EXERCÍCIOS – FOLHA 5

5.1. Seja $\mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n}$ uma matriz diagonalizável[†] e seja $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ onde $\lambda_i \neq \lambda_j$ sempre que $1 \leqslant i \neq j \leqslant r$. Para cada $1 \leqslant i \leqslant r$, seja $m_i = \text{m.a.}(\lambda_i)$ e seja $\mathbf{X}_i \in \Bbbk^{n\times m_i}$ uma matriz cujas colunas são uma base do espaço nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)$; deste modo, a matriz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_r\end{bmatrix} \in \Bbbk^{n\times n}$ é invertível e tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathbf{I}_{m_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \mathbf{I}_{m_r} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, sejam $\mathbf{Y}_i \in \Bbbk^{n\times m_i}$ para $1 \leqslant i \leqslant r$, tais que $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_r\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ e, para cada $1 \leqslant i \leqslant r$, definamos $\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}} \in \Bbbk^{n\times n}$. Prove que:

(a) $\mathbf{I}_n = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \cdots + \mathbf{G}_r$ e $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{G}_1 + \lambda_2 \mathbf{G}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{G}_r$.

(b) Para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant r$, tem-se

$$\mathbf{G}_i \mathbf{G}_j = \begin{cases} \mathbf{G}_i, & \text{se } i \neq j, \\ \mathbf{0}, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

(c) Para qualquer $1 \leqslant i \leqslant r$, tem-se

$$\mathcal{R}(\mathbf{G}_i) = \mathcal{R}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{N}(\mathbf{G}_i) = \mathcal{R}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n).$$

Às matrizes $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_r \in \Bbbk^{n\times n}$ chamamos os PROJECTORES ESPECTRAIS de $\mathbf{A}$ e dizemos que $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{G}_1 + \lambda_2 \mathbf{G}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{G}_r$ é a DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL de $\mathbf{A}$.

[†]Recorde (da Álgebra Linear) que $\mathbf{A} \in \Bbbk^{n\times n}$ é uma MATRIZ DIAGONALIZÁVEL se existir uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de $\Bbbk^{n\times 1}$ inteiramente constituída por vectores próprios de $\mathbf{A}$; nesta situação, se $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, então

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ são os valores próprios de $\mathbf{A}$ (com repetições).

5.2. Para cada uma das matrizes indicadas abaixo, decida se são diagonalizáveis (sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{C}$) e, para as que o forem, determine os respectivos projectores espectrais:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[As três últimas já foram consideradas no Exercício 3.4.]

5.3. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{k}^{n\times n}$ uma matriz diagonalizável (sobre um corpo arbitrário $\mathbb{k}$) e sejam $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_r \in \mathbb{k}^{n\times n}$ os projectores espectrais de $\mathbf{A}$. Usando a decomposição $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{G}_1 + \cdots + \lambda_r\mathbf{G}_r$ onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{k}$ são os valores próprios de $\mathbf{A}$ (distintos dois-a-dois), obtenha uma demonstração alternativa do teorema de Cayley-Hamilton (para matrizes diagonalizáveis), isto é, prove que $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ onde $p_{\mathbf{A}}(t) \in \mathbb{k}[t]$ é o polinómio característico de $\mathbf{A}$.

5.4. Verifique o teorema de Cayley-Hamilton para cada uma das matrizes diagonalizáveis do Exercício 5.2.

5.5. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \in \mathbb{k}^{n\times 1}$ um conjunto linearmente independente de vectores próprios de $\mathbf{A}$, associados a valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ (respectivamente), e seja $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n & \mathbf{X} \end{bmatrix} \in \mathbb{k}^{n\times n}$. Justifique que $\mathbf{P}$ é matriz invertível e prove que, se $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ onde $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{k}^{n\times 1}$, então

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}_i = \lambda_i\mathbf{w}_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

(isto é, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ são vectores próprios de $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ associados aos valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivamente.)

5.6. Explique a razão por que o argumento seguinte não serve de "prova" para o teorema de Cayley-Hamilton:

$$p_{\mathbf{A}}(t) = \det(t\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \implies p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(\mathbf{0}) = 0.$$

5.7. Considere as matrizes reais

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7/5 & 1/5 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Em cada um dos casos, prove que a sucessão $(\mathbf{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e calcule $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$ por dois processos distintos: usando uma matriz diagonal e usando os projectores espectrais de $\mathbf{A}$.

5.8. Considere duas regiões geográficas, Norte e Sul, e suponha que, em cada ano, 50% da população do Norte migra para Sul e que 25% da população do Sul migra para Norte. Admitindo que o processo se repete todos os anos (uniformemente), decida se a população do Norte tende a desaparecer ou se tende a estabilizar.

5.9. Para qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, defina $\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})} |\lambda|$; a $\rho(\mathbf{A})$ chamamos o RAIO ESPECTRAL da matriz $\mathbf{A}$. Prove que:

(a) $\rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\|$ para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. [*Sugestão.* Considere um vector próprio $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ com $\|\mathbf{v}\| = 1$ e a matriz $\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{v} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$; justifique que $\|\mathbf{AV}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{V}\|$.]

(b) Se $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ for diagonalizável, então a sucessão $(\mathbf{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ será convergente com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ se e só se $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

(c) Se $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ for diagonalizável, então a sucessão $\left(\|\mathbf{A}^k\|^{1/k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ será convergente e $\rho(\mathbf{A}) = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|^{1/k}$.