AULA 9

Sumário. Raio espectral e convergência de sucessões de matrizes.

▷ Para qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definimos o raio espectral de $\mathbf{A}$ como sendo o número real

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})} |\lambda|;$$

recorde que $\sigma(\mathbf{A})$ é o espectro de $\mathbf{A}$ (isto é, o conjunto dos valores próprios de $\mathbf{A}$).

Teorema 9.1. *Seja* $\|\star\|$ *uma norma matricial em* $\mathbb{C}^{n\times n}$ *e seja* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Então,*

$$|\lambda| \leqslant \rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\|, \qquad \lambda \in \sigma(\mathbf{A}).$$

Além disso, se $\mathbf{A}$ *for invertível, então*

$$\frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|} \leqslant |\lambda| \leqslant \rho(\mathbf{A}), \qquad \lambda \in \sigma(\mathbf{A}).$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ e seja $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ um vector próprio associado a λ. Se $\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{v} & \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{v}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, então

$$\mathbf{AV} = \begin{bmatrix}\mathbf{Av} & \mathbf{Av} & \cdots & \mathbf{Av}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\mathbf{v} & \lambda\mathbf{v} & \cdots & \lambda\mathbf{v}\end{bmatrix} = \lambda\mathbf{V}$$

e, portanto,

$$\|\mathbf{AV}\| = \|\lambda\mathbf{V}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{V}\|.$$

Como $\|\mathbf{AV}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{V}\|$ (porque $\|\star\|$ é norma matricial), concluímos que $|\lambda| \leqslant \|\mathbf{A}\|$ (porque $\|\mathbf{V}\| \neq 0$, uma vez que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, logo $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$). Como $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ é arbitrário, concluímos também que $\rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\|$.

Se $\mathbf{A}$ for invertível e $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, então $\lambda^{-1} \in \sigma(\mathbf{A}^{-1})$, logo $|\lambda^{-1}| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|$, de onde resulta que $|\lambda| \geqslant 1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$. □

Proposição 9.2. *Seja* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Então, para qualquer* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, *existe uma norma matricial* $\|\star\|\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\| \leqslant \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon.$$

Demonstração. Pelo teorema da decomposição de Schur, existe uma matriz unitária $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{T}, \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & t_{2,3} & \cdots & t_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & t_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ são os valores próprios de $\mathbf{A}$. Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, seja

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 1/k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/k^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/k^n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Então,

$$\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & (1/k)t_{1,2} & (1/k^2)t_{1,3} & \cdots & (1/k^{n-1})t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & (1/k)t_{2,3} & \cdots & (1/k)^{n-2}t_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & (1/k)^{n-3}t_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, a sucessão $\big(|\lambda_i| + \sum_{i<j\leqslant n}(1/k^{j-1})|t_{i,j}|\big)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente com

$$\lim_{k\to\infty}\left(|\lambda_i| + \sum_{i<j\leqslant n}(1/k^{j-1})|t_{i,j}|\right) = |\lambda_i|.$$

Sendo assim, se $\|\star\|'_\infty$ denotar a norma matricial induzida pela norma $\|\star\|_\infty$ em $\mathbb{C}^{n\times 1}$, a sucessão $\big(\|\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k\|'_\infty\big)_{k\in\mathbb{N}}$ também é convergente com

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k\|'_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i| = \rho(\mathbf{A});$$

notemos que

$$\|\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k\|'_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(|\lambda_i| + \sum_{i<j\leqslant n}(1/k^{j-1})|t_{i,j}|\right)$$

(exercício). Por conseguinte, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geqslant k_0 \quad\Longrightarrow\quad \big|\|\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k\|'_\infty - \rho(\mathbf{A})\big| \leqslant \varepsilon.$$

Como $\|\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k\|'_\infty \leqslant \rho(\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k)$ (pelo teorema anterior) e como $\rho(\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k) = \rho(\mathbf{A})$ (porque $\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k$ e $\mathbf{A}$ têm os mesmos valores próprios), concluímos que

$$\|\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k\|'_\infty \leqslant \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon, \qquad k \geqslant k_0.$$

Posto isto, escolhemos $k \in \mathbb{N}$ com $k \geqslant k_0$ e definimos $\|\star\|\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ por

$$\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{U}^*\mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{D}_k\|, \qquad \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Como $\mathbf{UD}_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é uma matriz invertível, $\|\star\|$ é uma norma matricial (exercício); além disso, temos

$$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{D}_k\| = \|\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_k\| \leqslant \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon.$$

Como se queria: a desigualdade $\rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\|$ é válida para qualquer norma. □

Proposição 9.3. *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e seja $\|\star\|\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ uma norma matricial tal que $\|\mathbf{A}\| < 1$. Então, a sucessão $\left(\mathbf{A}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$(*).*

Demonstração. Como $\|\mathbf{A}\| < 1$, a sucessão (de números reais) $\left(\|\mathbf{A}\|^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e tem-se

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}\|^k = 0.$$

Por outro lado, como $\|\star\|$ é uma norma matricial, temos $0 \leqslant \|\mathbf{A}^k\| \leqslant \|\mathbf{A}\|^k$, logo $\left(\|\mathbf{A}^k\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente e tem-se

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\| = 0.$$

Como todas as normas vectoriais em $\mathbb{C}^{n\times n}$ são equivalentes, existe uma constante $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|\mathbf{A}^k\|_2 \leqslant \mu\|\mathbf{A}\|$ e, portanto, a sucessão $\left(\|\mathbf{A}^k\|_2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ também é convergente com

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|_2 = 0.$$

Em conclusão, a sucessão $\left(\mathbf{A}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$. □

Teorema 9.4. *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Então, a sucessão $\left(\mathbf{A}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$ será convergente com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ se e só se $\rho(\mathbf{A}) < 1$.*

Demonstração. Suponhamos que $\left(\mathbf{A}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ (isto é, que a sucessão $\left(\|\mathbf{A}^k\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente com $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|_2 = 0$). Seja $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = \rho(\mathbf{A})$ e seja $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ com $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Uma vez que a norma euclideana $\|\star\|_2\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ é uma norma matricial, deduzimos que

$$|\lambda^k| = |\lambda^k|\,\|\mathbf{v}\|_2 = \|\lambda^k\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{A}^k\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{A}^k\|_2\|\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{A}^k\|.$$

(*)Da Análise Matemática (em $\mathbb{R}^m$) resulta que uma sucessão $\left(\mathbf{A}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}^{n\times n}$ será convergente com

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

se e só se a sucessão de números reais $\left(\|\mathbf{A}_k - \mathbf{B}\|_2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ for convergente com

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}_k - \mathbf{B}\| = 0.$$

Equivalentemente, se $\mathbf{A}_k = \left[a_{i,j}^{(k)}\right]$, a sucessão $\left(\mathbf{A}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ será convergente com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{B}$ se e só se, para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant n$, a sucessão $\left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ for convergente com

$$\lim_{k\to\infty} a_{i,j}^{(k)} = b_{i,j}$$

(onde $\mathbf{B} = \left[b_{i,j}\right]$).

Como $\left(\|\mathbf{A}^k\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente com $\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{A}^k\| = 0$, a sucessão $\left(|\lambda|^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ também é convergente com $\lim_{k\to\infty}|\lambda|^k = 0$ e, portanto, tem de ser $|\lambda| < 1$, ou seja, $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

Reciprocamente, suponhamos que $\rho(\mathbf{A}) < 1$ e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho(\mathbf{A}) + \varepsilon < 1$. Pela Proposição 9.2, existe uma norma matricial tal que $\|\mathbf{A}\| \leqslant \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon < 1$, pelo que basta aplicar a proposição anterior. $\square$