TRANSIÇÕES DE FASE

Problemas

1. Mostre que, para um paramagnete ideal ($\mathcal{H} = -H \sum_i^N s_i$), a magnetização por spin é dada por
$$m = \tanh \beta H \tag{1}$$
e a susceptibilidade magnética é
$$\chi(T, H) = \frac{\beta}{\cosh^2 \beta H} \tag{2}$$
onde usamos o momento magnético por spin e a constante da rede como unidades do sistema, i.e., $m_0 = 1$ e $a = 1$.

   (a) Deduza a lei de Curie para $\chi(T, 0)$.

   (b) Derive a lei de Curie-Weiss. (Sugestão: substitua H por $H_{eff} = H + \lambda m$). Calcule as soluções para $H = 0$.

   (c) Obtenha o desenvolvimento em potências de m da equação de estado, para m pequeno (i.e., $T \sim T_c$). Mostre que $\beta = 1/2$ e calcule γ e γ'.

2. Mostre que a energia livre de Landau
$$g_s(t, h) = -m_0 h + aT_c t m_0^2 + b m_0^4 \tag{3}$$
com a equação de estado correspondente,
$$-h + 2aT_c t m_0 + 4b m_0^3 = 0 \tag{4}$$
obedece a uma forma de escala simples
$$g_s(t, h) = \lambda g_s(\lambda^x t, \lambda^y h) \tag{5}$$
onde, $x = -1/2$ e $y = -3/4$. Como λ é arbitrário, podemos escrever
$$g_s(t, h) = t^2 g_s\left(1, \frac{h}{t^{3/2}}\right) = t^2 F\left(\frac{h}{t^{3/2}}\right) \tag{6}$$
As hipóteses fenomenológicas de escala são mais brandas do que a teoria de Landau, exigindo apenas que
$$g_s(t, h) = t^{2-\alpha} F\left(\frac{h}{t^{\beta\delta}}\right) \tag{7}$$
com α e $\Delta = \beta\delta$, a determinar experimentalmente.

3. Mostre que a desigualdade de Rushbrooke,
$$\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2 \tag{8}$$
se converte numa igualdade, se o $\lim_{t \to 0} \frac{c_M}{c_H} = 1$. Será que esta condição é necessária? Mostre que a condição é verificada, se as funções termodinâmicas obedecerem à hipótese de escala, perto de T_c.

4. Use a técnica da matriz de transferência, para calcular a energia livre do modelo de Blume-Emery-Griffiths, em $1d$, com hamiltoneano

$$\mathcal{H} = -J \sum_i s_i s_{i+1} - K \sum_i s_i^2 s_{i+1}^2 + D \sum_i s_i^2 \tag{9}$$

onde, $s_i = 1,\ 0,\ -1$, para todos os sítios i. Tome $K = 0$, $J > 0$ e $D > 0$.

5. Use a técnica da matriz de transferência, para calcular a energia livre do modelo de Ising, com interacções entre primeiros e segundos vizinhos, em $1d$,

$$\mathcal{H} = -J_1 \sum_i s_i s_{i+1} - J_2 \sum_i s_i s_{i+2} \tag{10}$$

Tomando, $J_1 = J > 0$ e $J_2 = -pJ$, com $p > 0$, calcule a função de correlação $\langle s_i s_{i+2} \rangle$, em função de βJ e p. Como decaem as correlações neste modelo?

6. Considere uma cadeia linear com hamiltoneano,

$$\bar{\mathcal{H}} = K \sum_j^N s_j s_{j+1} + L \sum_j^N s_j + G \sum_j^N (-)^j s_j + NC(K, L, G) \tag{11}$$

   (a) Escreva as relações de recorrência para uma transformação com $b = 3$, i.e., fazendo o traço parcial sobre 2 em cada 3 spins.
   (b) Analise os pontos fixos. Mostre que existem dois pontos fixos instáveis, correspondentes a ordens ferro e antiferromagnética, respectivamente.
   (c) Verifique que os expoentes são os mesmos nos dois casos e que existe uma variável irrelevante para cada ponto fixo.
   (d) Mostre que os expoentes obtidos são iguais, aos que se obtêm para uma transformação com $b = 2$.
   (e) O que acontece para uma transformação com $b = 2$, se o acoplamente for antiferromagnético?
   (f) Calcule as funções de escala para a energia livre.
   (g) Usando a equação de fluxo para C, calcule g.

7. Calcule as relações de recorrência para a cadeia linear dupla (escada), com constantes de acoplamento J_1 e J_2, ao longo e através da cadeia, respectivamente.

8. Considere uma cadeia unidimensional, com spins de Ising, $s = 1$, que podem tomar valores, $s_k = 1,\ 0,\ -1$, e interacções apenas com os primeiros vizinhos, do tipo $K s_k s_{k+1}$. Mostre que o Hamiltoneano renormalizado, $\bar{\mathcal{H}}'$, produzido pelo processo de decimação simples, com $b = 2$, contém outros termos de acoplamento. Derivando as relações de recorrência, para as constantes de acoplamento, mostre que é suficiente incluir os termos suplementares $h_2 s_k^2$ e $K_4 s_k^2 s_{k+1}^2$, no espaço dos Hamiltoneanos.