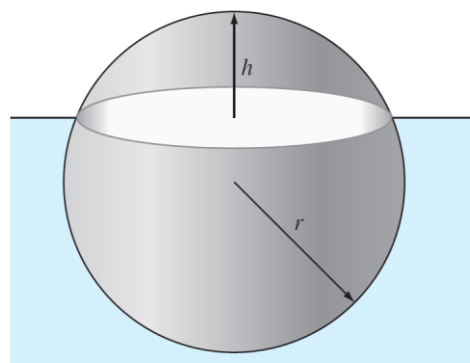


Exercício 3: Integração numérica e Equações Diferenciais Ordinárias

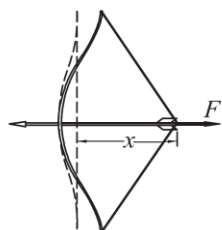
Deve ser entregue relatório em 15 dias até a hora da aula.

1. Esfera imersa em água: considere a seguinte esfera de raio 2 m a ser imersa em água. Sabendo que o volume fora da água é dado por $V = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$, calcule o trabalho realizado pela impulsão durante o processo de submergir metade da esfera (Dica: coloque as constantes todas fora do integral):

- Usando o método do trapézio e de Simpson. (dica: teste os métodos na aula com o integral de x^3+x^2 , e passe ao exercício 2, fazendo o resto no fim).
- Trace o gráfico do desvio do integral numérico ao valor real (calcule à mão ou use a função `Integrate[]` do Mathematica) em função do número de divisões na integração numérica para os métodos do trapézio e o de Simpson. Discuta os resultados.



2. Arco e flecha: A força necessária para esticar o fio do arco da figura abaixo em função do x é dado pela seguinte tabela:



x (m)	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
F (N)	0	37	71	104	134	161
x (m)	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
F (N)	185	207	225	239	250	

Usando a regra do trapézio calcule a velocidade de saída de uma flecha de 75 g quando o fio é esticado 0.5 m (dica: use a lei do trabalho-energia).

3. Decaimento radioativo: considere o decaimento radioativo do Polônio-201 dado pela equação:

$$\dot{N}(t) = -kN(t),$$

onde $N(t)$ é a densidade de núcleos radioativos no instante t e k é a taxa de decaimento dada por $k=2.3$ horas⁻¹. Considerando como valor inicial $N(0)=1$:

- Implemente o método de Euler para esta equação. Trace o gráfico para a solução numérica de $N(t)$, para t em horas, com passos de integração $h=\{0.5, 0.7, 1\}$. Represente também a curva analítica (Dica: se não conseguir resolver analiticamente esta equação, estudada no infantário, use a função `DSolve` no Mathematica, mas não diga nada a ninguém). Discuta as diferentes curvas.
- Implemente o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para a mesma equação. Faça o gráfico do desvio ao valor analítico ($t=5$ horas) para o método de Euler e de Runge-Kutta de 4ª ordem em função do tamanho do passo (gráfico em escala log-log), com passos $h = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\}$. Discuta a ordem de convergência dos métodos.

4. Lançamento oblíquo: considere um lançamento oblíquo de um projétil. As equações de movimento são (x é a horizontal e y a vertical):

$$\begin{aligned} \dot{v}_x(t) &= 0 \\ \dot{v}_y(t) &= -g \\ \dot{x}(t) &= v_x(t) \\ \dot{y}(t) &= v_y(t) \end{aligned}$$

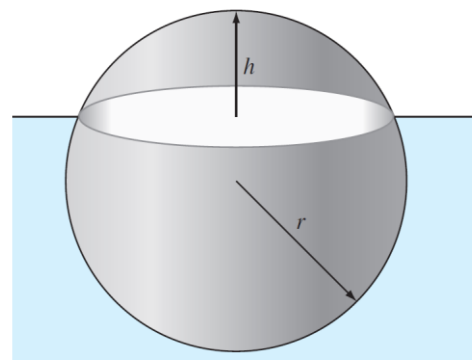
com uma velocidade inicial de 20m/s e um ângulo de $\pi/4$.

- Implemente os métodos de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem (Dica: Para testar faça somente para o movimento vertical, y , e depois faça os dois). Trace o gráfico de y em função de x para os 2 métodos e um passo de $h=0.5$. Coloque a curva analítica no gráfico. Discuta os resultados.

Exercício 3 (opcional): Integração numérica e Equações Diferenciais Ordinárias

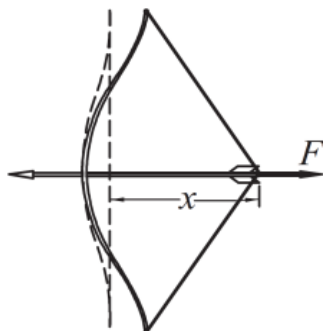
Esta parte opcional não necessita de relatório.

1. **Esfera imersa em água:** considere a seguinte esfera de raio 2 m a ser imersa em água. Sabendo que o volume fora da água é dado por $V = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$, calcule o trabalho realizado pela impulsão durante o processo de submergir metade da esfera (Dica: coloque as constantes todas fora do integral):
 - a. Usando o método de Romberg.
 - b. Para o método de Romberg, trace o gráfico do erro do método em função do número de iterações (numa escala log-lin). Discuta os resultados e discuta o valor do Integral para 1 iteração.



2. Calcule o integral da função $1/x^2$, para os 3 métodos, e trace o gráfico do desvio ao valor real em função do tamanho da divisão (os 3 métodos no mesmo gráfico) em escala log-log.

3. **Arco e flecha:** A força necessária para esticar o fio do arco da figura abaixo em função do x é dado pela seguinte tabela:



x (m)	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
F (N)	0	37	71	104	134	161
x (m)	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
F (N)	185	207	225	239	250	

- a. Usando a regra do trapézio calcule a velocidade de saída de uma flecha de 75 g quando o fio é esticado 0.5 m (dica: use a lei do trabalho-energia).
 - b. Use no Mathematica a função `Interpolation[]` para ordem 1 e integre usando a função `NIntegrate[]`, para comparar com o resultado da alínea anterior. Faça o gráfico da função interpolada.
 - c. Calcule o mesmo integral usando a regra de Simpson.
4. Imagine que há uma epidemia de zombies, sabendo que um zombie contagia um humano com taxa \underline{c} , um humano mata um zombie com taxa \underline{a} , e um zombie mata um humano com taxa \underline{b} , as equações para a quantidade de humanos (H) e de zombies (Z) são dadas por:

$$\dot{H}(t) = -bH(t)Z(t) - cH(t)Z(t)$$

$$\dot{Z}(t) = cH(t)Z(t) - aH(t)Z(t)$$
 Começando com alguns Zombies e uma população de humanos teste com os métodos anteriores e encontre um conjunto de valores não nulos de \underline{a} , \underline{b} , e \underline{c} que levam a um apocalipse (aniquilação de todos os humanos) ou a uma vitória da espécie humana (eliminação de todos os zombies).
 5. Implemente o método de Euler e RK4 para um projétil com resistência do ar, em que a aceleração tem um termo adicional de γv^2 na mesma direção da velocidade, mas sentido contrário. (Dica: Use o `NDSolve` do Mathematica para comparar).