AULA 1

SUMÁRIO. Preliminares sobre matrizes. Característica e nulidade de uma matriz.

$\triangleright$ Ao longo do curso, $\Bbbk$ denotará um corpo arbitrário e, muitas vezes, iremos admitir que $\Bbbk = \mathbb{R}$ (o corpo dos números reais) ou $\Bbbk = \mathbb{C}$ (o corpo dos números complexos).

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\Bbbk^{m\times n}$ o conjunto constituído por todas as matrizes de tipo $m \times n$ com coeficientes no corpo $\Bbbk$; assim, um elemento $\mathbf{A} \in \Bbbk^{m\times n}$ é uma MATRIZ DE TIPO $m \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

com m linhas e n colunas em que $a_{i,j} \in \Bbbk$ para quaisquer $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $\Bbbk^{m\times n}$ é um espaço vectorial sobre $\Bbbk$ com respeito à adição de matrizes e à multiplicação por escalares. Para quaisquer $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, denotaremos por $\mathbf{E}_{i,j}$ a matriz de $\Bbbk^{m\times n}$ com coeficiente 1 na entrada (i, j) e coeficiente 0 em todas as outras entradas. Então, qualquer matriz $\mathbf{A} \in \Bbbk^{m\times n}$ escreve-se de maneira única como combinação linear

$$\mathbf{A} = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}\mathbf{E}_{i,j}$$

onde $a_{i,j} \in \Bbbk$ são os coeficientes da matriz $\mathbf{A}$. Sendo assim,

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{i,j} \colon 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

é uma base de $\Bbbk^{m\times n}$, à qual nos referiremos como a BASE CANÓNICA de $\Bbbk^{m\times n}$. Por conseguinte, o espaço vectorial $\Bbbk^{m\times n}$ tem dimensão finita e, de facto, $\dim(\Bbbk^{m\times n}) = mn$.

No caso particular em que $n = 1$, simplificaremos a notação e denotaremos por $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ as matrizes-coluna $\mathbf{E}_{1,1}, \ldots, \mathbf{E}_{m,1} \in \Bbbk^{m\times 1}$, respectivamente; deste modo,

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$$

é a base canónica de $\Bbbk^{m\times 1}$.

$\triangleright$ Para qualquer $\mathbf{A} \in \Bbbk^{m\times n}$, definimos

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \left\{\mathbf{A}\mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in \Bbbk^{n\times 1}\right\}.$$

É fácil verificar que $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{k}^{m\times 1}$ a que chamamos o ESPAÇO-IMAGEM de $\mathbf{A}$; definimos a CARACTERÍSTICA $r(\mathbf{A})$ de $\mathbf{A}$ como sendo a dimensão

$$r(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{A})$$

do espaço-imagem de $\mathbf{A}$.

PROPOSIÇÃO 1.1. *Para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{m\times n}$, $r(\mathbf{A})$ é o número máximo de colunas de $\mathbf{A}$ que são linearmente independentes.*

DEMONSTRAÇÃO. $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ é o subespaço vectorial de $\mathbb{k}^{m\times 1}$ gerado pelos vectores

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1,\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{A}\mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n = \mathbf{A}\mathbf{e}_n$$

onde $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é a base canónica de $\mathbb{k}^{n\times 1}$; além disso, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são as colunas de $\mathbf{A}$. Deste modo, o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ contém uma base de $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ que tem de ser um subconjunto maximal de vectores linearmentes. □

▷ Por outro lado, para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{m\times n}$, definimos

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1} \colon \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}\right\} \subseteq \mathbb{k}^{n\times 1}.$$

Neste caso, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{k}^{n\times 1}$ a que chamamos o ESPAÇO-NULO de $\mathbf{A}$; definimos a NULIDADE $n(\mathbf{A})$ de $\mathbf{A}$ como sendo a dimensão

$$n(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

do espaço-nulo de $\mathbf{A}$.

TEOREMA 1.2. *Para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{m\times n}$, tem-se*

$$n = r(\mathbf{A}) + n(\mathbf{A}).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s\}$ uma base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ (de modo que $s = n(\mathbf{A})$) e sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_t \in \mathbb{k}^{n\times 1}$ tais que

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_t\}$$

é uma base de $\mathbb{k}^{n\times 1}$ (de modo que $s + t = \dim \mathbb{k}^{n\times 1} = n$). Então, $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{v}_t\}$ é uma base de $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. □

OBSERVAÇÃO 1.3. Para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{m\times n}$, a correspondência $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}$ define uma aplicação linear $\varphi_{\mathbf{A}} \colon \mathbb{k}^{n\times 1} \to \mathbb{k}^{m\times 1}$. Tem-se

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathrm{Im}(\varphi_{\mathbf{A}}) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathrm{Nuc}(\varphi_{\mathbf{A}}),$$

onde $\mathrm{Nuc}(\varphi_{\mathbf{A}}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{k}^{n\times 1} \colon \varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ é o NÚCLEO de $\varphi_{\mathbf{A}}$.

TEOREMA 1.4. *Para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{m\times n}$ e qualquer $\mathbf{B} \in \mathbb{k}^{n\times p}$, tem-se*

$$r(\mathbf{A}\mathbf{B}) = r(\mathbf{B}) - \dim\big(\mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{R}(\mathbf{B})\big).$$

Demonstração. Seja $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s\}$ uma base de $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{R}(\mathbf{B})$ e sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t \in \mathbb{k}^{n\times 1}$ tais que

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\}$$

é uma base de $\mathcal{R}(\mathbf{B})$. Provamos que $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_t\}$ é uma base de $\mathcal{R}(\mathbf{AB})$.

Em primeiro lugar, para qualquer $1 \leqslant i \leqslant t$, temos $\mathbf{v}_i = \mathbf{B}\mathbf{w}_i$ para algum $\mathbf{w}_i \in \mathbb{k}^{p\times 1}$, logo

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{w}_i) = (\mathbf{AB})\mathbf{w}_i \in \mathcal{R}(\mathbf{AB}).$$

Por outro lado, seja $\mathbf{v} \in \mathcal{R}(\mathbf{AB})$ e seja $\mathbf{w} \in \mathbb{k}^{p\times 1}$ tal que $\mathbf{v} = (\mathbf{AB})\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{w})$. Como $\mathbf{B}\mathbf{w} \in \mathcal{R}(\mathbf{B})$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{k}$ tais que

$$\mathbf{B}\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_t\mathbf{v}_t + \beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_s\mathbf{u}_s.$$

Sendo assim, temos

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{w}) = \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_t\mathbf{A}\mathbf{v}_t + \beta_1\mathbf{A}\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_s\mathbf{A}\mathbf{u}_s = \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_t\mathbf{A}\mathbf{v}_t,$$

provando que $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_t\}$ é um conjunto de geradores de $\mathcal{R}(\mathbf{AB})$.

Para terminar, provemos que $\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_t$ são linearmente independentes. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{k}$ tais que

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_t\mathbf{A}\mathbf{v}_t = \mathbf{A}\big(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_t\mathbf{v}_t\big).$$

Sendo assim, temos

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_t\mathbf{v}_t \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{R}(\mathbf{B})$$

e, portanto, existem $\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{k}$ tais que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_t\mathbf{v}_t = \beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_s\mathbf{u}_s.$$

Como $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\}$ é base de $\mathcal{R}(\mathbf{B})$, concluímos que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_t = \beta_1 = \cdots = \beta_s = 0.$$

Como se queria. □

Corolário 1.5. *Para qualquer* $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{m\times n}$ *e qualquer* $\mathbf{B} \in \mathbb{k}^{n\times p}$*, tem-se*

$$r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n \leqslant r(\mathbf{AB}) \leqslant \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}.$$

Demonstração. As desigualdades $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n \leqslant r(\mathbf{AB}) \leqslant r(\mathbf{B})$ resultam imediatamente do Teorema 1.4; notemos que $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n = r(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A})$ e que $n(\mathbf{A}) \geqslant \dim\big(\mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{R}(\mathbf{B})\big)$.

Para justificar que $r(\mathbf{AB}) \leqslant r(\mathbf{A})$, basta observar que as colunas de $\mathbf{AB}$ são combinações lineares das colunas de $\mathbf{A}$, logo $\mathcal{R}(\mathbf{AB}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A})$. □

Proposição 1.6. *Uma matriz quadrada* $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{n\times n}$ *será invertível se e só se* $r(\mathbf{A}) = n$ *se e só se as colunas de* $\mathbf{A}$ *são linearmente independentes.*

Demonstração. Seja $\mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n}$ uma matriz invertível. Denotando por $\mathbf{I}_n$ a matriz identidade, obtemos

$$n = r(\mathbf{I}_n) = r(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) \leqslant r(\mathbf{A})$$

e, portanto, $r(\mathbf{A}) = n$.

Reciprocamente, seja $\mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n}$ tal que $r(\mathbf{A}) = n$. Nesta situação, $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \Bbbk^{n\times n}$ e, portanto, existem $v_1, \ldots, v_n \in \Bbbk^{n\times n}$ tais que

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

onde $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é a base canónica de $\Bbbk^{n\times n}$. Pondo $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}$, obtemos

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n\end{bmatrix} = \mathbf{I}_n.$$

Para concluirmos que $\mathbf{A}$ é invertível, falta provar que também se tem $\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Ora, temos

$$n = r(\mathbf{I}_n) = r(\mathbf{A}\mathbf{B}) \leqslant r(\mathbf{B}) \leqslant n,$$

logo $r(\mathbf{B}) = n$. Usando o argumento anterior, concluímos que $\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$ para alguma matriz $\mathbf{C} \in \Bbbk^{n\times n}$. De facto, temos

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A},$$

pelo que

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

provando que $\mathbf{A}$ é invertível (com inversa $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$).

A última afirmação é clara porque $r(\mathbf{A})$ é o número máximo de colunas de $\mathbf{A}$ que são linearmente independentes. □

Teorema 1.7. *Para qualquer matriz $\mathbf{A} \in \Bbbk^{m\times n}$, existem matrizes invertíveis $\mathbf{P} \in \Bbbk^{m\times m}$ e $\mathbf{Q} \in \Bbbk^{n\times n}$ tais que*

$$\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

onde $r = r(\mathbf{A})$.

Demonstração. Seja $\mathbf{A} \in \Bbbk^{m\times n}$ e seja $r = r(\mathbf{A})$. Pelo que vimos na demonstração do Teorema 1.2, existe uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de $\Bbbk^{n\times 1}$ tal que $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{v}_r\}$ é uma base de $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ e $\{\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Deste modo a matriz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} \in \Bbbk^{n\times n}$$

é invertível (porque as suas colunas são linearmente independentes, logo $r(\mathbf{Q}) = n$) e temos

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_r & \mathbf{A}\mathbf{v}_{r+1} & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_r & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

Por outro lado, como $\mathbf{Av}_1, \ldots, \mathbf{Av}_r \in \mathbb{k}^{m\times 1}$ são vectores linearmente independentes, existem vectores $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s \in \mathbb{k}^{m\times 1}$, onde $s = m - r$, tais que $\{\mathbf{Av}_1, \ldots, \mathbf{Av}_r, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ é uma base de $\mathbb{k}^{m\times 1}$. Por conseguinte, a matriz

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Av}_1 & \cdots & \mathbf{Av}_r & \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{w}_s \end{bmatrix} \in \mathbb{k}^{m\times m}$$

é invertível (porque as suas colunas são linearmente independentes, logo $r(\mathbf{P}_1) = m$); além disso, se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ for a base canónica de $\mathbb{k}^{m\times 1}$, então

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_r & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1\mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{P}_1\mathbf{e}_r & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Av}_1 & \cdots & \mathbf{Av}_r & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{AQ}.$$

O resultado segue-se tomando $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1^{-1}$. □

▷ Duas matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{k}^{m\times n}$ dizem-se EQUIVALENTES, e escrevemos $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, se existirem matrizes invertíveis $\mathbf{P} \in \mathbb{k}^{m\times m}$ e $\mathbf{Q} \in \mathbb{k}^{n\times n}$ tais que

$$\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}.$$

Deste modo, o Teorema 1.7 afirma que qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{m\times n}$ é equivalente a $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ onde $r = r(A)$. A relação $\sim$ é uma RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA, isto é:

- $\sim$ é REFLEXIVA: $A \sim A$ para qualquer $A \in \mathbb{k}^{m\times n}$;
- $\sim$ é SIMÉTRICA: para quaisquer $A, B \in \mathbb{k}^{m\times n}$, $A \sim B \implies B \sim A$;
- $\sim$ é TRANSITIVA: para quaisquer $A, B, C \in \mathbb{k}^{m\times n}$, $(A \sim B$ e $B \sim C) \implies A \sim C$.

PROPOSIÇÃO 1.8. *Duas matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{k}^{m\times n}$ são* EQUIVALENTES *se e só se tiverem a mesma característica (isto é, se e só se $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$).*

DEMONSTRAÇÃO. $\Leftarrow$: Suponhamos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{k}^{m\times n}$ são tais que $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$. Pelo Teorema 1.7, temos

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

onde $r = r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$ e, portanto, $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

$\Rightarrow$: Suponhamos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{k}^{m\times n}$ são equivalentes e sejam $\mathbf{P} \in \mathbb{k}^{m\times m}$ e $\mathbf{Q} \in \mathbb{k}^{n\times n}$ matrizes invertíveis tais que $\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$, isto é, tais que $\mathbf{PA} = \mathbf{BQ}^{-1}$.

Por um lado, como já justificámos antes, temos

$$\mathcal{R}(\mathbf{BQ}^{-1}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{B}) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}(\mathbf{B}) = \mathcal{R}(\mathbf{BI}_n) = \mathcal{R}(\mathbf{BQ}^{-1}\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{BQ}^{-1}),$$

pelo que $\mathcal{R}(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ e, portanto,

$$r(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{B}) = r(\mathbf{B}).$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.4, temos

$$r(\mathbf{P}\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) - \dim \big(\mathcal{N}(\mathbf{P}) \cap \mathcal{R}(\mathbf{A})\big).$$

Como $n(\mathbf{P}) = m - r(\mathbf{P}) = 0$ (porque $\mathbf{P}$ é invertível, logo $r(\mathbf{P}) = m$), concluímos que $\mathcal{N}(\mathbf{P}) = \{0\}$ e, portanto, $\mathcal{N}(\mathbf{P}) \cap \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$. Sendo assim, obtemos

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{P}\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}) = r(\mathbf{B}),$$

como se quer. □

Corolário 1.9. *Para qualquer $\mathbf{A} \in \Bbbk^{m\times n}$, existe um e um só $r \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

além disso, tem-se $r = r(\mathbf{A})$.

Corolário 1.10. *Para qualquer $\mathbf{A} \in \Bbbk^{m\times n}$, tem-se $r(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = r(\mathbf{A})$ onde $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \in \Bbbk^{n\times m}$ denota a matriz-transposta de $\mathbf{A}$.*

Demonstração. Basta observar que, se $\mathbf{P} \in \Bbbk^{m\times m}$ e $\mathbf{Q} \in \Bbbk^{n\times n}$ matrizes invertíveis tais que

$$\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

onde $r = r(\mathbf{A})$, então

$$\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}^{\mathsf{T}} = (\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q})^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \in \Bbbk^{n\times n}$ e $\mathbf{P}^{\mathsf{T}} \in \Bbbk^{m\times m}$ são matrizes invertíveis (exercício), concluímos que $r(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = r = r(\mathbf{A})$. Como se quer. □