AULA 25

SUMÁRIO. Teorema de Perron-Frobenius para matrizes não-negativas irredutíveis (cont.). Matrizes primitivas.

TEOREMA 25.1 (Perron-Frobenius). *As propriedades seguintes são verdadeiras para qualquer matriz não-negativa irredutível* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*:*

(a) *O raio espectral* $\rho(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}_0^+$ *é estritamente positivo; além disso,* $\rho(\mathbf{A})$ *é um valor próprio de* $\mathbf{A}$ *com* $\text{m.a.}\big(\rho(\mathbf{A})\big) = 1$.

(b) *Existe um e um só vector* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *tal que*

$$\mathbf{p} > \mathbf{0}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{p} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{p} \qquad e \qquad \|\mathbf{p}\|_1 = 1$$

e, além disso, qualquer vector próprio $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *de* $\mathbf{A}$ *com* $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$ *é um múltiplo escalar positivo de* $\mathbf{p}$.

(c) *Se* $\mathcal{N} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \colon \mathbf{v} \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}$*, então*

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\mathbf{v}\in\mathcal{N}} \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ v_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{A}\mathbf{v})_i}{v_i}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Já sabemos que $\rho = \rho(\mathbf{A}) \in \sigma(\mathbf{A})$. Para provar que $\text{m.a.}(\rho) = 1$, consideramos a matriz $\mathbf{B} = (\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{n-1}$ que é positiva (pela proposição anterior). Para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1+\lambda)^{n-1} \in \sigma(\mathbf{B});$$

além disso,

$$\text{m.a.}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \text{m.a.}_{\mathbf{B}}\big((1+\lambda)^{n-1}, \qquad \lambda \in \sigma(\mathbf{A}).$$

Sendo assim, temos

$$\rho(\mathbf{B}) = \max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})} \left|(1+\lambda)^{n-1}\right| = \left(\max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})} |1+\lambda|\right)^{n-1} = (1+\rho)^{n-1}$$

e, portanto, $\text{m.a.}(\rho) = 1$ (caso contrário, $\text{m.a.}_{\mathbf{B}}\big(\rho(\mathbf{B})\big) > 1$, o que não acontece porque $\mathbf{B}$ é positiva).

Deixamos como exercício a justificação de que $\rho = \rho(\mathbf{A}) > 0$ (já sabemos que $\rho \geqslant 0$) e a demonstração de (b); (c) já foi provada antes. $\square$

$\triangleright$ Dizemos que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma MATRIZ PRIMITIVA se $\mathbf{A}$ for não-negativa e $\rho(\mathbf{A})$ for o único valor próprio $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ tal que $|\lambda| = \rho(\mathbf{A})$.

TEOREMA 25.2 (Critério de Frobenius). *Uma matriz não-negativa* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *será primitiva se e só se* $\mathbf{A}^m$ *for positiva para algum* $m \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não-negativa.

Suponhamos que $\mathbf{A}^m$ é positiva para algum $m \in \mathbb{N}$. Então, $\mathbf{A}$ é irredutível; no caso contrário, se $\mathbf{A}$ fosse redutível, existiria uma matriz de permutação $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{s\times s}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{(n-s)\times(n-s)}$ e $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{s\times(n-s)}$ para algum $s \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^m\mathbf{P} = (\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{P})^m = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^m & \mathbf{Z}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}^m \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{Z}' \in \mathbb{R}^{s\times(n-s)}$, o que não pode acontecer (porque $\mathbf{A}^m$ é positiva). Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \sigma(\mathbf{A})$ tais que

$$|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_r| = \rho(\mathbf{A}).$$

Para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, temos $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ se e só se $\lambda^m \in \sigma(\mathbf{A}^m)$, logo

$$\lambda_1^m = \cdots = \lambda_r^m = \rho(\mathbf{A}^m)$$

(pelo teorema de Perron). Usando a forma canónica de Jordan, verificamos que

$$\text{m.a.}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \text{m.a.}_{\mathbf{A}^m}(\lambda^m), \qquad \lambda \in \sigma(\mathbf{A}),$$

de modo que

$$\text{m.a.}_{\mathbf{A}}(\lambda_i) = \text{m.a.}_{\mathbf{A}^m}(\lambda_i) = 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

(de novo pelo teorema de Perron). Daqui, resulta que $r = 1$ e, portanto, $\text{m.a.}\big(\rho(\mathbf{A})\big) = 1$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbf{A}$ é primitiva. Pondo $\mathbf{B} = \rho(\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}$, temos $\rho(\mathbf{B}) = \rho(\mathbf{A})^{-1}\rho(\mathbf{A}) = 1$, logo a sucessão $\big(\mathbf{B}^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente com

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{B}^k = \mathbf{G}$$

onde $\mathbf{G}$ é o projector espectral de $\mathbf{B}$ associado a $1 \in \sigma(\mathbf{B})$ (pelo Teorema 20.2). Como $\mathbf{G} > \mathbf{0}$ (exercício), concluímos que $\mathbf{B}^m > \mathbf{0}$ para algum $m \in \mathbb{N}$, o que garante que $\mathbf{A}^m > \mathbf{0}$. $\square$