Ciências ULisboa

Modelação Numérica
Aula 21

Exercícios de aplicação

Exercício 3

A trajetória de um projétil é registada em radar como uma sequência de N posições e tempos (t,x,z). Admita que a trajetória segue uma parábola no plano (x, z) da forma

$$z = z_0 + w_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$x = x_0 + u_0 t$$

não sendo afetada nem pela resistência do ar nem pela rotação da Terra, com posição inicial (x_0, z_0) e velocidade inicial (u_0, w_0).

(a) Esquematize um método de otimização para estimar a velocidade inicial (u_0, w_0) e o ponto de impacto, em $(t, x, z = 0)$;

(b) Escreva a função de custo;

(c) Discuta o critério de paragem do método.

Esquematize um método de otimização para estimar a velocidade inicial (u_0, w_0) e o ponto de impacto, em $(t, x, z = 0)$;

O sistema de equações

$$z = z_0 + w_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = x_0 + u_0 t$$

tem 4 parâmetros (x_0, z_0, u_0, w_0) mas um deles pode ser fixado arbitrariamente, visto que uma parábola no plano (x, z) é totalmente definida por 3 parâmetros.

Assim, se os dados observados forem: $(t_1, t_2, \dots, t_N), (x_1, x_2, \dots, x_N), (z_1, z_2, \dots, z_N)$,

Podemos fazer $t_1 = 0$ (i.e. substituir a série de tempos por $(0, t_2 - t_1, \dots t_N - t_1)$),

e $x_0 = x_1$. Os 3 parâmetros restantes serão calculados por otimização.

Algoritmo de otimização

Calcular (z_0, u_0, w_0) tais que (x', z') dados por

$$z' = z_0 + w_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x' = x_0 + u_0 t$$

São o mais próximos possível dos valores observados (x, z), i.e. têm o menor valor possível da função de custo a seguir definida.

Escreva a função de custo;

```
def cost(z0,u0,w0)
   g=9.8065
   xC=x(1)+u0*(t-t(1));
   zC=z0+w0*(t-t(1))-0.5*g(t-t(1))**2;
   erro=np.sqrt((xC-x)**2+(zC-z)**2);
   custo=np.mean(erro);
   return custo
```

Discuta o critério de paragem do método.

Normalmente são usados 2 critérios de paragem: um número máximo de iterações; uma condição de convergência.

A condição de convergência pode ser dada como o valor da função de custo a atingir, ou no caso de métodos de annealing como o valor mínimo da janela de pesquisa (ou da “temperatura”) i.e. condições que definem qual o erro “aceitável”.

Exercício 4

Respostas curtas: (<5 linhas cada)

Que tipo de filtro é uma média móvel (com N termos constantes) ? Qual a sua função de transferência?

Defina modelo linear sub-determinado, indicando a forma da sua representação numérica. Discuta a sua solução.

No método de Lax aplicado à equação de advecção linear 1D, mostra-se que a velocidade de fase da onda numérica de número de onda k está relacionada com a velocidade física por:

$$\hat{U} = \frac{U \tan(k\Delta x)}{k\Delta x}$$

Que propriedade do método é descrita por essa relação?

Que tipo de filtro é uma média móvel (com N termos constantes) ? Qual a sua função de transferência?

Um filtro de média móvel com coeficientes constantes é aplicado na forma:

h=[1:N]/N;y=conv(x,h)

É um filtro passa baixo.

A sua função de transferência é da forma $\frac{\sin(f)}{f}$: vale 1 em f=0 (passa baixo), mas oscila entre valores positivos e negativos: não é um filtro ideal nem próximo disso.

Defina modelo linear sub-determinado, indicando a forma da sua representação numérica. Discuta a sua solução.

Um modelo linear é sempre representado na forma

$$\vec{y} = M\vec{x}$$

Onde M é uma matriz $(m \times n)$ de coeficientes constantes. m é o número de equações do modelo (dimensão do vetor de observações $\vec{y}$), n é o número parâmetros a determinar (dimensão de $\vec{x}$)

Se $m = n$ e M não for singular. O problema tem uma única solução $\vec{x}$.

Se $m < n$ o problema é subterminado (mais incógnitas que equações), e existem múltiplas soluções com erro nulo. Pode encontrar-se univocamente a solução com menor norma quadrática.

Que propriedade do método é descrita por $\widehat{U} = \frac{U\tan(k\Delta x)}{k\Delta x}$?

No método de Lax a velocidade de fase depende do número de onda (ou do comprimento de onda): logo o método tem dispersão numérica.