# AULA 20

Sumário. Sistemas de recorrências lineares, matrizes convergentes e matrizes somáveis.

▷ Uma relação de recorrência de ordem $m$ com coeficientes constantes é uma equação com a forma

$$x(k+1) = \alpha_m x(k) + \cdots + \alpha_1 x(k-m+1) + \alpha_0$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ e $x(0), x(1), \ldots, x(m-1)$ são constantes conhecidas e $x(m), x(m+1), x(m+2), \ldots$ são desconhecidas; quando $m = 1$, dizemos que a relação de recorrência é de primeira ordem.

Um sistema de relações de recorrência de primeira ordem (com coeficientes constantes) é uma equação com a forma

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(k)$$

em que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ e $\mathbf{b}(k) \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, para $k \in \mathbb{N}_0$, são conhecidos e $\mathbf{x}(k)$, para $k \in \mathbb{N}$, são desconhecidos; no caso em que $\mathbf{b}(k) = \mathbf{0}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$, dizemos que o sistema é homogéneo e, no caso contrário, dizemos que é não-homogéneo.

Em problemas concretos, temos dois propósitos naturais: determinar soluções $\mathbf{x}(k)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, ou determinar o limite $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}(k)$. Ora, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{b}(k-1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(k-2) + \mathbf{A}\mathbf{b}(k-2) + \mathbf{b}(k-1) = \cdots \\ &= \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \Big(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}(0) + \cdots + \mathbf{A}\mathbf{b}(k-2) + \mathbf{b}(k-1)\Big)\end{aligned}$$

e, portanto, a solução $\mathbf{x}(k)$ depende das potências $\mathbf{A}^j$ para $0 \leqslant j \leqslant k$, enquanto que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}(k)$ depende do limite $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$.

Já provámos o resultado seguinte; agora, apresentamos uma demonstração alternativa (usando a forma canónica de Jordan).

Teorema 20.1. *Para qualquer* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *tem-se* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ *se e só se* $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

Demonstração. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ tais que $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ e seja $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz invertível tal que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ está na forma canónica de Jordan.

Suponhamos que

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}(\lambda_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

onde, para cada $1 \leqslant i \leqslant r$, na matriz $\mathbf{J}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$, para $m_i = \text{m.a.}(\lambda_i)$, ocorrem todos os blocos de Jordan associados a $\lambda_i$. Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\lambda_1)^k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}(\lambda_2)^k & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}(\lambda_r)^k \end{bmatrix},$$

pelo que devemos analisar a potência $\mathbf{J}_m(\lambda)^k$ de qualquer bloco de Jordan $\mathbf{J}_m(\lambda)$. Ora, não é difícil justificar que

$$\mathbf{J}_m(\lambda)^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{m-1}\lambda^{k-m+1} \\ 0 & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{m-2}\lambda^{k-m+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \cdots & \binom{k}{m-3}\lambda^{k-m+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^k \end{bmatrix}$$

onde $\binom{k}{i} = 0$ sempre que $k < i$. Daqui, resulta que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{J}_m(\lambda)^k = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\lambda| < 1^{(*)}$$

e, portanto, para cada $1 \leqslant i \leqslant r$, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{J}(\lambda_i)^k = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\lambda_i| < 1.$$

Por conseguinte, como $\lim_{k\to\infty}(\mathbf{P}\mathbf{J}^k\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}(\lim_{k\to\infty}\mathbf{J}^k)\mathbf{P}^{-1}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0} \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \mathbf{J}(\lambda_i)^k = \mathbf{0}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \\ &\Longleftrightarrow \qquad |\lambda_i| < 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \\ &\Longleftrightarrow \qquad \rho(\mathbf{A}) = \max_{1\leqslant i\leqslant r} |\lambda_i| < 1, \end{aligned}$$

como se queria. □

---

(*) Notemos que

$$\binom{k}{i} \leqslant \frac{k^i}{i!} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\binom{k}{i}\lambda^{k-i}\right| \leqslant \frac{k^i}{i!}|\lambda|^{k-i}.$$

Teorema 20.2. *Para qualquer* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, o limite* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$ *existe se e só se alguma das condições seguintes for satisfeita:*

(a) $\rho(\mathbf{A}) < 1$ *e, nesta situação,* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$.

(b) $\rho(\mathbf{A}) = 1$*,* $1$ *é o único valor próprio* $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ *tal que* $|\lambda| = 1$ *e* $\mathrm{m.a.}(1) = \mathrm{m.g.}(1)$*; nesta situação,* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{G}_1$ *é o projector espectral de* $\mathbf{A}$ *associado a* $1$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, basta considerar o caso em que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k \neq \mathbf{0}$. Em primeiro lugar, determinemos as condições em que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$ existe. Usando a notação da demonstração do teorema anterior, isto acontecerá se e só se $\lim_{k\to\infty} \mathbf{J}_m(\lambda)^k$ existir para qualquer bloco de Jordan $\mathbf{J}_m(\lambda)$. Ora, como

$$\mathbf{J}_m(\lambda)^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{m-1}\lambda^{k-m+1} \\ 0 & \lambda^k & \cdots & \binom{k}{m-2}\lambda^{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^k \end{bmatrix},$$

o limite $\lim_{k\to\infty} \mathbf{J}_m(\lambda)^k$ existirá se e só se existirem os limites $\lim_{k\to\infty} \binom{k}{i}\lambda^{k-i}$ para qualquer $0 \leqslant i \leqslant m-1$ (usamos a convenção $\binom{k}{i} = 0$ quando $k < i$). Ora, $\lim_{k\to\infty} \lambda^k$ existirá se e só se $|\lambda| \leqslant 1$ e, portanto, $\lim_{k\to\infty} \mathbf{J}_m(\lambda)^k$ não existe sempre que $|\lambda| > 1$. Sendo assim, para que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$ exista é necessário que $|\lambda| \leqslant 1$ para qualquer $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, isto é, que $\rho(\mathbf{A}) \leqslant 1$. Pelo teorema anterior, basta analisar o caso em que $\rho(\mathbf{A}) = 1$, isto é, em que existe pelo menos um valor próprio $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ com $|\lambda| = 1$. Ora, se $\lambda \in \mathbb{C}$ for tal que $|\lambda| = 1$ e $\lambda \neq 1$, então $\lambda = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$ para algum $\theta in \mathbb{R}$ e, portanto,

$$\lambda^k = e^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta), \qquad k \in \mathbb{N},$$

de modo que a sucessão $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é divergente. Assim, ficamos reduzidos ao caso $\lambda = 1$, isto é, ao caso em que $1$ é o único valor próprio $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ com $|\lambda| = 1$. Nesta situação, temos

$$\mathbf{J}_m(1)^k = \begin{bmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{k}{m-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \binom{k}{m-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

de modo que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{J}_m(1)^k$ só pode existir quando $m = 1$ (se $m \geqslant 2$, então $\lim_{k\to\infty} \binom{k}{1} = \lim_{k\to\infty} k = \infty$). Por conseguinte, para que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$ exista é necessário que os blocos de Jordan de $\mathbf{A}$ associados a $1$ sejam todos de tipo $1 \times 1$, o que é equivalente a exigir que $\mathrm{m.a.}(1) = \mathrm{m.g.}(1)$.

Provámos que, se o limite $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$ existir, então as condições (a) ou (b) terão de ser satisfeitas; além disso, sabemos que, se (a) for satisfeita, então $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$. Sendo assim, suponhamos que a condição (b) é satisfeita. Nesta situação, sejam $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_r \in \mathbb{C}^{n\times n}$ os projectores espectrais de $\mathbf{A}$ associados aos valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, respectivamente; sem perda de generalidade, podemos admitir que $\lambda_1 = 1$ (de modo que $|\lambda_i| < 1$ para qualquer $2 \leqslant i \leqslant r$). Considerando a função $f(z) = z^k$ e pondo $k_i = \operatorname{ind}(\lambda_i)$ para $1 \leqslant i \leqslant r$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k = f(\mathbf{A}) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant r}\Bigg(\sum_{0\leqslant j\leqslant k_i-1}\frac{f^{(j)}(\lambda_i)}{j!}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)^j\Bigg)\mathbf{G}_i\\ &= \mathbf{G}_1 + \sum_{2\leqslant i\leqslant r}\Bigg(\sum_{0\leqslant j\leqslant k_i-1}\binom{k}{j}\lambda_i^{k-j}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)^j\Bigg)\mathbf{G}_i\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}^k = \mathbf{G}_1 + \sum_{2\leqslant i\leqslant r}\Bigg(\sum_{0\leqslant j\leqslant k_i-1}\Bigg(\lim_{k\to\infty}\binom{k}{j}\lambda_i^{k-j}\Bigg)(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)^j\Bigg)\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_1.$$

A demonstração está completa. □

▷ Para qualquer sucessão de números complexos $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, a SUCESSÃO DE CESÀRO que lhe está associada é a sucessão $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ das "médias"

$$\mu_k = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{k}, \qquad k \in \mathbb{N};$$

quando $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente, dizemos que a sucessão $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é SOMÁVEL À CESÀRO com soma $\alpha = \lim_{k\to\infty}\mu_k$.

Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diz-se CONVERGENTE se o limite $\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}^k$ existir e dizemos que $\mathbf{A}$ é SOMÁVEL À CESÀRO, com soma (ou LIMITE DE CESÀRO) $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, se existir

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{I}_n + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}}{k} = \mathbf{G}.$$

TEOREMA 20.3. *Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ será somável à Cesàro se e só se alguma das condições seguintes for satisfeita:*

(a) $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

(b) $\rho(\mathbf{A}) = 1$ *e* $\text{m.a.}(\lambda) = \text{m.g.}(\lambda)$ *para qualquer* $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ *tal que* $|\lambda| = 1$.

*Se $\mathbf{A}$ for somável à Cesàro e*

$$\mathbf{G} = \lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{I}_n + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}}{k},$$

*então $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$ se e só se $1 \in \sigma(\mathbf{A})$; nesta situação, $\mathbf{G}$ é o projector espectral de $\mathbf{A}$ associado a 1.*

DEMONSTRAÇÃO. Como na demonstração anterior, é fácil justificar que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ será somável à Cesàro se e só se qualquer bloco de Jordan de $\mathbf{A}$ for somável à Cesàro. Assim, seja $\mathbf{J} = \mathbf{J}_m(\lambda)$ um bloco de Jordan arbitrário. Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, as entradas da diagonal da matriz $\frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{J}+\cdots+\mathbf{J}^{k-1}}{k}$ são todas iguais a

$$\frac{1+\lambda+\cdots+\lambda^{k-1}}{k} = \frac{1-\lambda^k}{k(1-\lambda)} = \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{k}-\frac{\lambda^k}{k}\right);$$

quando $|\lambda| > 1$, esta sucessão não é limitada e, portanto, o limite $\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{J}+\cdots+\mathbf{J}^{k-1}}{k}$ não pode existir. Por conseguinte, para que $\mathbf{A}$ seja somável à Cesàro é necessário que $|\lambda| \leqslant 1$ para todo $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, ou seja, que $\rho(\mathbf{A}) \leqslant 1$.

Quando $\rho(\mathbf{A}) < 1$, temos $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ e, nesta situação, deixamos como exercício justificar que $\mathbf{A}$ é somável à Cesàro com

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}}{k} = \mathbf{0}.$$

Suponhamos que $\rho(\mathbf{A}) = 1$ e que existe $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ com $|\lambda| = 1$ e $\lambda \neq 1$. Suponhamos também que m.a.$(\lambda) \neq$ m.g.$(\lambda)$, de maneira que existe um bloco de Jordan $\mathbf{J} = \mathbf{J}_m(\lambda)$ com $m \geqslant 2$. Nesta situação, as entradas da "segunda diagonal" da matriz $\frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{J}+\cdots+\mathbf{J}^{k-1}}{k}$ são todas iguais a

$$\frac{1+2\lambda+\cdots+(k-1)\lambda^{k-2}}{k}$$

e não é difícil justificar que esta sucessão é divergente (usando uma justificação análoga à da demonstração do teorema anterior).

Sendo assim, no caso em que $\rho(\mathbf{A}) = 1$, para que $\mathbf{A}$ seja somável è Cesàro é necessário que m.a.$(\lambda) =$ m.g.$(\lambda)$ para qualquer $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ tal que $|\lambda| = 1$ e $\lambda \neq 1$. Suponhamos agora que $1 \in \sigma(\mathbf{A})$ e que m.a.$(1) \neq$ m.g.$(1)$. Nesta situação, existe um bloco de Jordan $\mathbf{J} = \mathbf{J}_m(1)$ com $m \geqslant 2$ e as entradas da "segunda diagonal" da matriz $\frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{J}+\cdots+\mathbf{J}^{k-1}}{k}$ são todas iguais a

$$\frac{1+2+\cdots+(k-1)}{k} = \frac{k-1}{2}.$$

Como $\lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{2} = \infty$, concluímos que $\mathbf{J}$ não é somável à Cesàro e, portanto, $\mathbf{A}$ também não é somável à Cesàro. Provámos assim que, para que $\mathbf{A}$ seja somável à Cesàro é necessário que alguma das condições (a) ou (b) aconteça.

Para terminar a demonstração, suponhamos que (b) acontece, com vista a provar que $\mathbf{A}$ é de facto somável à Cesàro. De facto, já provámos que, quando $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ é tal que $|\lambda| < 1$, qualquer bloco de Jordan $\mathbf{J}_m(\lambda)$ é somável à Cesàro e que, de facto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{J}_m(\lambda)+\cdots+\mathbf{J}_m(\lambda)^{k-1}}{k} = \mathbf{0}$$

(porque $\lim_{k\to\infty} \mathbf{J}_m(\lambda)^k = \mathbf{0}$). Resta considerar os blocos de Jordan correspondentes aos valores próprios $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ com $|\lambda| = 1$. Ora, pelo que vimos, todos estes blocos são de tipo $\mathbf{J}_1(\lambda) =$

$[\lambda] \in \mathbb{C}^{1\times 1}$. Por conseguinte, $\frac{\mathbf{I}_1+\mathbf{J}_1(\lambda)+\cdots+\mathbf{J}_1(\lambda)^{k-1}}{k}$ é a matriz de tipo $1\times 1$ com entrada

$$\frac{1+\lambda+\cdots+\lambda^{k-1}}{k} = \begin{cases} \frac{1-\lambda^k}{k(1-\lambda)}, & \text{se } \lambda \neq 1,\\ 1, & \text{se } \lambda = 1. \end{cases}$$

Sendo assim, temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1+\lambda+\cdots+\lambda^{k-1}}{k} = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda \neq 1,\\ 1, & \text{se } \lambda = 1, \end{cases}$$

de onde resulta que $\mathbf{A}$ é somável à Cesàro com

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}}{k} \neq \mathbf{0}$$

se e só se $1 \in \sigma(\mathbf{A})$.

Em conclusão, se $\mathbf{A}$ for somável à Cesàro, então a forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ tem a forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}' \end{bmatrix}$$

onde $m = \text{m.a.}(1)$ (permitimos $m = 0$) e onde $\mathbf{J}_0 \in \mathbb{C}^{(n-m)\times(n-m)}$ é uma matriz tal que $\rho(\mathbf{J}_0) \leqslant 1$ e $1 \notin \sigma(\mathbf{J}')$. Escolhendo uma matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}}{k} = \mathbf{P}\left(\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}}{k}\right)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

(porque $\mathbf{J}'$ é somável à Cesàro com $\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{J}_0+\cdots+\mathbf{J}_0^{k-1}}{k} = \mathbf{0}$). Pondo $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y}' \end{bmatrix}$ em que $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ e $\mathbf{X}' \in \mathbb{C}^{m\times n}$, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{I}_n+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}}{k} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{X}\mathbf{X}',$$

que é o projector espectral de $\mathbf{A}$ associado ao valor próprio 1. □