AULA 16

Sumário. Fórmula canónica de Jordan: caso geral.

Teorema 16.1 (Forma canónica de Jordan). *Para qualquer* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, existe uma matriz invertível* $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que*

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{n_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

para alguns $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ *(não necessariamente todos distintos) e alguns* $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ *tais que e* $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$*.*

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ os valores próprios, distintos dois-a dois, de $\mathbf{A}$. Pelo teorema da decomposição de Schur (e pela sua demonstração), podemos garantir que existe uma matriz unitária $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{X}_{1,2} & \cdots & \mathbf{X}_{1,m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \cdots & \mathbf{X}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_m \end{bmatrix}$$

onde, para cada $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \star & \cdots & \star \\ \mathbf{0} & \lambda_i & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_i\times m_i}, \qquad m_i = \text{m.a.}(\lambda_i),$$

e onde $\mathbf{X}_{i,j} \in \mathbb{C}^{m_i\times m_j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Ponhamos

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}' \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \cdots & \mathbf{X}_{2,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-m_1)\times(n-m_1)} \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,2} & \cdots & \mathbf{X}_{1,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_1\times(n-m_1)}.$$

Pelo teorema de Sylvester, existe (uma e uma só) matriz $X \in \mathbb{C}^{(n-m_1)\times(n-m_1)}$ tal que $\mathbf{T}_1\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{T}' = -\mathbf{X}$, donde resulta que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m_1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & -\mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m_1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m_1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_1\mathbf{Y} + \mathbf{X} - \mathbf{Y}\mathbf{T}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}' \end{bmatrix}.$$

Prosseguindo recursivamente, encontramos uma matriz invertível $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{T}_m \end{bmatrix}.$$

Seja $1 \leqslant i \leqslant r$ qualquer. Temos $\mathbf{T}_i = \lambda_i \mathbf{I}_n + \widehat{\mathbf{T}}_i$ onde $\widehat{\mathbf{T}}_i \in \mathbb{C}^{m_i\times m_i}$ é uma matriz estritamente triangular superior e, pelo Teorema 14.2, existe uma matriz invertível $\mathbf{P}_i \in \mathbb{C}^{m_i\times m_i}$ tal que

$$\mathbf{P}_i^{-1}\widehat{\mathbf{T}}_i\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{m_{i,1}}(0) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{m_{i,r_i}}(0) \end{bmatrix}$$

onde $m_{i,1}, \ldots, m_{i,r_i} \in \mathbb{N}$ são tais que $m_{i,1} + \ldots + m_{i,r_i} = m_i$, de onde resulta que

$$\mathbf{P}_i^{-1}\mathbf{T}_i\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^{-1}(\lambda_i\mathbf{I}_{m_i} + \widehat{\mathbf{T}}_i)\mathbf{P}_i = \lambda_i\mathbf{I}_{m_i} + \mathbf{P}_i^{-1}\widehat{\mathbf{T}}_i\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{m_{i,1}}(\lambda_i) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{m_{i,r_i}}(\lambda_i) \end{bmatrix}.$$

O resultado segue-se considerando a matriz $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{P}_r \end{bmatrix}$. □

▷ A forma canónica de Jordan $\mathbf{J}$ de uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ contém muita informação sobre $\mathbf{A}$ (nomeadamente, no que se refere aos seus valores próprios). De facto, se

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{n_r}(\lambda_r) \end{bmatrix},$$

então:

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são os valores próprios de $\mathbf{A}$ (podendo haver repetições);

- para cada $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, a multiplicidade algébrica m.a.(λ) é dada por

$$\text{m.a.}(\lambda) = \#\{1 \leqslant i \leqslant r \colon \lambda_i = \lambda\},$$

  enquanto que a multiplicidade geométrica m.g.(λ) é dada por

$$\text{m.g.}(\lambda) = \#\{1 \leqslant i \leqslant r \colon \mathbf{J}_{n_i}(\lambda_i) = \mathbf{J}_{n_i}(\lambda)\}$$

  (isto é, m.g.(λ) é o numero de blocos de Jordan em $\mathbf{J}$ que estão associados a λ);

- o polinómio característico $p_{\mathbf{A}}(x)$ de $\mathbf{A}$ é dado por

$$p_{\mathbf{A}}(x) = p_{\mathbf{J}}(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}$$

  (podendo haver factores repetidos).

Teorema 16.2. *Qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é semalhante à sua transposta, isto é, existe uma matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.*

Demonstração. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e seja $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz invertível tal que $\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ está na forma canónica de Jordan, isto é,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{n_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \sigma(\mathbf{A})$ e $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ são tais que e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos a matriz

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m};$$

é fácil verificar que $\mathbf{K}_m^{-1} = \mathbf{K}_m^{\mathsf{T}} = \mathbf{K}_m$ e que

$$\mathbf{K}_m^{-1}\mathbf{J}_m(\lambda)\mathbf{K}_m = \mathbf{J}_m(\lambda)^{\mathsf{T}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Por conseguinte, tomando

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{n_r} \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{n_1}^{-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n_2}^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{n_r}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{n_r}(\lambda_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{n_r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{n_1}^{-1}\mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1)\mathbf{K}_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n_2}^{-1}\mathbf{J}_{n_2}(\lambda_2)\mathbf{K}_{n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{n_r}^{-1}\mathbf{J}_{n_r}(\lambda_r)\mathbf{K}_{n_r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1)^{\mathsf{T}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{n_2}(\lambda_2)^{\mathsf{T}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{n_r}(\lambda_r)^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{\mathsf{T}},$$

de modo que, para $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} &= (\mathbf{Q}^{\mathsf{T}})^{-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = (\mathbf{Q}^{-1})^{\mathsf{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{K}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \\ &= (\mathbf{Q}^{-1})^{\mathsf{T}}\mathbf{J}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = (\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}. \end{aligned}$$

Como se queria. $\square$