AULA 5

SUMÁRIO. Valores próprios de matrizes hermíticas. Teorema de Courant-Fischer.

▷ Dizemos que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é uma MATRIZ HERMÍTICA se $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$. Por outro lado, no caso real, dizemos que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma MATRIZ SIMÉTRICA se $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$; obviamente, qualquer matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é hermítica.

LEMA 5.1. *Para qualquer matriz hermítica $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tem-se $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{R}$ (ou seja, todos os valores próprios de $\mathbf{A}$ são reais).*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz hermítica e seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um valor próprio de $\mathbf{A}$. Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ um vector próprio de $\mathbf{A}$ associado a λ. Como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, temos $\mathbf{v}^*\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \neq 0$. Por outro lado, como $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, temos

$$\mathbf{v}^*\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}\mathbf{v})^* = (\lambda\mathbf{v})^* = \overline{\lambda}\mathbf{v}^*$$

e, portanto,

$$\mathbf{v}^*\mathbf{v}(\lambda - \overline{\lambda}) = \mathbf{v}^*(\lambda - \overline{\lambda})\mathbf{v} = \mathbf{v}^*(\lambda\mathbf{v}) - (\overline{\lambda}\mathbf{v}^*)\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\mathbf{A}^*\mathbf{v} = 0$$

(porque $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$). Sendo assim, concluímos que $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, logo $\overline{\lambda} = \lambda$ e, portanto, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

PROPOSIÇÃO 5.2. *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz hermítica, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ os valores próprios de $\mathbf{A}$ (com repetições) e suponhamos que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Então,*

$$\lambda_1 = \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v} \qquad e \qquad \lambda_n = \min_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ é uma matriz normal e, portanto, pelo Teorema 4.1, existe uma matriz unitátria $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, temos $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*$ (porque $\mathbf{U}$ é invertível e $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$), logo

$$\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*\mathbf{v} = (\mathbf{U}^*\mathbf{v})^*\mathbf{D}(\mathbf{U}^*\mathbf{v}), \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1};$$

além disso, temos

$$\|\mathbf{U}^*\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{U}^*\mathbf{v})^*(\mathbf{U}^*\mathbf{v}) = \mathbf{v}^*\mathbf{U}\mathbf{U}^*\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$$

e, portanto,

$$\|\mathbf{U}^*\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}.$$

Em particular, concluímos que a correspondência $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{U}^*\mathbf{v}$ permuta os elementos do conjunto $\{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1} \colon \|\mathbf{v}\| = 1\}$ (porque $\mathbf{U}^*$ é invertível) e, portanto,

$$\begin{aligned}\max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v} &= \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} (\mathbf{U}^*\mathbf{v})\mathbf{D}(\mathbf{U}^*\mathbf{v}) = \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{D}\mathbf{v} = \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i |v_i|^2 \\ &\leqslant \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \lambda_1 \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|^2 = \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \lambda_1 \|\mathbf{v}\|^2 = \lambda_1.\end{aligned}$$

Para a desigualdade contrária, escolhemos um vector próprio $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ associado a λ_1 tal que $\|\mathbf{u}\| = 1$, de modo que

$$\max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v} \geqslant \mathbf{u}^*\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \lambda_1\|\mathbf{u}\|^2 = \lambda_1.$$

De modo análogo, deduzimos que

$$\begin{aligned}\min_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v} &= \min_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{w}^*\mathbf{D}\mathbf{v} = \min_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i |v_i|^2 \\ &\geqslant \min_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \lambda_n \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|^2 = \min_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \lambda_n \|\mathbf{v}\|^2 = \lambda_n.\end{aligned}$$

Para a desigualdade contrária, escolhemos um vector próprio $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ associado a λ_n tal que $\|\mathbf{u}\| = 1$, de modo que

$$\min_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v} \leqslant \mathbf{u}^*\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_n\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \lambda_n\|\mathbf{u}\|^2 = \lambda_n.$$

A demonstração está completa. □

▷ Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz hermítica e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ os valores próprios de $\mathbf{A}$ (com repetições); como antes, supomos que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. As condições da proposição anterior podem ser re-escritas na forma

$$\lambda_1 = \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \qquad \text{e} \qquad \lambda_n = \min_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}.$$

Por conseguinte, temos

$$\lambda_n \leqslant \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \leqslant \lambda_1, \qquad \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1};$$

aos quocientes $\dfrac{\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}$, para $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ chamamos os QUOCIENTES DE RAYLEIGH de $\mathbf{A}$.

Teorema 5.3 (Courant-Fischer). *Seja* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *uma matriz hermítica com valores próprios* $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ *(com repetições). Então, para qualquer* $1 \leqslant i \leqslant n$*,*

$$\lambda_i = \max_{\substack{\mathcal{V}\leqslant\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \dim\mathcal{V}=i}} \min_{\substack{\mathbf{v}\in\mathcal{V}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v} = \min_{\substack{\mathcal{V}\leqslant\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \dim\mathcal{V}=n-i+1}} \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathcal{V}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v};$$

aqui, $\mathcal{V} \leqslant \mathbb{C}^{n\times 1}$ *significa que* $\mathcal{V}$ *é um subespaço vectorial de* $\mathbb{C}^{n\times 1}$*. Equivalentemente,*

$$\lambda_i = \max_{\substack{\mathcal{V}\leqslant\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \dim\mathcal{V}=i}} \min_{\substack{\mathbf{v}\in\mathcal{V}\\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} = \min_{\substack{\mathcal{V}\leqslant\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \dim\mathcal{V}=n-i+1}} \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathcal{V}\\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Demonstração. Provamos apenas a condição min-max (a condição max-min é análoga). Tal como na demonstração da proposição anterior, escolhemos uma matriz unitária $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

e justificamos (com o argumento análogo) que

$$\min_{\substack{\mathcal{V}\leqslant\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \dim\mathcal{V}=n-i+1}} \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathcal{V}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{A}\mathbf{v} = \min_{\substack{\mathcal{V}\leqslant\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \dim\mathcal{V}=n-i+1}} \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathcal{V}\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{v}^*\mathbf{D}\mathbf{v}.$$

Seja $\mathcal{V}$ um subespaço vectorial de $\mathbb{C}^{n\times 1}$ com $\dim\mathcal{V} = n - i + 1$ e consideremos o subconjunto

$$\mathcal{S}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \colon \|\mathbf{v}\| = 1\}.$$

Além disso, seja $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a base canónica de $\mathbb{C}^{n\times 1}$, seja $\mathcal{W} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i \rangle$ o subespaço de $\mathbb{C}^{n\times 1}$ gerado pelos vectores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i$ e seja

$$\mathcal{S}'_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{w} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \colon \|\mathbf{v}\| = 1\}.$$

Pelo teorema das dimensões, temos

$$n \geqslant \dim(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim\mathcal{V} + \dim\mathcal{W} - \dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = n + 1 - \dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}),$$

logo $\dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \geqslant 1$ e, portanto, $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \neq \{\mathbf{0}\}$.

Ora, um vector $\mathbf{w} \in \mathcal{S}'_{\mathcal{V}}$ está em $\mathcal{V}$ e, se $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, então

$$w_{i+1} = \cdots = w_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \|\mathbf{w}\| = \sum_{1\leqslant k\leqslant i} |\mathbf{w}_i|^2 = 1;$$

além disso, existe pelo menos um vector em $\mathcal{V}$ que verifica estas condições. Sendo assim, como $\lambda_k \geqslant \lambda_i$ para todo $1 \leqslant k \leqslant i$, deduzimos que

$$\mathbf{w}^*\mathbf{D}\mathbf{w} = \sum_{1\leqslant k\leqslant i} \lambda_k |w_k|^2 \geqslant \lambda_i \sum_{1\leqslant k\leqslant i} |w_k|^2 = \lambda_i \|\mathbf{w}\| = \lambda_i, \qquad \mathbf{w} \in \mathcal{S}'_{\mathcal{V}}.$$

Como $\mathcal{S}'_{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{V}}$, concluímos que

$$\max_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}_{\mathcal{V}}} \mathbf{v}^*\mathbf{D}\mathbf{v} \geqslant \max_{\mathbf{w}\in\mathcal{S}'_{\mathcal{V}}} \mathbf{w}^*\mathbf{D}\mathbf{w} \geqslant \lambda_i.$$

Como esta desigualdade é verdadeira para qualquer subespaço vectorial $\mathcal{V} \leqslant \mathbb{C}^{n\times 1}$ com $\dim\mathcal{V} = n-i+1$, segue-se que

$$\min_{\substack{\mathcal{V}\leqslant\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \dim\mathcal{V}=n-i+1}} \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}_{\mathcal{V}}} \mathbf{v}^*\mathbf{D}\mathbf{v} \geqslant \lambda_i.$$

Finalmente, considerando o subespaço $\mathcal{U} = \langle \mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$, que tem dimensão $n-i+1$ e é constituído por todos os vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}^{\mathtt{T}}$ tais que $u_1 = \cdots = u_{i-1} = 0$, obtemos

$$\mathbf{u}^*\mathbf{D}\mathbf{u} = \sum_{i\leqslant k\leqslant n} \lambda_k |u_k|^2 \leqslant \lambda_i \sum_{i\leqslant k\leqslant n} |u_k|^2 = \lambda_i \|\mathbf{u}\| = \lambda_i, \qquad \mathbf{u}\in\mathcal{S}_{\mathcal{U}}.$$

Deste modo, concluímos que

$$\min_{\substack{\mathcal{V}\leqslant\mathbb{C}^{n\times 1}\\ \dim\mathcal{V}=n-i+1}} \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{S}_{\mathcal{V}}} \mathbf{v}^*\mathbf{D}\mathbf{v} \leqslant \max_{\mathbf{u}\in\mathcal{S}_{\mathcal{U}}} \mathbf{u}^*\mathbf{D}\mathbf{u} \leqslant \lambda_i,$$

o que termina a demonstração. $\square$