UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - Série 6
Camada limite e instabilidades

1. a) Aplicando o rotacional à equação de Euler, mostre que

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}.$$

b) Se o fluido for incompressível, interprete o resultado em termos da conservação das linhas de vorticidade.

c) Mostre que para a equação de Navier-Stokes se obtem o resultado:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$

d) Mostre que a vorticidade se difunde no referencial que se move com o fluido e discuta o significado do coeficiente de difusão.

2. Considere um fluido em escoamento de Poiseuille num tubo cilíndrico com eixo paralelo a $\hat{\mathbf{z}}$.

a) Mostre que no plano $y = 0$, $\omega_x = \omega_z = 0$ e

$$\omega_y = -\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{x}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

b) Mostre que ω muda de sinal nos planos $y = 0$ e $x = 0$.

c) Mostre que as linhas de vorticidade são anéis fechados, co-axiais com o tubo.

d) Determine a direcção de difusão da vorticidade e discuta a sua evolução temporal.

e) No estado estacionário, como pode a vorticiade ser conservada?

3. a) Usando a equação de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas, e considerando um escoamento em 2D através de uma placa fina, mostre em que condição as equações para a camada limite se reduzem à equação da continuidade e

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

onde x é a direção da corrente onde a placa está inserida e y é a direção normal à placa. Considere que a placa tem largura D na direção da corrente, espessura desprezável e comprimento $L \gg D$.

b) Usando análise dimensional, mostre que as equações para a camada limite são auto semelhantes.

4. Considere a equação diferencial para a função $u(y)$:

$$\epsilon u'' + u' = 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 2,$$

onde ϵ é uma constante positiva pequena.

a) Mostre que a solução é dada por:

$$u = y + \frac{1 - e^{-y/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}}$$

b) Discuta os limites desta solução para y muito pequeno (da ordem de ϵ) ou $y \gg \epsilon$ se u for a velocidade de um fluido na direção x.

c) Considere $\epsilon = 0$ diretamente na equação diferencial e determine a solução. Esta solução corresponde ao limite $y \gg \epsilon$ da alínea b? O que significa isto?

5. Calcule o perfil de velocidades e a força de arrasto de um fluido que escoa sobre uma placa de comprimento L com velocidade U (longe da placa). Parte da solução deve ser numérica, pois a equação diferencial resultante não tem solução analítica.

6. O perfil de velocidades numa camada limite laminar sobre uma placa de comprimento L e ângulo de incidência zero, pode ser aproximado por um polinómio de grau 4

$$\frac{u}{u_\infty} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + a_4\left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

Determine os coeficientes do polinómio.

7. Um fluido incompressível de viscosidade cinemática ν e densidade ρ encontra-se acima de uma fronteira sólida em $y = 0$. Longe desta fronteira, o campo de velocidade do fluido é dado por $\mathbf{u} = (Ex, -Ey, 0)$, onde E é uma constante positiva.
a) Explique por que o escoamento longe da fronteira sólida não pode ser a solução adjacente à fronteira.
b) A vorticidade desse escoamento constante é dada por $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega(x, y))$. Mostre que as equações de movimento podem ser escritas como

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\omega = \nu\nabla^2\omega \tag{1}$$

Interprete o significado físico dos termos nesta equação.
c) Calcule uma solução em termos de uma função de corrente, $\psi(x, y)$, da forma $\psi = Exg(y)$ e substituindo em 1, mostre que $g(y)$ satisfaz.

$$\frac{E}{\nu}(-g'g'' + gg''') = -g'''' \tag{2}$$

Escreva as condições de contorno para $g(y)$.
d) Substitua $g(y) = \delta G(y/\delta)$, onde δ deve ser determinado e mostre que G satisfaz

$$G''' + 1 = G'^2 - GG'' \tag{3}$$

O que a escala de comprimento δ representa?
e) A solução numérica da equação acima é $G''(0) = 1.23$ e $G(Y) \longrightarrow Y - 0.65$ quando $Y \longrightarrow \infty$. Calcule a tensão de cisalhamento exercida pelo escoamento na camada inferior.
f) Discuta o que acontece com esta solução quando $E < 0$.

8. A instabilidade de Saffman-Taylor pode formar-se quando um fluido de viscosidade η empurra outro fluido mais viscoso (viscosidade η') num canal de placas paralelas, com separação d. A velocidade de escoamento perpendicular à interface entre os dois fluidos é U e a tensão superficial é σ. Determine que o vetor de onda mínimo da perturbação na interface que causa a instabilidade é dado por

$$k_c^2 = \frac{12U(\eta - \eta')}{\sigma d^2}.$$

9. Use o código fornecido (code4-von-karman-street.py) para visualizar os vórtices de von Kárman num fluido que escoa sobre um cilindro. Compare, para um determinado número de Reynolds, a frequência de oscilação com a obtida na tabela 1 da referência: Xiaoyi He and Gary D. Doolen, Phys. Rev. E, **56**, 434 (1997). Deixe o código correr cerca de uma hora, pois a instabilidade demora algum tempo para se formar.

10. Derive e discuta as condições para a instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

11. Um fluido incompressível dentro de uma camada horizontal de um material poroso com fronteiras impermeáveis é aquecido por baixo, impondo uma temperatura $T = T_0 + \Delta T$ na superfície inferior ($z = 0$), enquanto a superfície superior ($z = h$) é mantida em $T = T_0$. O movimento dentro da camada é governado pelas seguintes equações,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu}(\nabla p + \rho g \hat{\mathbf{z}}), \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \tag{6}$$

Respectivamente, elas expressam a conservação de massa, o equilíbrio do momento dentro da camada porosa de permeabilidade K, onde a viscosidade dinâmica do fluido é μ, e o transporte de calor. O sistema de equações é completado pela especificação da equação de estado

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)). \tag{7}$$

a) Mostre que a solução na ausência de escoamento é dada por

$$\bar{T} = T_0 + \Delta T(1 - z/h), \quad \bar{\rho} = \rho_0(1 - \alpha \Delta T(1 - z/h)), \text{ and } \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g. \tag{8}$$

b) Considere a estabilidade linear desta solução, introduzindo perturbações nos campos de temperatura, densidade, velocidade e pressão. Mostre que a componente vertical do campo de velocidade de perturbação satisfaz.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2\right) \nabla^2 w' = \frac{K g \rho_0 \alpha \Delta T}{\mu h} \nabla_h^2 w', \tag{9}$$

onde $\Delta_h = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

c) Calcule uma solução de modo normal $w' = W(z) \exp(st + i(kx + ly))$ e derive a equação satisfeita por $W(z)$. Quais são as condições de fronteira em $W(z)$?

d) Mostre que para ocorrer a instabilidade

$$Ra = \frac{K g \rho_0 \alpha \Delta T h}{\mu \kappa} > 4\pi^2. \tag{10}$$