AULA 3

SUMÁRIO. Teorema da decomposição de Schur. Teorema de Cayley-Hamilton.

PROPOSIÇÃO 3.1. (a) *Para qualquer* $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ *com* $\|\mathbf{u}\| = 1$, *existe uma matriz unitária* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *cuja primeira coluna é* $\mathbf{u}$.

(b) *Para qualquer* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *com* $\|\mathbf{u}\| = 1$, *existe uma matriz ortogonal* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *cuja primeira coluna é* $\mathbf{u}$.

DEMONSTRAÇÃO. (a) Basta escolher vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tais que $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{C}^{n\times 1}$ e fazer $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{n-1} \end{bmatrix}$.

(b) É como (a) substituindo $(\star)^*$ por $(\star)^{\mathsf{T}}$. $\square$

▷ Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n}$, dizemos que $\lambda \in \Bbbk$ é um VALOR PRÓPRIO de $\mathbf{A}$ se existir um vector não-nulo $\mathbf{v} \in \Bbbk^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$; se for este o caso, dizemos que $\mathbf{v}$ é um VECTOR PRÓPRIO de $\mathbf{A}$ associado ao valor próprio $\mathbf{v}$.

Nem toda a matriz tem valores próprios. Por exemplo, a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

não tem valores próprios reais; no entanto, i e $-i$ são valores próprios de $\mathbf{A}$ em $\mathbb{C}$.

TEOREMA 3.2. *Qualquer matriz* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tem pelo menos um valor próprio complexo.*

DEMONSTRAÇÃO. Usa Análise Complexa (para uma demonstração veja o Apêndice 1). $\square$

TEOREMA 3.3 (Decomposição de Schur). *Para qualquer matriz* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *existe uma matriz unitária* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que a matriz* $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ *é triangular superior.*

DEMONSTRAÇÃO. Fazemos indução sobre n. O resultado é trivial quando $n = 1$; suponhamos que $n \geqslant 2$.

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um valor próprio de $\mathbf{A}$ e seja $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ um vector com $\|\mathbf{v}\| = 1$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (este vector existe: basta escolher um vector próprio $\mathbf{u}$ de $\mathbf{A}$ e considerar $\mathbf{v} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\,\mathbf{u}$).

Pela Proposição 3.1, existe uma matriz unitária $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que tem $\mathbf{v}$ como primeira coluna. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tais que a matriz

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}^* \\ \mathbf{v}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1}^* \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^* \\ \mathbf{v}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v} & \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{v}^* \\ \mathbf{v}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{v} & \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{v}^*\mathbf{v} & \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \\ \lambda\mathbf{v}_1^*\mathbf{v} & \mathbf{v}_1^*\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1^*\mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\mathbf{v}_{n-1}^*\mathbf{v} & \mathbf{v}_{n-1}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{n-1}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{V}$ é unitária, $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{C}^{n\times 1}$ e, portanto,

$$\mathbf{v}^*\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v}^*\mathbf{v}_i = \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}_i\rangle = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Sendo assim, obtemos

$$\mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \\ 0 & \mathbf{v}_1^*\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1^*\mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mathbf{v}_{n-1}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{n-1}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^*\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1^*\mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{n-1}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$, a hipótese de indução garante que existe uma matrix unitária $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ tal que a matriz $\mathbf{U}_0^*\mathbf{A}_0\mathbf{U}_0$ é triangular superior. Para terminar a demonstração, tomamos

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

É fácil verificar que $\mathbf{U}$ é invertível e que $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$, logo $\mathbf{U}$ é uma matriz unitária. Por outro lado, temos

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix}^* \mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{V} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0^*\mathbf{A}_0\mathbf{U}_0 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior. Como se queria. $\square$

$\triangleright$ Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz complexa arbitrária.

Pela definição, um número complexo $\lambda \in \mathbb{C}$ será um valor próprio se e só se existir um vector não-nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tal que $(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, isto é, se e só se o espaço-nulo $\mathcal{N}(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ for não-nulo, o que por sua vez acontecerá se e só se

$$n(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \dim \mathcal{N}(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \neq 0.$$

Sendo assim, $\lambda \in \mathbb{C}$ será um valor próprio de $\mathbf{A}$ se e só se

$$r(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = n - n(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \lneq n,$$

ou seja, se e só se a matriz $\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ não for invertível. Da Álgebra Linear, sabemos que uma matriz é invertível se e só se o seu determinante for não-nulo e, portanto, $\lambda \in \mathbb{C}$ será um valor próprio de $\mathbf{A}$ se e só se $\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0$ (*).

Seja $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz unitária tal que $\mathbf{T} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior (esta matriz existe pelo teorema da decomposição de Schur). Como $\mathbf{U}$ é invertível e $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$, temos

$$\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{T} = \lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^*(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{U}$$

e, portanto,

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{T}) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \ ^{(\dagger)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Por conseguinte, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{T}$ têm exactamente os mesmos valores próprios (complexos). Por outro lado, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ forem as entradas da diagonal de $\mathbf{T}$, isto é, se $\mathbf{T}$ for da forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

então

$$\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - \lambda_n \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{T}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Por conseguinte, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são todos os valores próprios de $\mathbf{A}$ (possivelmente com repetições).

(*) Para qualquer matriz quadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{n\times n}$ (com coeficientes num corpo $\mathbb{k}$ arbitrário), denotaremos por $\det(\mathbf{A})$, ou por $|\mathbf{A}|$, o DETERMINANTE de $\mathbf{A}$.

(†) Recorde que $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$ para quaisquer $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{k}^{n\times n}$ e que $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$ para qualquer matriz invertível $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{n\times n}$.

Desenvolvendo o produto acima, obtemos

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ são números complexos bem-determinados pelos valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbf{A}$; de facto, temos(*)

$$a_1 = -\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i, \quad a_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j, \quad \ldots, \quad a_n = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Deste modo, considerando uma indeterminada x sobre $\mathbb{C}$, obtemos um polinómio

$$p_{\mathbf{A}}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

no anel polinomial $\mathbb{C}[x]$; a este polinómio chamamos o POLINÓMIO CARACTERÍSTICO da matriz $\mathbf{A}$ (como é natural, escrevemos $p_{\mathbf{A}}(x) = \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ (†)) e à equação polinomial $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$ chamamos a EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA de $\mathbf{A}$.

Pelo que vimos acima, as soluções da equação característica $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$ são exactamente os valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbf{A}$ e, usando sucessivamente o algoritmo da divisão, podemos escrever

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n).$$

Agrupando convenientemente os valores próprios de $\mathbf{A}$ de modo que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (para $r \leqslant n$) sejam distintos dois-a-dois e tais que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, então

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_1)^{m_r}$$

onde os expoentes $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ são bem-determinados; a m_i, para $1 \leqslant i \leqslant r$, chamamos a MULTIPLICIDADE ALGÉBRICA do valor próprio λ_i e escrevemos $m_i = \text{m.a.}(\lambda_i)$. Além disso, denotamos por $\sigma(\mathbf{A})$ o conjunto de todos os valores próprios de $\mathbf{A}$, isto é,

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\};$$

a $\sigma(\mathbf{A})$ chamamos o ESPECTRO de $\mathbf{A}$.

TEOREMA 3.4 (Cayley-Hamilton). *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e seja $p_{\mathbf{A}}(x) \in \mathbb{C}[x]$ o polinómio característico de $\mathbf{A}$. Então, $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$; mais precisamente, se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ forem tais que $p_{\mathbf{A}}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, então*

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_n\mathbf{I}_n = \mathbf{0},$$

ou seja, $\mathbf{A}^n = -\big(a_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_n\mathbf{I}_n\big)$.

(*) Para outra descrição dos coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ veja o Apêndice 2.

(†) De facto, $p_{\mathbf{A}}(x)$ é o determinante de uma matriz quadrada que tem coeficientes em $\mathbb{C}[x]$.

Demonstração. Suponhamos que $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ em que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ são distintos dois-a-dois. Então,

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

onde $m_i = \text{m.a.}(\lambda_i)$ para $1 \leqslant i \leqslant r$; por conseguinte, temos

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}_n)^{m_1}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}_n)^{m_2} \cdots (\mathbf{A} - \lambda_r\mathbf{I}_n)^{m_r}.$$

Pela demonstração do Teorema 3.3, podemos escolher a matriz unitária $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de modo que $\mathbf{T} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ seja da forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \star & \cdots & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_r \end{bmatrix}$$

onde, para cada $1 \leqslant i \leqslant r$, a matriz $\mathbf{T}_i \in \mathbb{C}^{m_i\times m_i}$, com $m_i = \text{m.a.}(\lambda_i)$, é triangular superior com a forma

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_i & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}_n$, obtemos

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{T}) &= (\mathbf{T} - \lambda_1\mathbf{I}_n)^{m_1}(\mathbf{T} - \lambda_2\mathbf{I}_n)^{m_2} \cdots (\mathbf{T} - \lambda_r\mathbf{I}_n)^{m_r} \\ &= (\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} - \lambda_1\mathbf{I}_n)^{m_1}(\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} - \lambda_2\mathbf{I}_n)^{m_2} \cdots (\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} - \lambda_r\mathbf{I}_n)^{m_r} \\ &= \mathbf{U}^*\big((\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}_n)^{m_1}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}_n)^{m_2} \cdots (\mathbf{A} - \lambda_r\mathbf{I}_n)^{m_r}\big)\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^* p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})\mathbf{U}, \end{aligned}$$

de modo que basta provar que $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$. Ora, para cada $1 \leqslant i \leqslant r$, temos

$$\mathbf{T}_i - \lambda_i\mathbf{I}_{m_i} = \begin{bmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_i\times m_i}$$

e, portanto,

$$(\mathbf{T}_i - \lambda_i\mathbf{I}_{m_i})^{m_i} = \mathbf{0}.$$

Daqui, resulta que, para cada $1 \leqslant i \leqslant r$, a matriz $(\mathbf{T} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^{m_i} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é da forma

$$(\mathbf{T} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^{m_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{(i)} & \star & \star & \cdots & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2^{(i)} & \star & \cdots & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3^{(i)} & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_r^{(i)} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{T}_j^{(i)} \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}$, para $1 \leqslant j \leqslant r$, são matrizes triangulares superiores e $\mathbf{T}_{i,i}^{(i)} = \mathbf{0}$. Ora a matriz $(\mathbf{T} - \lambda_1 \mathbf{I}_n)^{m_1}(\mathbf{T} - \lambda_2 \mathbf{I}_n)^{m_2}$ tem o aspecto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \star & \star \\ \mathbf{0} & \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \star \end{bmatrix};$$

de facto,

$$(\mathbf{T} - \lambda_1 \mathbf{I}_n)^{m_1}(\mathbf{T} - \lambda_2 \mathbf{I}_n)^{m_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \star & \star & \cdots & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_3^{(1)}\mathbf{T}_3^{(2)} & \star & \cdots & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_4^{(1)}\mathbf{T}_4^{(2)} & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_r^{(1)}\mathbf{T}_r^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, obtemos

$$(\mathbf{T} - \lambda_1 \mathbf{I}_n)^{m_1}(\mathbf{T} - \lambda_2 \mathbf{I}_n)^{m_2}(\mathbf{T} - \lambda_3 \mathbf{I}_n)^{m_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \star & \cdots & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_4^{(1)}\mathbf{T}_4^{(2)}\mathbf{T}_4^{(3)} & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_r^{(1)}\mathbf{T}_r^{(2)}\mathbf{T}_r^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Efectuando sucessivamente a multiplicação das r matrizes, concluímos que

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{T}) = (\mathbf{T} - \lambda_1 \mathbf{I}_n)^{m_1}(\mathbf{T} - \lambda_2 \mathbf{I}_n)^{m_2} \cdots (\mathbf{T} - \lambda_r \mathbf{I}_n)^{m_r} = \mathbf{0}$$

e, portanto,

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{U} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{T}) \mathbf{U}^* = \mathbf{0}$$

(recorde que $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}_n$). $\square$