Pergunta modelo para o exame de

Matemática Computacional

Prove que a matriz A é definida positiva

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

resposta Observamos que A tem diagonal dominante (mas não dominante estrita). Resulta portanto que A é semi-definida positiva. Basta então provar que A é invertível para concluir que A é definida positiva.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\,\det\begin{bmatrix} 1{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$2 - \frac{1}{1{,}5} = \\ = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$= 2 \cdot 1{,}5 \quad \det\begin{bmatrix} 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 5/4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{5}{4} - 1\right) \neq 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>outra resposta</u>, igualmente correcta:

$$Ax \cdot x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_5^2 + \\ + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_4x_5 =$$

$$= x_1^2 + (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_3+x_4)^2 + (x_4+x_5)^2 + x_5^2$$

Esta quantidade nunca é negativa.

Esta quantidade anula-se só quando

$x_1 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $x_4 + x_5 = 0$, $x_5 = 0$

ou seja, quando $x = 0$. q.e.d.