EXAME CÁLCULO II 2023.06.01

(1) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(t) = (t^2+1)\, u^3(t) \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Para separar as variáveis, pretendemos dividir ambos os lados da equação por u^3.
Devido à condição inicial, não há perigo de dividir por zero.

$$\frac{u'(t)}{u^3(t)} = t^2+1$$

Primitivamos ambos os lados da igualdade

$$-\frac{1}{2u^2(t)} = \frac{t^3}{3} + t + c$$

$$u^2(t) = -\frac{1}{\frac{2}{3}t^3 + 2t + c}$$

Obtemos duas famílias de soluções

$$u(t) = \sqrt{-\frac{1}{\frac{2}{3}t^3 + 2t + c}}$$

$$u(t) = -\sqrt{-\frac{1}{\frac{2}{3}t^3 + 2t + c}}$$

EXAME CÁLCULO VI 2023.06.01

1 (continuação)

Tendo em conta a condição inicial, é a segunda família de soluções que nos interessa.

Impomos a condição inicial $u(0) = -1$

$-\sqrt{-\frac{1}{c}} = -1 \qquad \sqrt{-\frac{1}{c}} = 1 \qquad -\frac{1}{c} = 1 \quad c = -1$

resposta final: $u(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}t^3 - 2t}}$

EXAME CÁLCULO II 2023.06.01

(2) Determine e classifique os pontos estacionários da função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x^3y - x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 12x^2y - 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x^3$$

$$\begin{cases} 4x^3 + 12x^2y = 1 \\ 4y^3 + 4x^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^3 - 12x^3 = 1 \\ y = -x \end{cases} \qquad \begin{cases} -8x^3 = 1 \\ y = -x \end{cases}$$

obtemos o único ponto estacionário $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

para determinar a sua natureza, precisamos das derivadas de f da segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 24xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 3 - 6 = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 3$$

a natureza do ponto estacionário $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ está relacionada com a convexidade / concavidade do polinómio de Taylor

$$P_2(x,y) = f(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + \frac{\partial f}{\partial x}(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{2}) + \frac{\partial f}{\partial y}(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(y - \tfrac{1}{2}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(y - \tfrac{1}{2})^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{2})(y - \tfrac{1}{2}) =$$

$$= f(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) - \tfrac{3}{2}(x + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{2}(y - \tfrac{1}{2})^2 + 3(x + \tfrac{1}{2})(y - \tfrac{1}{2})$$

EXAME CÁLCULO II 2023.06.01

(2) (continuação)

podemos introduzir as notações $s = x + \frac{1}{2}$, $t = y - \frac{1}{2}$ e basta estudar a expressão

$$-s^2 + t^2 + 2st = s^2 + t^2 + 2st - 2s^2 = (s+t)^2 - 2s^2$$

podemos observar duas parábolas, uma com os ramos para cima, outra com os ramos para baixo, o que indica que o ponto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é um ponto sela.

EXAME CÁLCULO II 2023.06.01

(3) Calcule o comprimento da curva

$r : [1,2] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = \left(3 - t^{3/2}, (3-t)^{3/2}, 3-t \right)$

$$r'(t) = \left(-\frac{3}{2} t^{1/2}, -\frac{3}{2}(3-t)^{1/2}, -1 \right)$$

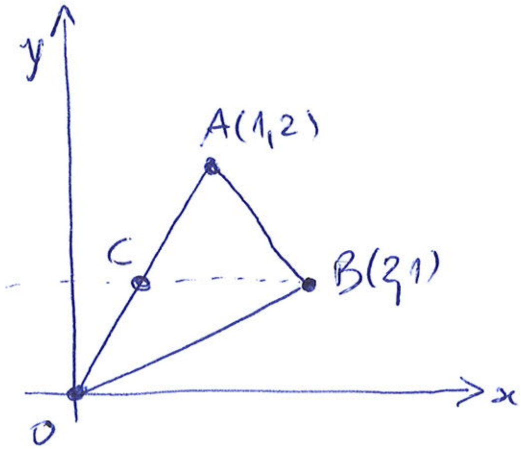
$$\| r'(t) \|^2 = \frac{9}{4} t + \frac{9}{4}(3-t) + 1 = 1 + \frac{27}{4} = \frac{31}{4}$$

$$\text{comprimento} = \int_C 1 \, ds = \int_{t=1}^{2} \| r'(t) \| \, dt =$$

$$= \int_{t=1}^{2} \sqrt{\frac{31}{4}} \, dt = \frac{\sqrt{31}}{2}$$

EXAME CÁLCULO II 2023.06.01

4



Calcule $\iint_T xy \, da$

As arestas do triângulo T são descritas por

OA : $y = 2x$

OB : $x = 2y$

AB : $x + y = 3$

Usaremos o teorema de Fubini, seja com tiras horizontais ou com tiras verticais. Em qualquer dos casos, é conveniente "cortar" o domínio T em dois subdomínios

$$OAB = OBC \cup ABC$$

$$\iint_{OBC} xy \, da = \int_{y=0}^{1} \int_{x=y/2}^{2y} xy \, dx \, dy = \int_{y=0}^{1} y \int_{x=y/2}^{2y} x \, dx \, dy =$$

$$= \int_{y=0}^{1} y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y/2}^{2y} dy = \int_{y=0}^{1} y \left(2y^2 - \frac{y^2}{8} \right) dy =$$

$$= \frac{15}{8} \int_{y=0}^{1} y^3 \, dy = \frac{15}{8} \left[\frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{1} = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{32}$$

EXAME CÁLCULO II 2023.06.01

4 (continuação)

$$\iint_{ABC} xy \, da = \int_{y=1}^{2} \int_{x=y/2}^{3-y} xy \, dx \, dy =$$

$$= \int_{y=1}^{2} y \int_{x=y/2}^{3-y} x \, dx \, dy = \int_{y=1}^{2} y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y/2}^{3-y} dy =$$

$$= \int_{y=1}^{2} y \left[\frac{1}{2}(3-y)^2 - \frac{y^2}{8} \right] dy =$$

$$= \int_{y=1}^{2} y \left(\frac{9}{2} - 3y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{8} \right) dy =$$

$$= \int_{y=1}^{2} \left(\frac{3}{8} y^3 - 3y^2 + \frac{9}{2} y \right) dy =$$

$$= \left[\frac{3}{32} y^4 - y^3 + \frac{9}{4} y^2 \right]_{y=1}^{2} =$$

$$= \frac{3}{32}(16-1) - (8-1) + \frac{9}{4}(4-1) =$$

$$= \frac{45}{32} - 7 + \frac{27}{4}$$

$$\iint_{T} xy \, da = \iint_{OBC} xy \, da + \iint_{ABC} xy \, da =$$

$$= \frac{15}{32} + \frac{45}{32} - 7 + \frac{27}{4} = \frac{60}{32} - 7 + 6 + \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{15}{8} - 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7+6}{8} = \frac{11}{8}$$

EXAME CÁLCULO II 2023.06.01

(5) Calcule $\int_{y=1}^{2} \int_{z=0}^{y^2} \int_{x=0}^{y+z} (2y+1)e^{x} \, dx \, dz \, dy$

$$\int_{x=0}^{y+z} (2y+1) e^{x} dx = (2y+1) \int_{x=0}^{y+z} e^{x} dx =$$

$$= (2y+1) \left[e^{x} \right]_{x=0}^{y+z} = (2y+1)\left(e^{y+z} - 1\right)$$

$$\int_{z=0}^{y^2} (2y+1)\left(e^{y+z} - 1\right) dz = (2y+1) \int_{z=0}^{y^2} \left(e^{y} e^{z} - 1\right) dz =$$

$$= (2y+1)\left(e^{y} \int_{z=0}^{y^2} e^{z} dz - \int_{z=0}^{y^2} 1 \, dz\right) =$$

$$= (2y+1)\left(e^{y}\left(e^{y^2} - 1\right) - y^2\right) =$$

$$= (2y+1) e^{y^2+y} - (2y+1) e^{y} - (2y+1) y^2$$

$$\int_{y=1}^{2} (2y+1) e^{y^2+y} dy = \int_{s=2}^{6} e^{s} ds = \left[e^{s}\right]_{s=2}^{6} = e^{6} - e^{2}$$

$$s = y^2 + y$$

$$ds = (2y+1) dy$$

$$\int_{y=1}^{2} (2y+1) e^{y} dy = \int_{y=1}^{2} (2y+1)\left(e^{y}\right)' dy = \left[(2y+1)e^{y}\right]_{y=1}^{2} -$$

$$- \int_{y=1}^{2} (2y+1)' e^{y} dy = 5e^{2} - 3e - 2 \int_{y=1}^{2} e^{y} dy =$$

$$= 5e^{2} - 3e - 2\left(e^{2} - e\right) = 3e^{2} - e$$

EXAME CÁLCULO II 2023.06.01

5 (continuação)

$$\int_{y=1}^{2} (2y+1)y^2 dy = \int_{y=1}^{2} (2y^3+y^2) dy =$$

$$= \left[\frac{y^4}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=1}^{2} = 8 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{59}{6}$$

resposta final: $e^6 - e^2 - 3e^2 + e - \frac{59}{6} =$

$$= e^6 - 4e^2 + e - \frac{59}{6}$$