FACULDADE·DE·CIÊNCIAS UNIVERSIDADE·DE·LISBOA
Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia

2ª época de Topografia

09 de Julho de 2008

O exame é sem consulta e tem a duração de 2.5 horas

1. Estacionou-se um teodolito num ponto E do terreno e visaram-se os pontos A e B, tendo sido efectuadas para cada ponto duas leituras conjugadas. Tendo-se obtido o seguinte registo de observações, determine:

Estação: E	Pontos visados		Leituras azimutais	Leituras zenitais
	A	Posição directa	$326^g.184$	$99^g.984$
	A	Posição inversa	$126^g.171$	$299^g.984$
	B	Posição directa	$84^g.250$	$107^g.462$
	B	Posição inversa	$284^g.248$	---

a) as leituras azimutais compensadas para cada direcção.
b) o erro de índice do teodolito.
c) a leitura zenital observada na posição inversa para o ponto B.
d) as leituras zenitais compensadas para os pontos A e B.
e) o rumo da direcção EB sabendo que M_E=100.00 m, P_E=100.00 m, M_A=100.00 m, P_A=-100.00 m.
f) o rumo do zero da graduação na estação E.

2. Pretendem determinar-se as coordenadas planimétricas de um ponto P situado num ponto inacessível no topo de um edifício. Para o efeito, estacionou-se um teodolito nos pontos C e D e registaram-se as seguintes leituras:

Estação	Ponto visado	Leituras azimutais
C	P	$138^g.036$
	E	$060^g.528$
D	E	$250^g.374$
	P	$363^g.260$

Determine as coordenadas do ponto P sabendo que as coordenadas dos pontos C, D e E são:

	M (m)	P (m)
C	-2417.92	5690.92
D	-2329.17	5543.18
E	-2380.84	5428.06

3. O tabuleiro de uma ponte é suportado por 4 pilares situados nos pontos A, B, C, D, com alturas respectivamente iguais a 4.25 m, 10.50 m, 8.30 m, 7.00 m (quando foi construído) e tem um declive constante de 4% no sentido de A para D. Na vizinhança da ponte ocorreu um deslizamento de terras, tendo os pilares ficado parcialmente subterrados. Após o deslizamento, estacionou-se um teodolito num ponto E junto aos pilares e fizeram-se as seguintes observações para os pontos A', B', C' e D' (na vertical dos pontos A, B, C e D, respectivamente) sendo a altura do aparelho igual a 1.70 m e a altura visada igual a 1.55 m:

Ponto estação: E	Ponto visado	Leitura azimutal	Leitura zenital	Distância inclinada (m)
	A'	$102^g.368$	$86^g.732$	13.110
	B'	$153^g.240$	$100^g.326$	8.400
	C'	$229^g.368$	$103^g.426$	19.871
	D'	$239^g.365$	$101^g.361$	30.393

Sabendo que após o deslizamento ficou visível apenas 1.09 m do pilar A, determine a altura dos pilares A, B, C, D que ficou subterrada.

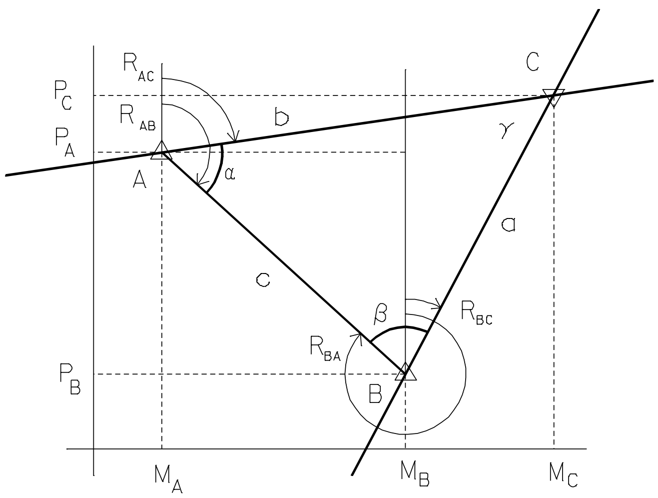
4. Na observação de uma poligonal de média precisão obteve-se o seguinte registo de campo:

Estação	Ponto visado	Leitura azimutal	Distância (m)
E_1	A	$003^g.448$	---
	E_2	$128^g.482$	116.88
	E_4	$183^g.178$	---
E_2	E_1	$321^g.869$	---
	E_3	$261^g.987$	125.73
E_3	E_2	$051^g.530$	---
	E_4	$001^g.835$	63.77
E_4	E_3	$027^g.853$	---
	E_1	$192^g.118$	50.90

Conhecendo as coordenadas M_A=187.23 m, P_A=278.44 m, M_{E1}=187.66 m, P_{E1}=207.73 m, determine as coordenadas planimétricas ajustadas dos restantes pontos da poligonal.

Formulário:

$$M_C = \frac{(P_B - P_A) + M_A \operatorname{cotg} R_{AC} - M_B \operatorname{cotg} R_{BC}}{\operatorname{cotg} R_{AC} - \operatorname{cotg} R_{BC}} \; ; \; P_C = \frac{P_B \operatorname{cotg} R_{AC} - P_A \operatorname{cotg} R_{BC} + (M_A - M_B) \operatorname{cotg} R_{AC} \operatorname{cotg} R_{BC}}{\operatorname{cotg} R_{AC} - \operatorname{cotg} R_{BC}}$$



1.

a) para A: $\frac{326^g.184+\left(126^g.171+200^g\right)}{2}=326^g.178$; para B: $\frac{84^g.250+\left(284^g.248-200^g\right)}{2}=84^g.249$

b) se não existir erro de índice, isto é, se $e_{\text{índice}}=0$, a soma das leituras zenitais conjugadas é igual a 400g, e portanto $L^{\text{zenital para A}}_{\text{directa}}-\left(400^g-L^{\text{zenital para A}}_{\text{inversa}}\right)=0$; não se verificando, em geral, esta situação ($e_{\text{índice}}\neq 0$), tem-se:

$$e_{\text{índice}}=\frac{L^{\text{zenital para A}}_{\text{directa}}-\left(400^g-L^{\text{zenital para A}}_{\text{inversa}}\right)}{2}=\frac{99^g.984-\left(400^g-299^g.984\right)}{2}=-0^g.016$$

c) $L^{\text{zenital para B}}_{\text{inversa}}=2\times e_{\text{índice}}-L^{\text{zenital para B}}_{\text{directa}}+400^g=-0^g.032-107^g.462+400^g=292^g.506$

d) $L^{\text{zenital compensada}}_{A}=\frac{L^{\text{zenital para A}}_{\text{directa}}+400^g-L^{\text{zenital para A}}_{\text{inversa}}}{2}=\frac{99^g.984+400^g-299^g.984}{2}=100^g$

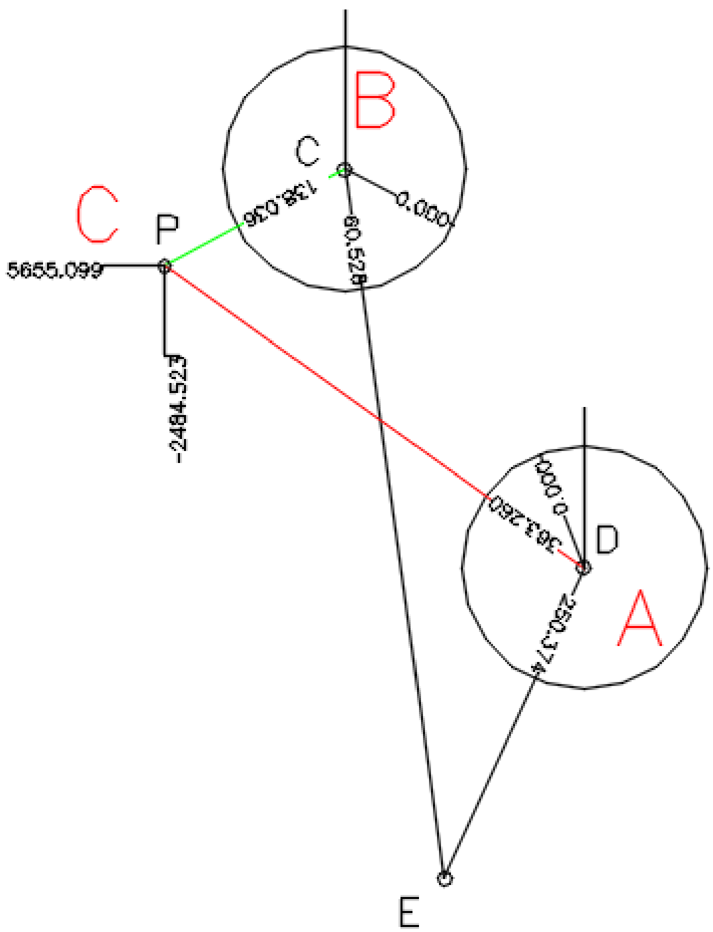
$L^{\text{zenital compensada}}_{B}=\frac{L^{\text{zenital para B}}_{\text{directa}}+400^g-L^{\text{zenital para B}}_{\text{inversa}}}{2}=\frac{107^g.462+400^g-292^g.506}{2}=107^g.478$

e) $R_{EA}=\text{a tan}\frac{M_A-M_E}{P_A-P_E}=\text{a tan}\frac{100.00-100.00}{-100.00-100.00}=\text{a tan}\frac{0.00}{-200.00}=200^g$

$R_{EB}=R_{EA}+\left(L^{\text{azimutal}}_{B}-L^{\text{azimutal}}_{A}\right)=200^g+\left(84^g.249-326^g.178\right)=358^g.071$

f) $R_0=R_{EA}-L^{\text{azimutal}}_{A}=R_{EB}-L^{\text{azimutal}}_{B}=200^g-326^g.178+400^g=358^g.071-84^g.249=273^g.822$

2.



```
MA:=-2329.17;
```

$$MA := -2329.17$$

```
PA:=5543.18;
```

$$PA := 5543.18$$

```
MB:=-2417.92;
```

$$MB := -2417.92$$

```
PB:=5690.92;
```

$$PB := 5690.92$$

```
ME:=-2380.84;
```

$$ME := -2380.84$$

```
PE:=5428.06;
```

$$PE := 5428.06$$

```
R_BE:=arctan((ME-MB)/(PE-PB));
```

$$R\_BE := -.1401390254$$

```
if ((PE-PB)<0) then R_BE:=R_BE+evalf(Pi) end if;
```

$$R\_BE := 3.001453629$$

```
if ((ME-MB)<0 and (PE-PB)>0) then R_BE:=R_BE+2*Pi end if;
R_BC:=R_BE+77.508/200*evalf(Pi);
```

$$R\_BC := 4.218946446$$

```
R_BC_grados:=R_BC*200/evalf(Pi);
```

$$R\_BC\_grados := 268.5864726$$

```
R_AE:=arctan((ME-MA)/(PE-PA));
```

$$R\_AE := .4218855189$$

```
if ((PE-PA)<0) then R_AE:=R_AE+evalf(Pi) end if;
```

$$R\_AE := 3.563478173$$

```
if ((ME-MA)<0 and (PE-PA)>0) then R_AE:=R_AE+2*Pi end if;
R_AC:=R_AE+112.886/200*evalf(Pi);
```

$$R\_AC := 5.336687315$$

```
R_AC_grados:=R_AC*200/evalf(Pi);
```

$$R\_AC\_grados := 339.7440664$$

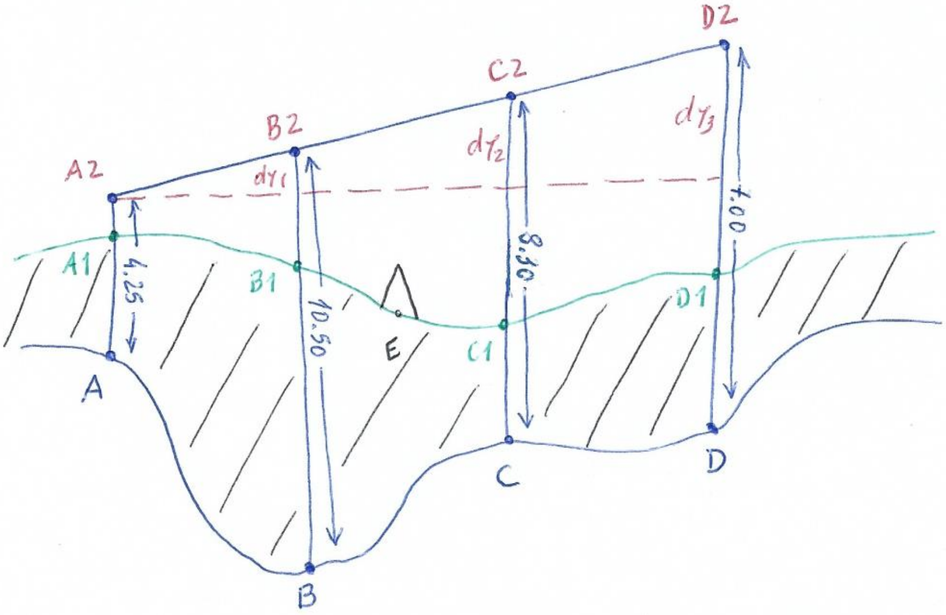
```
MC:=((PB-PA)+MA/tan(R_AC)-MB/tan(R_BC))/(cot(R_AC)-cot(R_BC));
```

$$MC := -2484.523463$$

```
PC:=(PB/tan(R_AC)-PA/tan(R_BC)+(MA-MB)*cot(R_AC)*cot(R_BC))/(cot(R_AC)-
cot(R_BC));
```

$$PC := 5655.099440$$

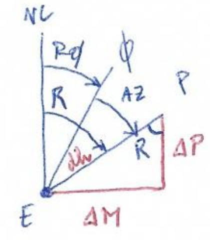
3



Objectivo: calcular o comprimento dos pilares que se encontram subterrados, isto é, AA1, BB1, CC1, DD1.

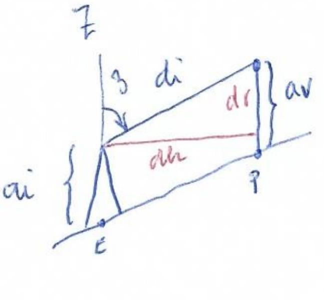
Solução: calcular num referencial local as coordenadas espaciais dos pontos A1, B1, C1, D1 e A2, B2, C2, D2, calcular os comprimentos A1A2, B1B2, C1C2, D1D2 e obter as quantidades pretendidas por diferença relativamente aos comprimentos originais dos pilares.

Transporte de coordenadas por irradiação:



$$\begin{cases} \Delta M = dh \sin R \\ \Delta P = dh \cos R \end{cases}$$

(plano horizontal)



$$\sin z = \frac{dh}{di} \Rightarrow dh = di \sin z$$

$$\cos z = \frac{dv}{di} \Rightarrow dv = di \cos z$$

$$H_E + ai + dv - av = H_P$$

```
ME:=100.000;
```
$$ME := 100.000$$

```
PE:=100.000;
```
$$PE := 100.000$$

```
HE:=100.000;
```
$$HE := 100.000$$

```
R0E:=0.000;
```
$$R0E := 0.$$

```
ai:=1.70;
```
$$ai := 1.70$$

```
av:=1.55;
```
$$av := 1.55$$

```
MA1:=ME+13.110*sin(86.732/200*evalf(Pi))*sin(102.368/200*evalf(Pi));
```
$$MA1 := 112.8174335$$

```
PA1:=PE+13.110*sin(86.732/200*evalf(Pi))*cos(102.368/200*evalf(Pi));
```
$$PA1 := 99.52301688$$

```
HA1:=HE+ai+13.110*cos(86.732/200*evalf(Pi))-av;
```
$$HA1 := 102.8625607$$

```
MB1:=ME+8.400*sin(100.326/200*evalf(Pi))*sin(153.240/200*evalf(Pi));
```
$$MB1 := 105.6297691$$

```
PB1:=PE+8.400*sin(100.326/200*evalf(Pi))*cos(153.240/200*evalf(Pi));
```
$$PB1 := 93.76591228$$

```
HB1:=HE+ai+8.400*cos(100.326/200*evalf(Pi))-av;
```
$$HB1 := 100.1069855$$

```
MC1:=ME+19.871*sin(103.426/200*evalf(Pi))*sin(229.368/200*evalf(Pi));
```
$$MC1 := 91.16776851$$

```
PC1:=PE+19.871*sin(103.426/200*evalf(Pi))*cos(229.368/200*evalf(Pi));
```
$$PC1 := 82.23188573$$

```
HC1:=HE+ai+19.871*cos(103.426/200*evalf(Pi))-av;
```
$$HC1 := 99.0811486$$

```
MD1:=ME+30.393*sin(101.361/200*evalf(Pi))*sin(239.365/200*evalf(Pi));
```
$$MD1 := 82.38561238$$

```
PD1:=PE+30.393*sin(101.361/200*evalf(Pi))*cos(239.365/200*evalf(Pi));
```
$$PD1 := 75.24024078$$

```
HD1:=HE+ai+30.393*cos(101.361/200*evalf(Pi))-av;
```
$$HD1 := 99.5002916$$

```
A1B1_h:=sqrt((MA1-MB1)^2+(PA1-PB1)^2);
```
$$A1B1\_h := 9.209059285$$

```
A1C1_h:=sqrt((MA1-MC1)^2+(PA1-PC1)^2);
```
$$A1C1\_h := 27.70724112$$

```
A1D1_h:=sqrt((MA1-MD1)^2+(PA1-PD1)^2);
```
$$A1D1\_h := 38.93262067$$

```
HA2:=HA1+1.09;
```

$HA2 := 103.9525607$

```
dy1:=0.04*A1B1_h;
```

$dy1 := .3683623714$

```
HB2:=HA2+dy1;
```

$HB2 := 104.3209231$

```
dy2:=0.04*A1C1_h;
```

$dy2 := 1.108289645$

```
HC2:=HA2+dy2;
```

$HC2 := 105.0608503$

```
dy3:=0.04*A1D1_h;
```

$dy3 := 1.557304827$

```
HD2:=HA2+dy3;
```

$HD2 := 105.5098655$

```
A1A2:=1.09;
```

$A1A2 := 1.09$

```
B1B2:=HB2-HB1;
```

$B1B2 := 4.2139376$

```
C1C2:=HC2-HC1;
```

$C1C2 := 5.9797017$

```
D1D2:=HD2-HD1;
```

$D1D2 := 6.0095739$

```
AA1:=4.25-A1A2;
```

$AA1 := 3.16$

```
BB1:=10.50-B1B2;
```

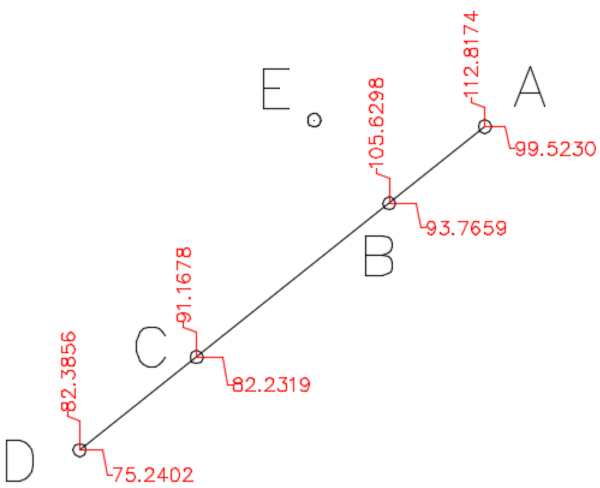
$BB1 := 6.2860624$

```
CC1:=8.30-C1C2;
```

$CC1 := 2.3202983$

```
DD1:=7.00-D1D2;
```

$DD1 := .9904261$



4.

cálculo do R_0 no ponto E_1 (ponto inicial e final pois a poligonal é fechada):

$$R_0^{E_1} = R_{E_1,A} - L^{az}_{E_1,A} = a\tan\frac{M_A - M_{E_1}}{P_A - P_{M_1}} - L^{az}_{E_1A} = a\tan\frac{187.23-187.66}{278.44-207.73} - 3^g.448 = 399^g.612 - 3^g.448 = 396^g.165$$

cálculo dos rumos para a frente por transporte ao longo da poligonal:

$$R_{E_1,E_2} = R_0^{E_1} + L^{az}_{E_1E_2} = 396^g.165 + 128^g.482 = 124^g.647$$

$$R_{E_2,E_3} = R_{E_1,E_2} + L^{az}_{E_2E_3} - L^{az}_{E_2,E_1} + 200^g = 124^g.647 + 261^g.987 - 321^g.869 + 200^g = 264^g.765$$

$$R_{E_3,E_4} = R_{E_2,E_3} + L^{az}_{E_3E_4} - L^{az}_{E_3,E_2} + 200^g = 264^g.765 + 1^g.835 - 51^g.530 + 200^g = 15^g.070$$

$$R_{E_4,E_1} = R_{E_3,E_4} + L^{az}_{E_4E_1} - L^{az}_{E_4,E_3} + 200^g = 15^g.070 + 192^g.118 - 27^g.853 + 200^g = 379^g.335$$

cálculo do erro de fecho angular:

$$\varepsilon_\alpha = R_{E_4,E_1} + 200^g - L^{az}_{E_1,E_4} - R_0^{E_1} = 379^g.335 + 200^g - 183^g.178 - 396^g.165 = -0^g.008$$

compensação dos rumos:

$$\overline{R}_{E_1,E_2} = R_{E_1,E_2} + \frac{0^g.008}{4} = 124^g.649$$

$$\overline{R}_{E_2,E_3} = R_{E_2,E_3} + \frac{2\times 0^g.008}{4} = 264^g.769$$

$$\overline{R}_{E_3,E_4} = R_{E_3,E_4} + \frac{3\times 0^g.008}{4} = 15^g.076$$

$$\overline{R}_{E_4,E_1} = R_{E_4,E_1} + \frac{4\times 0^g.008}{4} = 379^g.343$$

cálculo das coordenadas planimétricas:

$$\delta M_{E_2} = d_{E_1,E_2}\sin\overline{R}_{E_1,E_2} = 116.88\sin 124^g.649 = 108.23\text{ m}$$
$$\delta P_{E_2} = d_{E_1,E_2}\cos\overline{R}_{E_1,E_2} = 116.88\cos 124^g.649 = -44.13\text{ m}$$

$$\delta M_{E_3} = d_{E_2,E_3}\sin\overline{R}_{E_2,E_3} = 125.73\sin 264^g.769 = -106.96\text{ m}$$
$$\delta P_{E_3} = d_{E_2,E_3}\cos\overline{R}_{E_2,E_3} = 125.73\cos 264^g.769 = -66.08\text{ m}$$

$$\delta M_{E_4} = d_{E_3,E_4}\sin\overline{R}_{E_3,E_4} = 63.77\sin 15^g.076 = 14.96\text{ m}$$
$$\delta P_{E_4} = d_{E_3,E_4}\cos\overline{R}_{E_3,E_4} = 63.77\cos 15^g.076 = 61.99\text{ m}$$

$$\delta M_{E_1} = d_{E_4,E_1}\sin\overline{R}_{E_4,E_1} = 50.90\sin 379^g 343 = -16.23\text{ m}$$
$$\delta P_{E_1} = d_{E_4,E_1}\cos\overline{R}_{E_4,E_1} = 50.90\cos 379^g 343 = 48.24\text{ m}$$

$$M_{E_2} = M_{E_1} + \delta M_{E_1} = 187.66 + 108.23 = 295.89 \text{ m}$$
$$P_{E_2} = P_{E_1} + \delta P_{E_1} = 207.73 - 44.13 = 163.60 \text{ m}$$

$$M_{E_3} = M_{E_2} + \delta M_{E_2} = 295.89 - 106.96 = 188.93 \text{ m}$$
$$P_{E_3} = P_{E_2} + \delta P_{E_2} = 163.60 - 66.08 = 97.52 \text{ m}$$

$$M_{E_4} = M_{E_3} + \delta M_{E_3} = 188.93 + 14.96 = 203.89 \text{ m}$$
$$P_{E_4} = P_{E_3} + \delta P_{E_3} = 97.52 + 61.99 = 159.51 \text{ m}$$

$\Delta M = 0 \text{ m}$
$\Delta P = 0 \text{ m}$ (os pontos inicial e final coincidem)

$$EFM = \Delta M + \sum \delta M = \delta M_{E_1} + \delta M_{E_2} + \delta M_{E_3} + \delta M_{E_4} = 0 \text{ m}$$
$$EFP = \Delta P + \sum \delta P = \delta P_{E_1} + \delta P_{E_2} + \delta P_{E_3} + \delta P_{E_4} = 0.02 \text{ m}$$

$$\sum |\delta M| = 246.38 \text{ m}$$
$$\sum |\delta P| = 220.44 \text{ m}$$

$$KM = -EFM / \sum |\delta M| = 0$$
$$KP = -EFP / \sum |\delta P| = -9.072763 \times 10^{-5}$$

$$\bar{\delta} M_{E_2} = \delta M_{E_2} + KM \times |\delta M_{E_2}| = 108.23 \text{ m}$$
$$\bar{\delta} P_{E_2} = \delta P_{E_2} + KP \times |\delta P_{E_2}| = -44.13 \text{ m}$$

$$\bar{\delta} M_{E_3} = \delta M_{E_3} + KM \times |\delta M_{E_3}| = -106.96 \text{ m}$$
$$\bar{\delta} P_{E_3} = \delta P_{E_3} + KP \times |\delta P_{E_3}| = -68.09 \text{ m}$$

$$\bar{\delta} M_{E_4} = \delta M_{E_4} + KM \times |\delta M_{E_4}| = 14.96 \text{ m}$$
$$\bar{\delta} P_{E_4} = \delta P_{E_4} + KP \times |\delta P_{E_4}| = 61.98 \text{ m}$$

$$\bar{\delta} M_{E_1} = \delta M_{E_1} + KM \times |\delta M_{E_1}| = -16.23 \text{ m}$$
$$\bar{\delta} P_{E_1} = \delta P_{E_1} + KP \times |\delta P_{E_1}| = 48.24 \text{ m}$$

$$M_{E_2} = M_{E_1} + \bar{\delta} M_{E_2} = 187.66 + 108.23 = 295.89 \text{ m}$$
$$P_{E_2} = P_{E_1} + \bar{\delta} P_{E_2} = 207.73 - 44.13 = 163.60 \text{ m}$$

$$M_{E_3} = M_{E_2} + \bar{\delta} M_{E_3} = 295.89 - 106.96 = 188.93 \text{ m}$$
$$P_{E_3} = P_{E_2} + \bar{\delta} P_{E_3} = 163.60 - 68.09 = 95.51 \text{ m}$$

$$M_{E_4} = M_{E_3} + \bar{\delta} M_{E_4} = 188.93 + 14.96 = 203.89 \text{ m}$$
$$P_{E_4} = P_{E_3} + \bar{\delta} P_{E_4} = 95.51 + 61.98 = 157.49 \text{ m}$$