EXERCÍCIOS – FOLHA 4

4.1. Verifique se a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5+i & -2i \\ 2 & 4+2i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

é normal.

4.2. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz normal. Prove que, $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = 0$ para qualquer $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ e qualquer $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

4.3. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz normal e sejam $\lambda, \mu \in \sigma(\mathbf{A})$, $\lambda \neq \mu$. Prove que, $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = 0$ para qualquer $\mathbf{u} \in \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)$ e qualquer $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}_n)$.

4.4. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Prove que $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$ (isto é, $\mathbf{A}$ é uma MATRIZ SIMÉTRICA) se e só se $\mathbf{A}$ é normal e todos os seus valores próprios são reais.

4.5. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz tal que $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$ (isto é, $\mathbf{A}$ é uma MATRIZ ANTI-HERMÍTICA). Prove que todos os valores próprios de $\mathbf{A}$ são imaginários puros (isto é, múltiplos de i). Justifique que o mesmo acontece quando $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (neste caso, dizemos que $\mathbf{A}$ é uma MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA).

4.6. Seja $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz triangular (superior ou inferior). Prove que $\mathbf{T}$ será normal se e só se $\mathbf{T}$ for diagonal.

4.7. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ um valor próprio de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ um vector próprio de $\mathbf{A}$ associado a λ. Prove que:

(a) Se $\mathbf{A}$ for invertível, então λ^{-1} é um valor próprio de $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{v}$ um vector próprio de $\mathbf{A}^{-1}$ associado a λ^{-1}.

(b) Se $\mathbf{A}$ é normal, então $\overline{\lambda}$ é um valor próprio de $\mathbf{A}^*$ e $\mathbf{v}$ um vector próprio de $\mathbf{A}^*$ associado a $\overline{\lambda}$.

(c) Para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, λ^k é um valor próprio de $\mathbf{A}^k$ e $\mathbf{v}$ um vector próprio de $\mathbf{A}^k$ associado a λ^k.

(d) Para qualquer polinómio $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m$ com coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$, $p(\lambda)$ é um valor próprio de $p(\mathbf{A})$ e $\mathbf{v}$ um vector próprio de $p(\mathbf{A})$ associado a $p(\lambda)$; aqui, $p(\mathbf{A}) = \alpha_0\mathbf{I}_n + \alpha_1\mathbf{A} + \cdots + \alpha_m\mathbf{A}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

4.8. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{E} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrizes hermíticas com valores próprios $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ e $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \cdots \geqslant \varepsilon_n$, respectivamente. Prove que $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{E}$ é uma matriz hermítica cujos valores próprios $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$ satisfazem

$$\lambda_i + \varepsilon_1 \geqslant \mu_i \geqslant \lambda_i + \varepsilon_n, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

[*Sugestão.* Use o teorema de Courant-Fischer.]

4.9. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz hermítica com valores próprios $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Prove que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^* & \alpha \end{bmatrix}$$

é uma matriz hermítica cujos valores próprios $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n+1}$ satisfazem

$$\mu_i \geqslant \lambda_i \geqslant \mu_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

[*Sugestão.* Use o teorema de Courant-Fischer.]