UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - Série 2
Equação de Euler

1. Um fluido ideal está em rotação num campo gravítico g com velocidade angular constante Ω de forma que, em coordenadas Cartesianas, o campo de velocidades é dado por $\mathbf{u} = (-\Omega y,\, \Omega x,\, 0)$. Queremos determinar as superfícies com pressão constante e, consequentemente, a superfície livre de um fluido que roda uniformemente num balde à pressão atmosférica.

   Se usarmos a equação de Bernoulli, $p/\rho + \frac{1}{2}u^2 + gz =$ constante, então as superfícies isobáricas são
   $$z = \text{constante} - \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2),$$
   mas que significa que a superfície livre tem a sua altura máxima no centro. O que está errado?

   Escreva as equações de Euler para cada componente, integre-as diretamente para calcular a pressão, e então obtenha a forma correta para a superfície livre do fluido em rotação.

2. O escoamento de um fluido caracterizada pelo campo de velocidades, em coordenadas cilíndricas, $u_r = u_z = 0$ e $u_\theta(r)$, com $u_\theta = \omega r, r \leq R$ e $u_\theta = \frac{\omega R^2}{r}, r > R$ pode ser considerado um modelo de um tornado.

   a) Determine se o escoamento é irrotacional nas regiões interior e exterior do domínio, separadas por R.

   b) Usando a equação de Euler (justifique) calcule o campo de pressão na região exterior, supondo que a pressão no infinito é p_0.

   c) Usando o resultado da alínea anterior para a pressão em R, calcule o campo de pressão na região interior.

   d) Faça um gráfico da pressão e determine o ponto onde a pressão é mínima.

   e) Um furacão de categoria 3 na escala de Saffir-Simpson tem uma velocidade máxima de 200 km /h. Considere a fronteira entre as duas regiões definidas em cima $R = 18km$. Supondo que a pressão ao nível do mar é a igual à pressão no infinito, calcule a pressão mínima e a pressão em R. Mostre que estas pressões não dependem de R. (densidade do ar $1.22kg/m^3$ e pressão ao nível do mar $101350Pa$).

3. a) A partir da equação de Euler, derive a equação de Bernoulli, justificando todas as aproximações que fizer.
   b) Derive a equação de Bernoulli para escoamentos rotacionais e discuta em que situações e como pode ser aplicada.
   c) Considere uma esfera sólida estacionária num escoamento invíscido e uniforme (longe da esfera). Use a equação de Bernoulli para explicar em que regiões da esfera a pressão é mais elevada. Se a esfera for flexível, em que sentido vai ser deformada? Discuta.
   d) No escoamento uniforme através de uma esfera sólida da alínea anterior, o que muda nas condições de contorno se o fluido tem viscosidade ou não? E na força de arrasto?

4. A densidade e a velocidade do escoamento no coletor de admissão de um motor alternado são aproximadamente ρ_0 (constante) e $u(t) = U_0(1+\sin(2\pi f t))$. Se o corredor da válvula de admissão

da placa do acelerador para o cilindro for um tubo horizontal reto de comprimento L, (ver figura 1) determine a diferença de pressão necessária entre as extremidades deste tubo para sustentar este escoamento, supondo que o fluido é ideal.

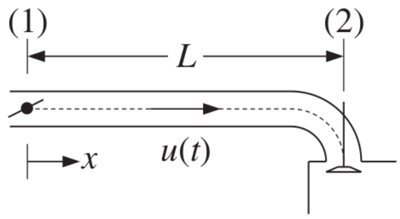

Figure 1: Coletor de admissão para um motor de combustão interna alternado.

5. Partindo da equação de Euler para fluidos incompressíveis, obtenha a equação da energia:

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho u^2 dV = -\int_S (p' + \frac{1}{2}\rho u^2)\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

onde V é a região do fluido interna à superfície S e p' denota $p + \rho g z$, a parte não-hidrostática do campo de pressão.

6. Para um fluido sem viscosidade, mostre que a equação de Euler se pode escrever:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u} + \nabla(\frac{1}{2}u^2) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla(gz)$$

Independentemente de o fluido ser incompressível, temos também a conservação da massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0.$$

Mostre que

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p.$$

Deduza que, se p for uma função apenas de ρ, a equação para a vorticidade (acima) é basicamente a mesma para fluidos compressíveis e incompressíveis, exceto que $\boldsymbol{\omega}$ é substituído por $\boldsymbol{\omega}/\rho$.

7. Uma explosão subaquática cria um escoamento puramente radial ($u_\theta = u_\phi = 0$ e $\partial/\partial\theta = 0$ e $\partial/\partial\phi = 0$) na água ao redor de uma bolha cujo raio, $R(t)$, aumenta com o tempo.
a) Uma vez que a velocidade do escoamento na superfície da bolha deve ser igual a dR/dt, mostre que a equação de continuidade requer

$$u_r = \frac{R^2}{r^2}\frac{dR}{dt}$$

Suponha que a é seja incompressível. Note que, como R é uma função apenas do tempo, dR/dt é uma derivada comum.
b) Use as equações do movimento para determinar a pressão, $p(r,t)$, em qualquer posição, r, na água. Despreze todas as forças volumétricas. Uma etapa de integração deve ser executada, o que introduz uma constante de integração; a constante pode ser calculada supondo que a pressão longe da bolha ($r \to \infty$) é conhecida (denotada por p_∞).

c) Finalmente, mostre que, se desprezarmos a tensão superficial de forma que a pressão na bolha, p_B, é igual à pressão na água em $r = R$, temos:

$$p_B - p_\infty = \rho \left\{ R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \right\}$$

Esta equação é conhecida como a equação de Rayleigh para a dinâmica da bolha.

8. a) Quais das seguintes são condições necessárias para a aplicação da equação de Bernoulli, $p/\rho + \frac{1}{2}u^2 + gz =$ constante: i) escoamento estacionário, ii) viscosidade nula, iii) fluido incompressível, iv) escoamento irrotacional e v) escoamento ao longo de uma linha de corrente.

   b) Discuta em que condições a equação de Bernoulli da alínea a) pode ser generalizada.

   c) Por integração da equação de Euler, ou de outra forma, derive uma dessas equações. Indique qual ou quais das condições referidas em a) são necessárias neste caso.

   d) Uma aplicação da equação de Euler descreve a forma da superfície livre de um fluido em escoamento através de um ralo fino. Considere num recipiente de seção circular de raio R, um fluido ideal que roda com velocidade angular uniforme, ω_0, em torno do eixo de simetria onde se situa o ralo. Mostre que depois de aberto o ralo, na fase final do escoamento, a velocidade angular de uma partícula de fluido, inicialmente no bordo do recipiente, aumenta na razão inversa do quadrado da distância ao eixo de simetria r.

   e) Supondo que a equação de Euler descreve a variação da pressão radial, obtenha a forma da superfície livre do fluido perto do ralo.

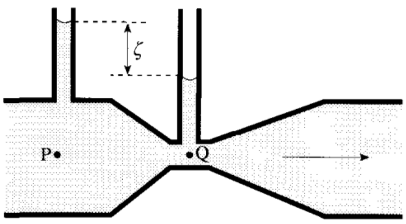

Figure 2: Tubo de Venturi.

9. No tubo de Venturi da figura 2, calcule a diferença de alturas nos tubos ζ em função da taxa de escoamento, para um fluido ideal.

10. Dois tubos, um retilíneo e outro curvo, estão imersos numa corrente horizontal de água, com velocidade v (figura 3). A diferença entre os níveis de água nos dois tubos é $h = 5$ cm. a) Calcule v. b) Calcule o número de Reynolds e de Mach para este problema.

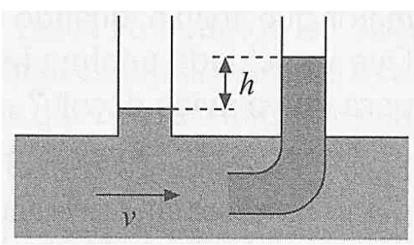

Figure 3: Tubo de Pitot.

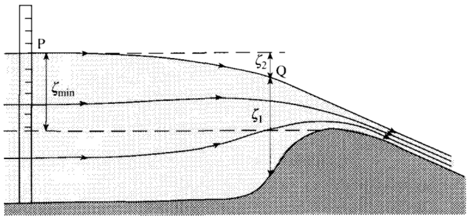

Figure 4: Dispositivo para medir a taxa de escoamento.

11. Uma forma de medir a taxa de escoamento num canal aberto é construindo uma barragem larga no percurso do fluido, como indicado na figura 4. a) Use a equação de Bernoulli para calcular a velocidade do fluido em função da distância ζ_2. b) Suponha que a velocidade do fluido não varia com a altura e calcule a taxa de escoamento em função de ζ_{min}.

12. Considere uma hélice que injeta energia num fluido movendo-o com velocidade U. Suponha que o escoamento suficientemente longe da hélice é laminar e que o fluido é incompressível. Desprezando as variações da pressão atmosférica com a altura, calcule a diferença de pressão, antes e depois da hélice necessária para que o fluido tenha velocidade U. Note que a energia não é conservada ao longo de uma linha de corrente que passa pela hélice.

13. Um sifão aspira o líquido de densidade ρ através do tubo ABC e escoa-o em C, com velocidade v. a) Calcule v em função dos parâmetros da figura 5. b) Calcule a pressão nos pontos A e B. c) Determine o valor máximo de h_0 para o qual o sifão funciona.

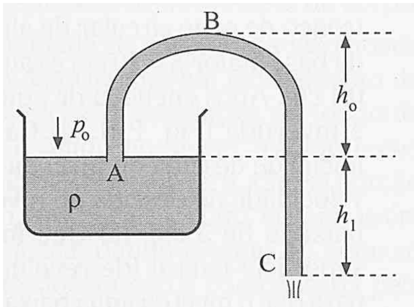

Figure 5: Sifão.

14. A água flui de um grande reservatório sob a influência da gravidade para o ar livre (Fig. 6). Considere $h = 0.1$m, $H = 1.5$m, $D = 0.1$m. Qual é o diâmetro d do fluxo de água na posição H

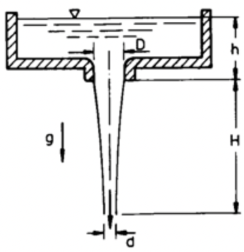

Figure 6: Reservatório.

abaixo da abertura?