) - (\varepsilon_A - \varepsilon_B) \Rightarrow \varepsilon_A - \varepsilon_B = (\ell'_A - \ell'_B) - \Delta_{AB} \right.$$

$$\varepsilon_B \frac{dh_{E2-A}}{dh_{E2-B}} - \varepsilon_B = (\ell'_A - \ell'_B) - \Delta_{AB} \Rightarrow \varepsilon_B \left(\frac{dh_{E2-A}}{dh_{E2-B}} - 1 \right) = (\ell'_A - \ell'_B) - \Delta_{AB} \Rightarrow \varepsilon_B = \frac{(\ell'_A - \ell'_B) - \Delta_{AB}}{\left(\frac{dh_{E2-A}}{dh_{E2-B}} - 1 \right)} = \frac{1.626 - 2.199 + 0.599}{\frac{59.4}{34.6} - 1} = 0.036274193$$

finalmente, $\tan \quad i = \frac{\varepsilon_B}{dh_{E2-B}} \Rightarrow i = \mathrm{atan} \frac{0.0362741}{34.6} = 0^{o}.0600681339338686934914419712 7047 = 3'.60$

c) $dh_{E2-C} = (1.455 - 0.913) * 100 = 54.2 \quad m \Rightarrow \varepsilon_C = dh_{E2-C} \times \tan \quad i = 0.0568 \Rightarrow \ell_C = \ell'_C - \varepsilon_C = 1.184 - 0.0568 = 1.127$

$dh_{E2-A} = 59.4 \quad m \Rightarrow \varepsilon_A = dh_{E2-A} \times \tan \quad i = 0.0623 \Rightarrow \ell_A = \ell'_A - \varepsilon_A = 1.626 - 0.0623 = 1.564$

$\Delta_{AC} = 1.564 - 1.127 = 0.437 \Rightarrow cota_C = cota_A + \Delta_{AC} = 246.985$