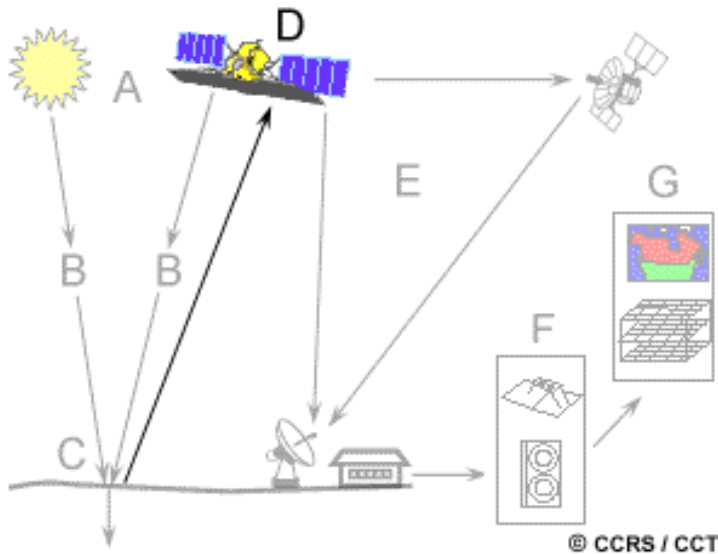




Capítulo 3 – Órbitas

- Órbitas e Swaths
- Generalidades sobre movimento
- As leis de Kepler
- Lei da atracção Universal
- Estudo do movimento do corpo
- Equação do movimento no plano
- Estudo do movimento na órbita
- Os parâmetros da órbita
- Perturbação da órbita
- Órbitas usadas para observação da Terra (Geoestacionárias e hélio-síncronas)
- Determinação dos parâmetros orbitais



Nos capítulos anteriores vimos:

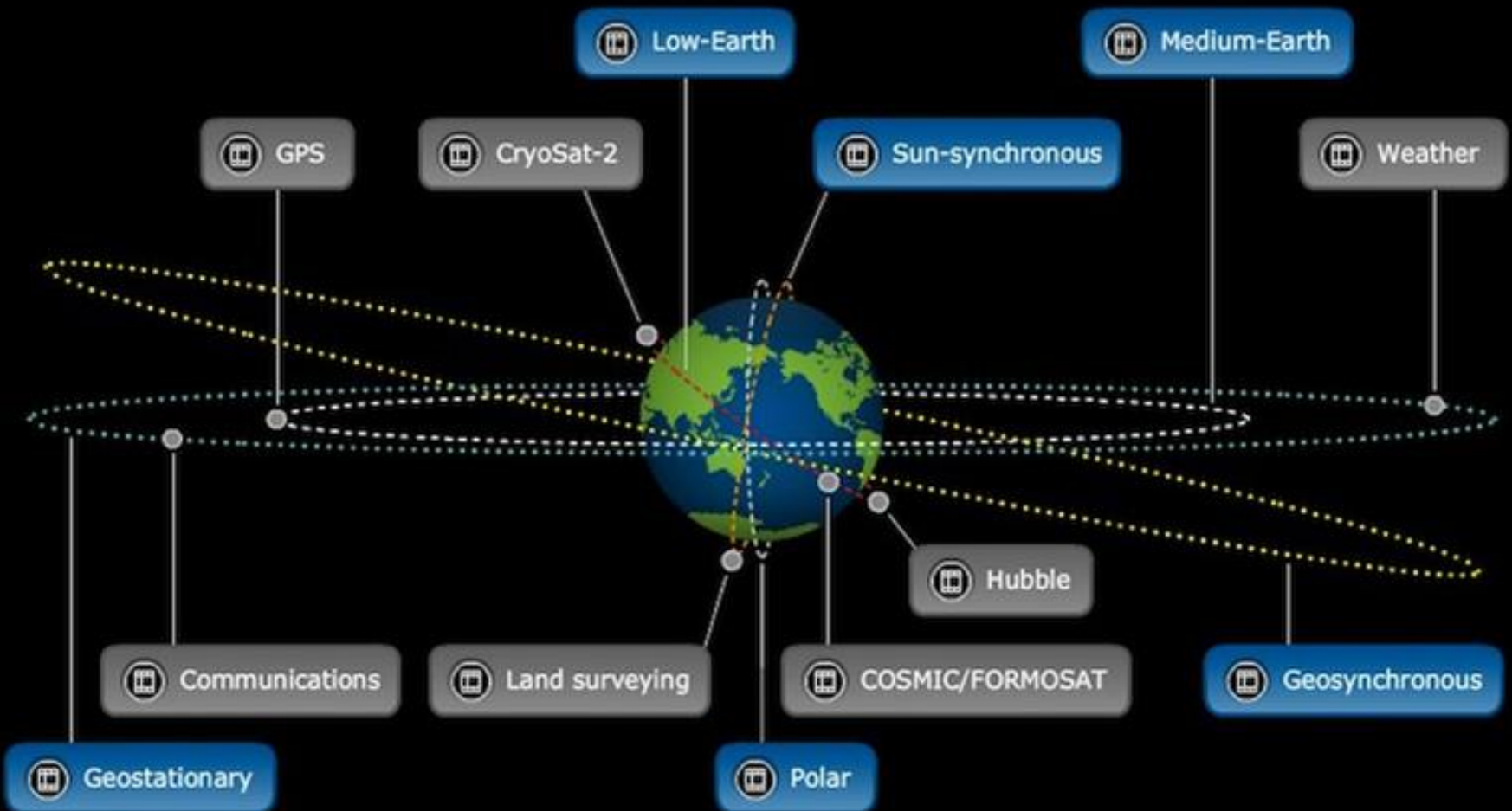
O processo da DR

Física da DR

Neste capítulo, vamos estudar as componentes relacionadas com:

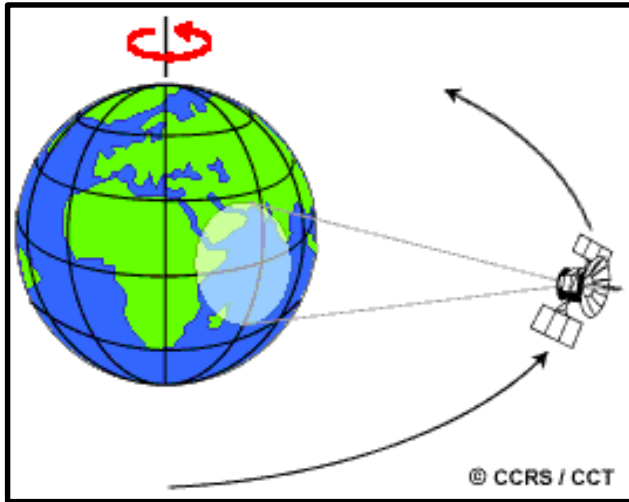
Órbitas dos satélites

SATELLITES AND ORBITS



© Copyright. 2013. University of Waikato. All Rights Reserved.

Órbitas e Swaths

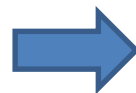


O percurso de um satélite no espaço é referido por **órbita**.

As órbitas são escolhidas em função dos objectivos da missão e pode variar a inclinação da órbita, a altitude da órbita, o período da órbita, etc..

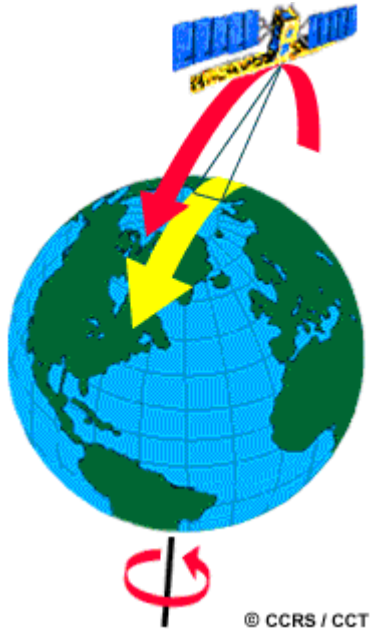
Os satélites a elevadas altitudes, com capacidade para ver a todo o instante a mesma porção da Terra têm **órbitas geoestacionárias**.

Estes satélites têm altitudes de cerca de 36000km e rodam à mesma velocidade da Terra de modo que estão parados relativamente à Terra.



Meteorologia e comunicações

Orbitas e Swaths

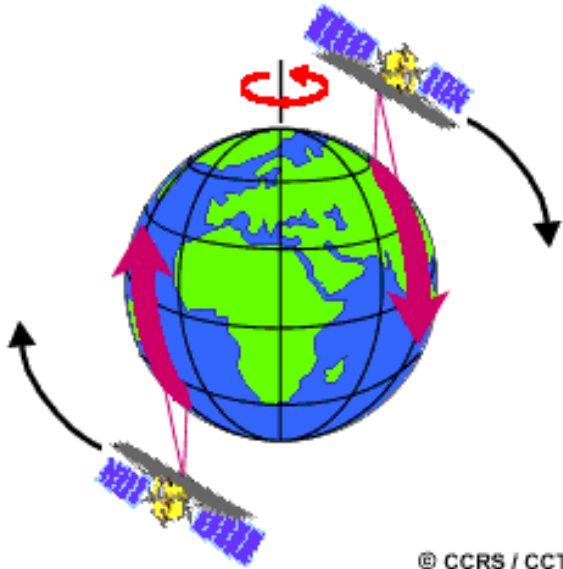


Outras plataformas são desenhadas para seguirem uma órbita norte-sul que em conjugação com a rotação da Terra oeste-este permite a cobertura da totalidade da Terra num determinado período de tempo.

Estas órbitas são **quase-polares** e muitas são **hélio-síncronas**. Neste caso a sua passagem num determinado local é efectuado sempre à mesma hora solar.

Em qualquer latitude, a posição do Sol no instante de passagem do satélite é sempre a mesma. Isto assegura condições de iluminação consistentes em anos sucessivos.

Orbitas e Swaths



As missões de observação da Terra são essencialmente quase polares, o que quer dizer que o satélite viaja para norte num lado da Terra e para sul no outro lado da Terra.

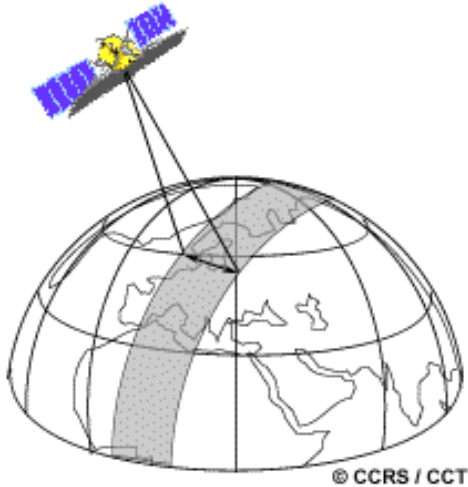
A estes percursos designamos por:

Passagem ascendente (para norte)

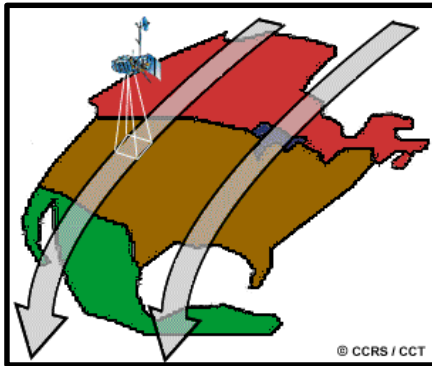
Passagem descendente (para sul)

Se a órbita for hélio-síncrona a passagem descendente é feita de dia e a passagem ascendente é feita de noite.

Orbitas e Swaths



No seu percurso em torno da Terra o satélite vê uma certa porção da Terra. A área coberta pelo sensor é referida por: **SWATH.**



Com início num qualquer traço, um ciclo orbital é concluído quando o satélite passa exactamente no mesmo traço, no mesmo ponto nadiral.

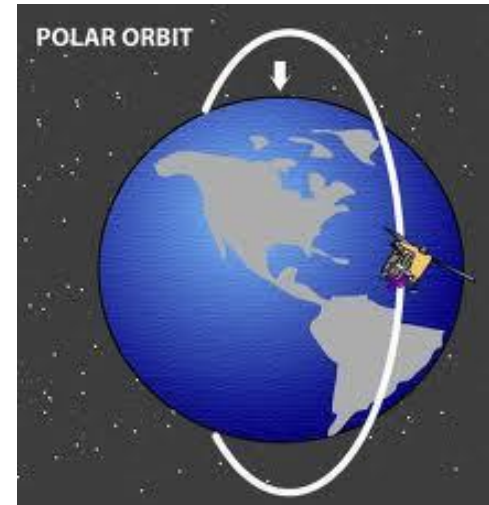
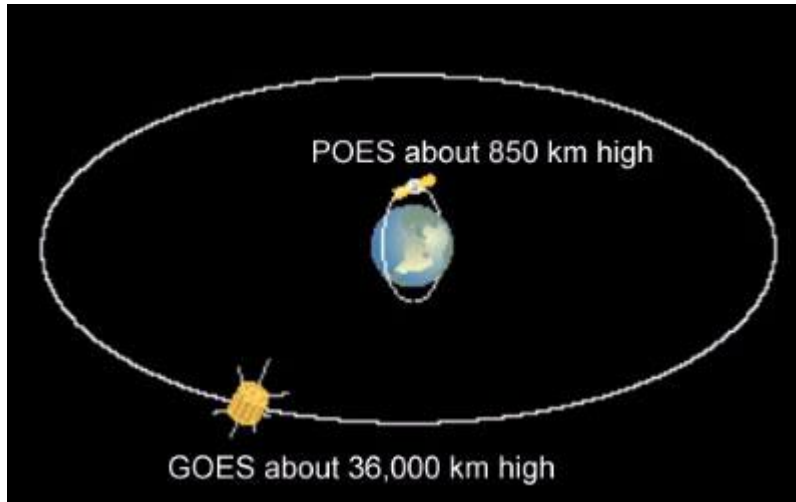
O ciclo orbital não é o mesmo que período de revisita por causa das visadas off-nadir.

Generalidade sobre o movimento

O estudo do movimento de um corpo rígido pode ser feito separando o movimento em torno do centro de massa desse corpo e o movimento do centro de massa.



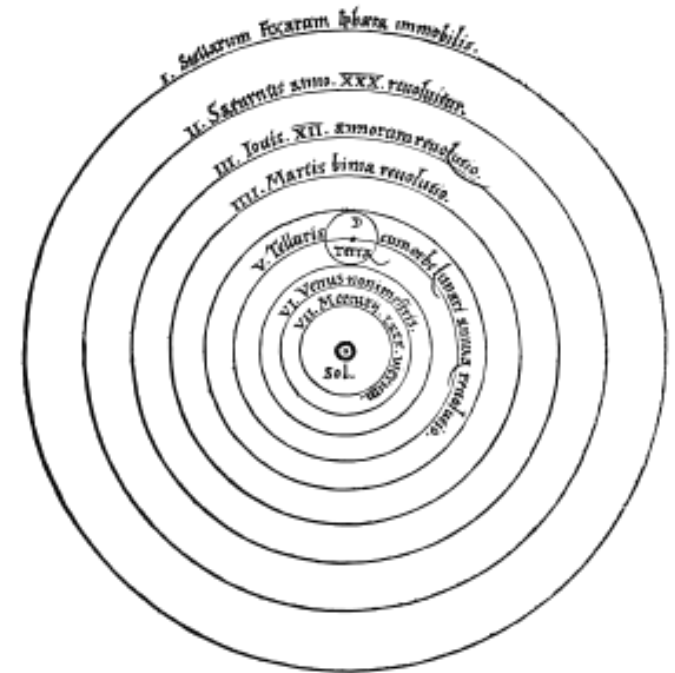
A trajectória percorrida pelo centro de massa é a **órbita** do satélite



Copernicus (1473-1543)

A publicação do livro *De revolutionibus orbium coelestium* (*On the Revolutions of the Celestial Spheres*), antes da sua morte em 1543, é um dos maiores eventos da história da ciência

O seu grande sucessor foi Tycho Brahe (embora não pensasse que a Terra orbitasse o Sol), seguido de Johannes Kepler que trabalhou como assistente de Tycho em Praga.



As Leis de Kepler

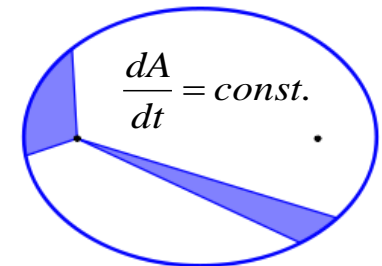
Johannes Kepler (1571-1630) com base nas observações de Tycho Brahe (1546-1601) formulou as seguintes 3 leis:

1ª lei

A trajectória de cada planeta, relativamente ao Sol, existe num plano fixo que contém o Sol. Mais concretamente, é uma elipse, fixa no espaço, e da qual o Sol ocupa um dos focos.

2ª lei

O vector que liga o Sol a cada planeta varre áreas iguais em tempos iguais



3ª lei

Os quadrados dos períodos orbitais dos diversos planetas são proporcionais aos cubos das respectivas distâncias médias ao Sol.

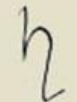
As Leis de Kepler

When we compare the orbits
of the planets...

Planet	T(yrs)	R(au)	T^2	R^3
Venus	0.62	0.72	0.38	0.37
Earth	1.00	1.00	1.00	1.00
Mars	1.88	1.52	3.53	3.51
Jupiter	11.86	5.20	141	141

We find that T^2 and R^3 are essentially equal.

Vénus



Saturno

Lei da atracção Universal

Foi com base nestas 3 leis de enunciado tão simples que Isaac Newton (1642-1727) conseguiu deduzir o principio da atracção Universal.

“Matéria atrai matéria na razão directa das massas e inversa do quadrado da distância”

A sua formulação matemática é:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad X = -G \frac{(x - \xi)}{r^3} //$$

Em que :

G é a constante de gravitação universal tem as dimensões $L^3 M^{-1} T^{-2}$ e tem o valor de $6.67300 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ($GM = 3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ de acordo com o GRS80). m_1 é a massa do corpo atraído e m_2 a massa do corpo atraente e r a distância entre os dois centros de massa.

Estudo do movimento do corpo

Como o movimento é plano (de acordo com a 1ª lei de Kepler) podemos reduzir o problema a esse plano, fazendo-o coincidir com o plano xoy, donde resulta a equação do movimento:

$$\| m_1 \ddot{x}_1 = -G \frac{m_1(m_1 + m_2)}{r^3} x_1 \quad F = m \ddot{x}$$

Movimento do ponto P1 em torno de P2 (ponto P1 atraído por P2)

E as duas equações do movimento no plano:

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -G \frac{m\mu}{r^3} x \\ m \ddot{y} = -G \frac{m\mu}{r^3} y \end{cases}$$

Em que:

$$\mu = m_1 + m_2$$

$$m = m_1$$

Estudo do movimento do corpo

Como o movimento é plano ($z=0$), dos integrais das áreas subsiste apenas:

$$m(x\dot{y} - \dot{x}y) = c \quad \text{Eq. 1}$$

Integrais das áreas

$$\sum_k m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = c_7$$

$$\sum_k m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) = c_8$$

$$\sum_k m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = c_9$$

Integrais dos centros de massa

$$\sum_i m_i \dot{x}_i = c_1$$

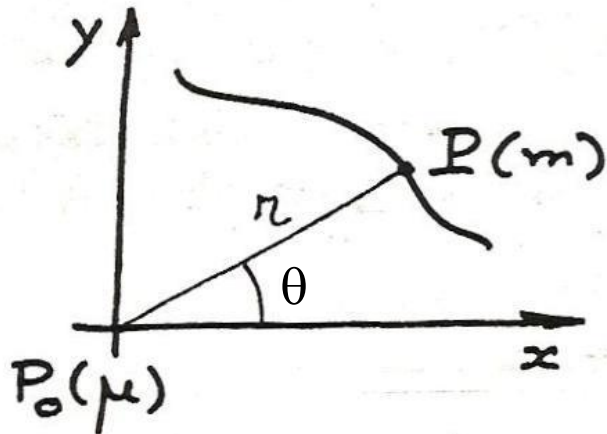
$$\sum_i m_i x_i = c_1 t + c_4$$

Integral de Energia

$$T + U = h = C_{10}$$

Equação do movimento no plano

Consideremos o plano orbital e tomemos um sistema de coordenadas polares (r, θ) .



De: $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ vem que:

$$\dot{\theta} = \frac{\frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2}$$

E usando a equação 1, obtemos: $m r^2 \dot{\theta} = c$

ou

$$r^2 \dot{\theta} = c$$

Uma das equações do movimento.
c é a constante das áreas

Equação do movimento no plano

Da fórmula de Binet sabemos que:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{G\mu}{c^2} \quad \text{em que} \quad u = \frac{1}{r}$$

equação diferencial de 2ª ordem linear e com segundo membro constante cuja equação característica admite duas raízes $\pm i$, donde a solução:

$$u = A \cos(\theta + \theta_0) + \frac{G\mu}{c^2} \quad \text{ou em } r$$

Segunda equação do movimento

A e θ_0 são constantes de integração



$$r = \frac{\frac{c^2}{G\mu}}{1 + \frac{Ac^2}{G\mu} \cos(\theta + \theta_0)}$$

Equação do movimento no plano

$$r = \frac{\frac{c^2}{G\mu}}{1 + \frac{Ac^2}{G\mu} \cos(\theta + \theta_0)}$$

Comparação com a equação geral de uma cónica em coordenadas polares, referida a um dos seus focos



$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varpi}$$

Onde **p** é um parâmetro, **e** a excentricidade e ϖ a anomalia verdadeira.

Verificamos que a trajectória do movimento é assim uma cónica de que o ponto atractivo ocupa um dos focos e em que o parâmetro, excentricidade e anomalia são dados por:

$$p = \frac{c^2}{G\mu}$$

(Equação 2)

$$e = \frac{Ac^2}{G\mu}$$

$$\varpi = \theta + \theta_0$$

Equação do movimento no plano

Usualmente não se usa o parâmetro p , mas outras grandezas, respectivamente o semieixo maior a , do movimento elíptico, a distancia periástrica q , no caso parabólico, e o semieixo transversal a no caso hiperbólico.

Neste caso:

$$p = a(1 - e^2)$$

$$p = 2q$$

$$p = a(e^2 - 1)$$

E nesse caso, usando a equação 2, obtemos

$$(e^2 - 1) = \frac{2p}{G\mu m} h$$


$$a = -\frac{G\mu m}{2h}$$

(Equação 4)

$$q = \frac{c^2}{2G\mu}$$

$$a = \frac{G\mu m}{2h}$$

Equação do movimento no plano

Sabendo que $\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \Delta\theta}{2} = \frac{c}{2}$  $c = 2 \frac{dA}{dt}$

Por integração, obtemos: $c(t - t_0) = 2A$

Que nos dá a área descrita num dado intervalo de tempo conhecida a constante das áreas.

Se for T o período do movimento : $cT = 2(ab\pi)$

Mas como: $c = \sqrt{G\mu p} = \sqrt{G\mu a(1 - e^2)}$
(Equação 2)

Então: $T = \frac{2\pi ab}{c} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{G\mu a(1 - e^2)}} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G\mu}}$

O período depende apenas de **a**

Equação do movimento no plano

Reescrito de outra forma: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\mu}{4\pi^2}$ 3ª lei de Kepler

(A razão entre o cubo do semieixo maior e o quadrado do período de revolução é constante em todos os planetas)

Isto só é verdade se μ for constante. No caso de dois corpos o valor de μ é a soma da massa dos dois corpos.

No caso da Terra e de um satélite a expressão anterior fica:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_T + m_S)}{4\pi^2}$$

Estudo da função $v = v(r)$

Se usarmos a expressão que nos diz que a energia total do movimento elíptico é

$$\Rightarrow h = -\frac{G\mu m}{2a_1}$$

$$\text{Então } T + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m\mu}{r} = -\frac{G\mu m}{2a_1}$$

Donde:

$$v^2 = G\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} \right)$$

Importante relação que nos dá a velocidade conhecido o raio vector \mathbf{r} e conhecido \mathbf{a} .

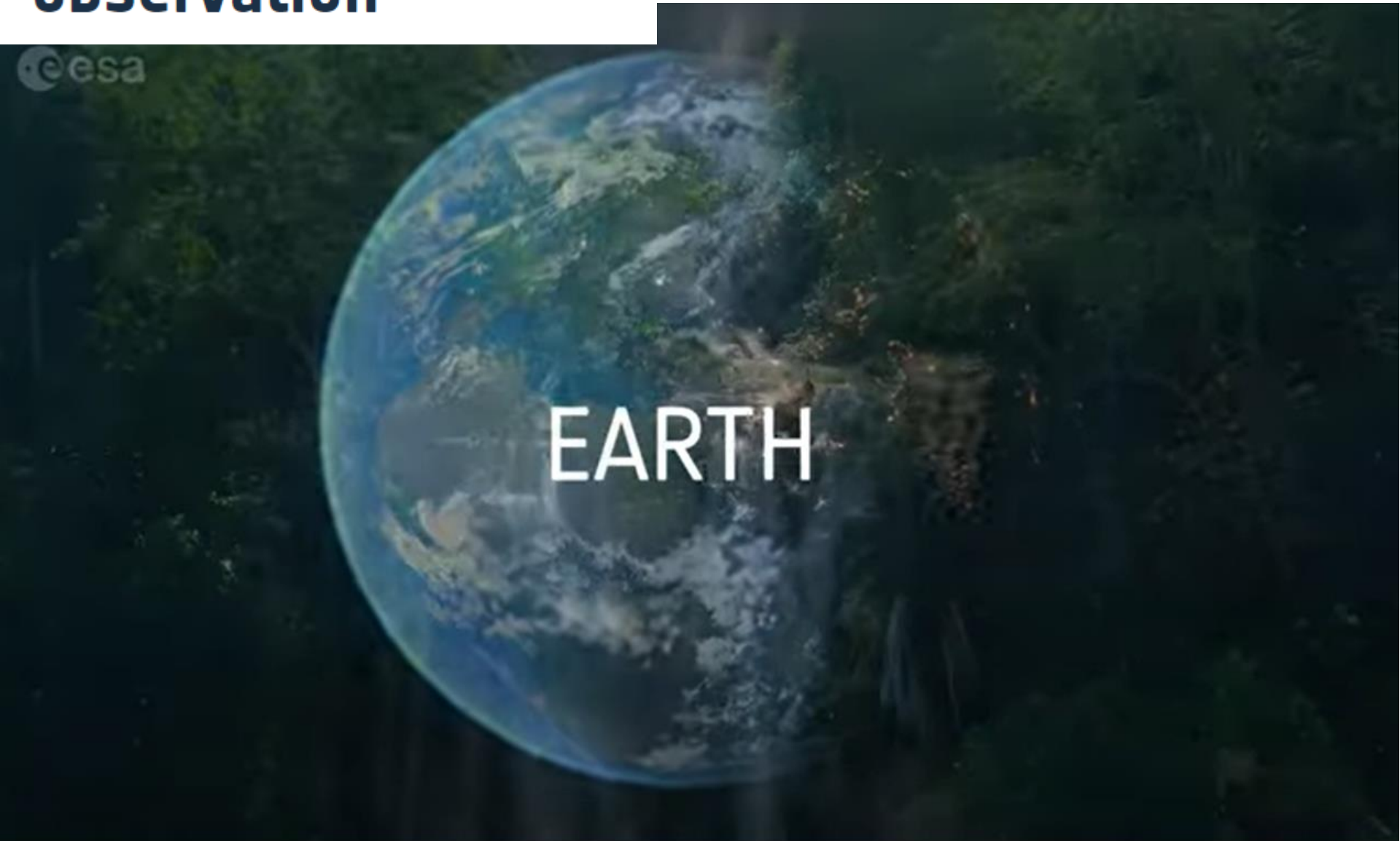
Caso elíptico	$a_1 = a$	$v^2 < 2G\mu/r$
---------------	-----------	-----------------

Caso parabólico	$a_1 = \infty$	$v^2 = 2G\mu/r$
-----------------	----------------	-----------------

Caso hiperbólico	$a_1 = -a$	$v^2 > 2G\mu/r$
------------------	------------	-----------------

The power of Earth observation

https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth



Sintese

Como as órbitas são planas
(1ª lei de Kepler)

$$m(x\dot{y} - \dot{x}y) = c$$

Do integral das áreas deduz-se:
(2ª lei de Kepler)

$$r^2 \dot{\theta} = c$$

$$r = \frac{\frac{c^2}{G\mu}}{1 + \frac{Ac^2}{G\mu} \cos(\theta + \theta_0)}$$

$$a = -\frac{G\mu m}{2h} \quad e^2 - 1 = \frac{2p}{G\mu m} h$$

(3ª lei de Kepler)

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\mu}{4\pi^2}$$

$$v^2 = G\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} \right)$$

Exemplos de aplicação

Se quisermos efectuar o lançamento de um satélite supondo que esse lançamento se efectuaria por um impulso único e que podemos supor a massa da Terra concentrada no centro, desprezando a resistência do ar, etc., para que o satélite não torne a cair na Terra é necessário que a velocidade de lançamento seja pelo menos igual à velocidade parabólica correspondente ao raio R

$$v = \sqrt{\frac{2G(M_T + m)}{R}} \approx 11.2 \text{ km s}^{-1}$$

Se desejarmos que o objecto não só escape da atracção terrestre mas saia do próprio sistema solar, teremos que o lançar com uma velocidade parabólica relativa ao Sol e à posição da Terra nesse instante e a velocidade seria 42 km/s

Exemplos de aplicação

Porque a atmosfera anda “agarrada” à Terra?

A conservação da atmosfera faz-se porque a velocidade de escape é consideravelmente maior (11.2 km/s) que a velocidade média das moléculas gasosas da atmosfera.

A velocidade das partículas gasosas pode ser calculada pela expressão:

$$v^2 = 3\Theta T / m$$

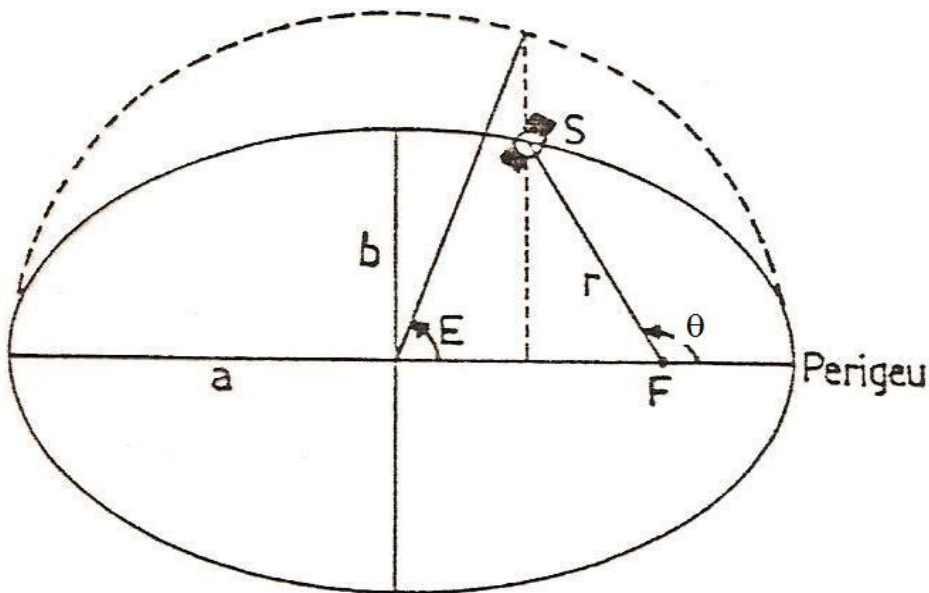
Sendo m a massa da molécula, T a temperatura absoluta e Θ a constante de Boltzam.

Ora o gás mais leve e conseqüentemente de maior velocidade, o hidrogénio, tem a velocidade de 2 km/s muito mais baixa que os 11 km/s relativos à Terra.

Estudo do movimento na órbita

Estudemos agora o movimento dum corpo sobre a sua órbita utilizando como ponto de partida o integral das áreas:

$$r^2 \dot{\theta} = c$$



Onde θ é a anomalia verdadeira e $r=r(\theta)$ uma função conhecida dessa anomalia.

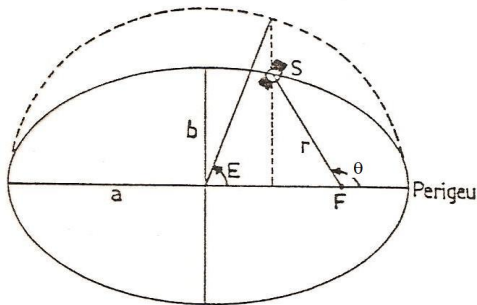
E = anomalia excêntrica.
(ângulo semelhante à latitude reduzida.)

Estudo do movimento na órbita

A expressão de r e θ em função da anomalia excêntrica é:

$$r = a(1 - e \cos E) \qquad \text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{tg} \left(\frac{E}{2} \right)$$

Destas deduz-se a equação de Kepler:



$$E - e \sin E = n(t - \tau)$$

$\begin{matrix} s^{-1} & s \end{matrix}$

τ - Instante zero

Em que n é o **movimento médio** dado por:

$$n = \sqrt{\frac{G\mu}{a^3}}$$

$$\text{sqrt}(m^3 s^{-2} / m^3) = s^{-1}$$

Estudo do movimento na órbita

No intervalo de tempo $t-t_0$, $n(t-t_0)$ tem as dimensões de um ângulo.



Seria o ângulo percorrido num intervalo de tempo pelo raio vector que rodasse com velocidade angular constante n .

Por isso designa-se por **anomalia média** $M = n(t-t_0)$, e a equação de Kepler é apresentada como:

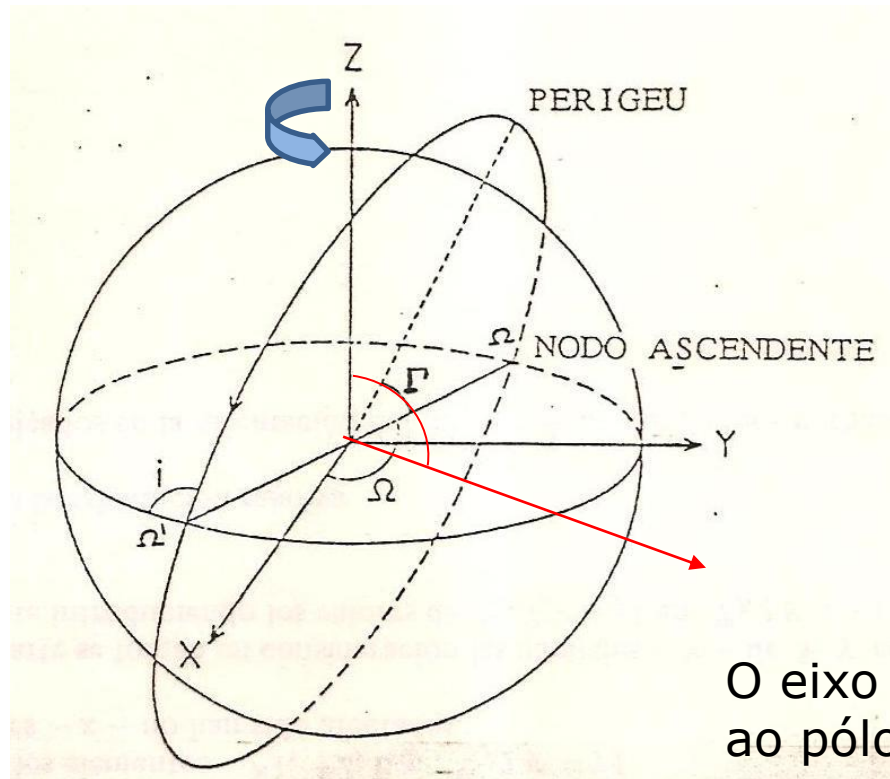
$$E - e \sin E = M$$

M : varia de 0 a 2π 

quando t varia de t_0 a t_0+T sendo T o período do movimento e t_0 o tempo de passagem no perigeu

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

Os parâmetros da órbita



Esfera centrada no centro de massa da Terra e com origem neste um referencial cartesiano tri-ortogonal.

O plano XoY é o equador numa dada data e orientasse o eixo X para o ponto vernal médio nessa data.

O eixo dos Z é dirigido em direcção ao pólo verdadeiro (CIO).

O plano da órbita intersecta o equador segundo uma linha chamada linha dos nodos $\Omega\Omega'$. Estes dois pontos Ω e Ω' , chamaremos nodo ascendente àquele no qual o satélite passa do hemisfério austral para o boreal.

Os parâmetros da órbita

A posição da órbita no espaço é definida por cinco parâmetros orbitais (a , e , i , Γ , Ω).

Semieixo-maior (a): comprimento do semi-eixo da elipse descrita pelo satélite. Recordemos que na terceira lei de Kepler o semi-eixo maior a é função do período T .

Excentricidade (e): para uma órbita elíptica o valor da excentricidade está entre 0 e 1. No perigeu a distância do satélite à Terra é:

$$R_p = a(1-e)$$

e ao apogeu

$$R_a = a(1+e)$$

Os parâmetros da órbita

Inclinação (i): Inclinação (i): é o ângulo entre a normal à órbita (orientada de maneira a ver dessa normal, o satélite rodar no sentido directo) com a linha dos polos orientada de sul para norte. A inclinação pode tomar os valores no intervalo $[0, \pi]$. Quando $0 < i < \pi / 2$ diz-se que **o movimento é directo**, e se $\pi / 2 < i < \pi$ **é retrógrado**.

Ascensão recta do nodo ascendente (Ω): é o ângulo contado positivamente no sentido directo entre a direcção do ponto vernal (oX) e o nodo ascendente da órbita, podendo ter valores entre $[0, \pi]$.

Argumento do perigeu (Γ): é o ângulo contado positivamente de 0° a 360° no sentido do movimento do satélite, entre a direcção do nodo ascendente e a direcção do perigeu.

Os parâmetros da órbita

Anomalia verdadeira (θ) : é o ângulo contado positivamente no sentido do movimento do satélite entre a direcção do perigeu e a direcção do satélite.

Anomalia Excêntrica (E): é o argumento da imagem do satélite na transformação afim da elipse no seu círculo principal.

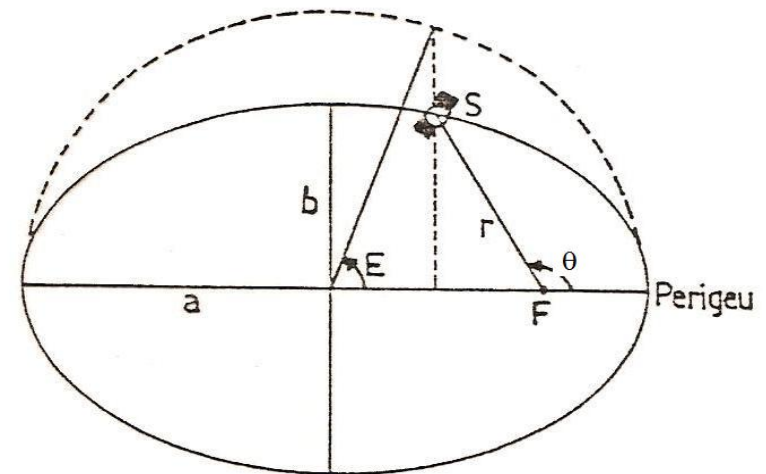
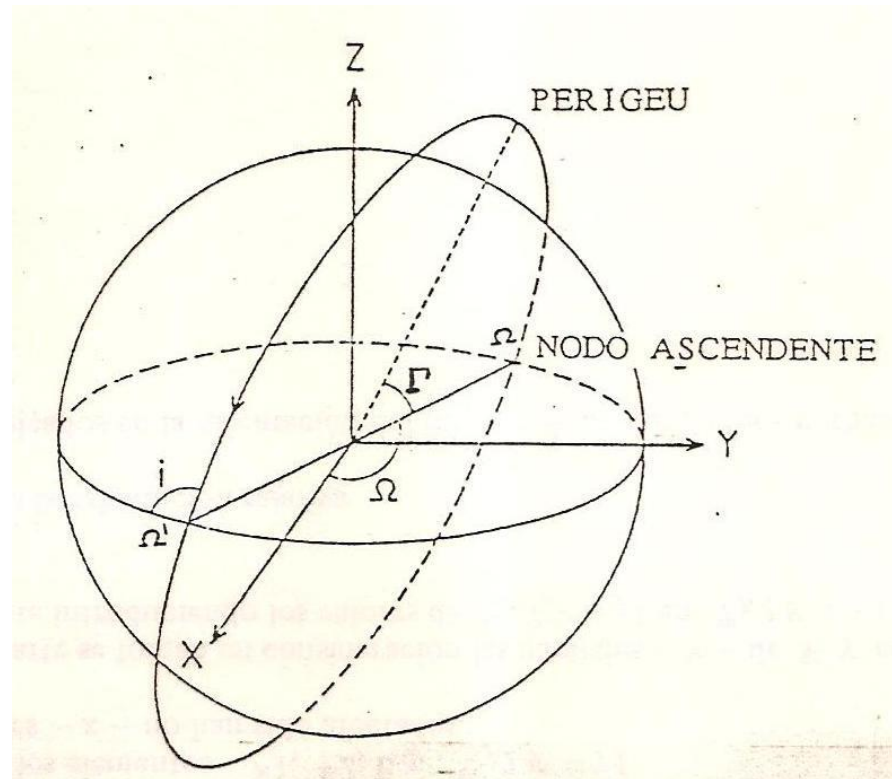
Anomalia Média (M): é o ângulo contado positivamente no sentido do movimento do satélite, entre a direcção do perigeu e a direcção do satélite fictício que descreve uma órbita circular do mesmo período que o satélite considerado.

$$M(t) = M(t_0) + n_0(t - t_0)$$

$$n = \sqrt{\frac{G\mu}{a^3}}$$

Movimento médio

Os parâmetros da órbita



Parâmetros orbitais
 (a, e, i, Γ, Ω)

Movimento na órbita
 (E, θ, n, M)

Perturbação da órbita

O movimento elíptico tratado até este momento baseia-se na simplificação que:

1. o campo gravítico da Terra é equivalente ao de um ponto de massa

2. a órbita do satélite é controlada exclusivamente por este campo gravítico central.

O potencial gravitacional da Terra é representado como uma série de harmónicas esféricas:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right]$$

Perturbação da órbita

Para efeitos de estudo da órbita de um satélite é conveniente separar o potencial gravitacional na sua componente central (GM/r) na sua componente perturbadora.

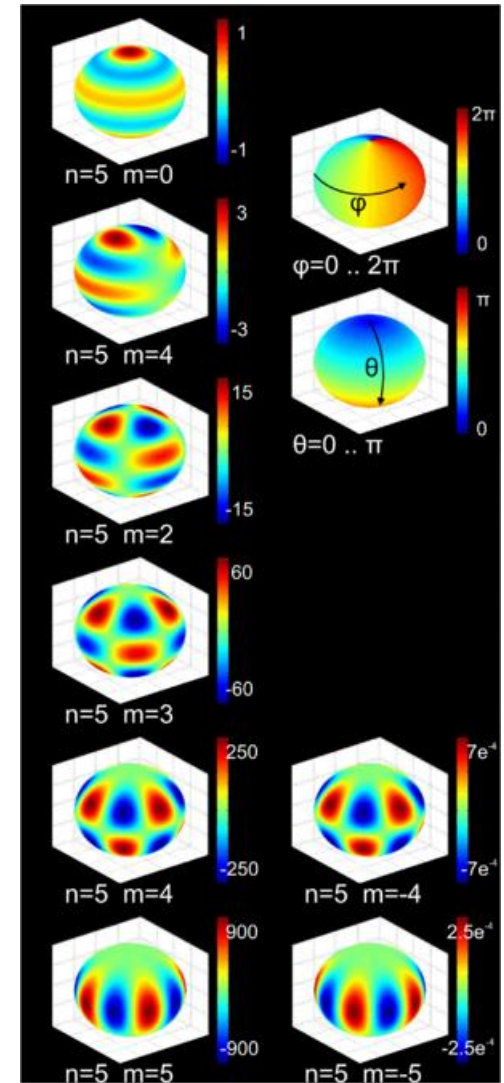
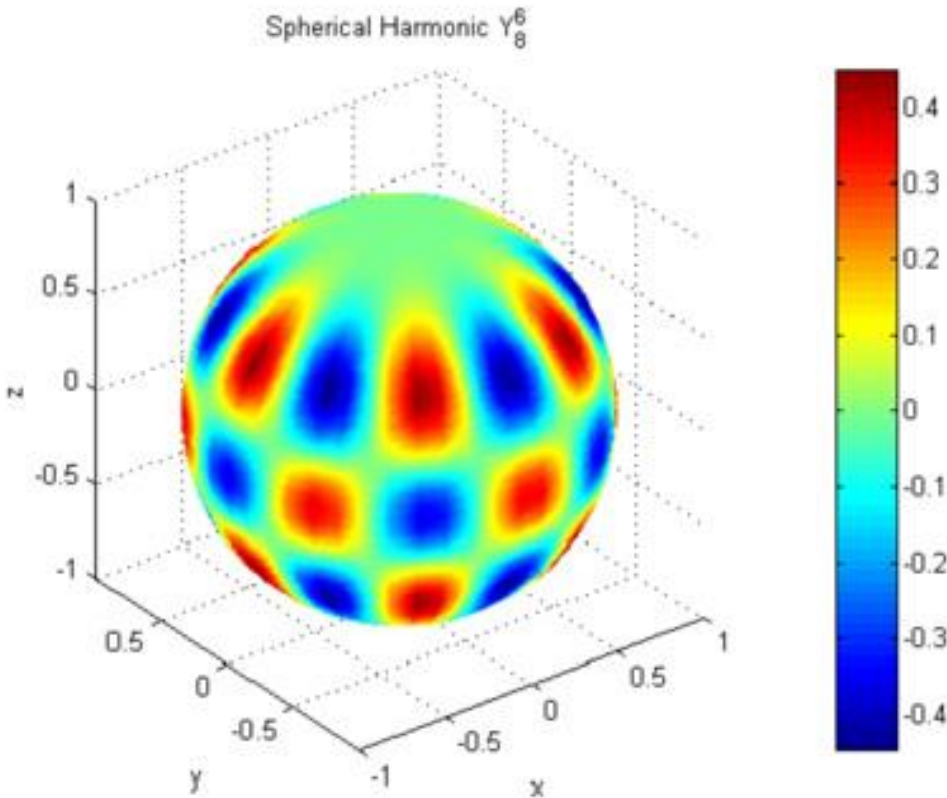
$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} + R(r, \theta, \lambda)$$

Em que:

$$R(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right]$$

É também frequente a separação entre as harmónicas zonais (independentes da longitude, $m=0$) e as tesserais que dependem da longitude ($m > 0$).

Funções harmónicas esféricas



Perturbação da órbita

Listagem dos primeiros termos de C_{nm} e S_{nm}

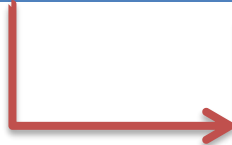
	C_{nm}	S_{nm}		
2 0	-0.484165371736E-03	0.000000000000E+00	0.35610635E-10	0.00000000E+00
2 1	-0.186987635955E-09	0.119528012031E-08	0.10000000E-29	0.10000000E-29
2 2	0.243914352398E-05	-0.140016683654E-05	0.53739154E-10	0.54353269E-10
3 0	0.957254173792E-06	0.000000000000E+00	0.18094237E-10	0.00000000E+00
3 1	0.202998882184E-05	0.248513158716E-06	0.13965165E-09	0.13645882E-09
3 2	0.904627768605E-06	-0.619025944205E-06	0.10962329E-09	0.11182866E-09
3 3	0.721072657057E-06	0.141435626958E-05	0.95156281E-10	0.93285090E-10
4 0	0.539873863789E-06	0.000000000000E+00	0.10423678E-09	0.00000000E+00
4 1	-0.536321616971E-06	-0.473440265853E-06	0.85674404E-10	0.82408489E-10
4 2	0.350694105785E-06	0.662671572540E-06	0.16000186E-09	0.16390576E-09
4 3	0.990771803829E-06	-0.200928369177E-06	0.84657802E-10	0.82662506E-10
4 4	-0.188560802735E-06	0.308853169333E-06	0.87315359E-10	0.87852819E-10
5 0	0.685323475630E-07	0.000000000000E+00	0.54383090E-10	0.00000000E+00
5 1	-0.621012128528E-07	-0.944226127525E-07	0.27996887E-09	0.28082882E-09
5 2	0.652438297612E-06	-0.323349612668E-06	0.23747375E-09	0.24356998E-09
5 3	0.451955406071E-06	-0.214847190624E-06	0.17111636E-09	0.16810647E-09
5 4	-0.295301647654E-06	0.496658876769E-07	0.11981266E-09	0.11849793E-09
5 5	0.174971983203E-06	-0.669384278219E-06	0.11642563E-09	0.11590031E-09

Perturbação da órbita

A situação que estamos a considerar neste momento é consideravelmente mais difícil que a anterior, em que tínhamos uma força central dada por GM , porque agora temos também os coeficientes harmónicos (C_{nm} , S_{nm}).

Sabendo o campo gravitacional e os elementos keplerianos, para uma época inicial, a órbita pode ainda ser completamente determinada.

Os coeficientes harmónicos (C_{nm} , S_{nm}), embora bastantes pequenos, tornam o actual campo gravitacional **não central** e consequentemente faz com que os elementos de Kepler variem no tempo.



A forma e tamanho da elipse de Kepler, bem como a sua orientação no espaço, **varia com o tempo**.

Perturbação da órbita

Depois de algum trabalho de cálculo chegamos às equações que nos dão a variação de cada elemento de Kepler com o tempo (Sunkel, pag.38):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}$$

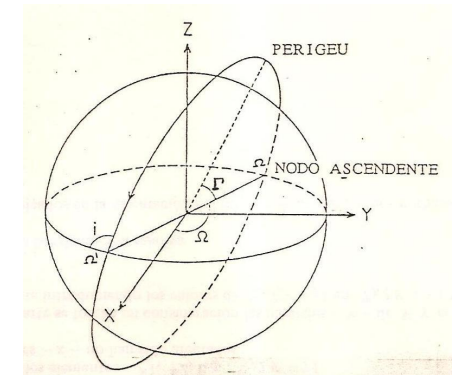
$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}$$



Perturbação da órbita

Neste caso consideramos apenas o termo C_{20} obtemos:

$$R_{20} = \frac{Ga_e^2}{a^3} (1 - e^2)^{-3/2} (3 \sin^2(i/4) - 1/2) C_{20}$$

$$R(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right]$$

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad \frac{de}{dt} = 0 \quad \frac{di}{dt} = 0$$

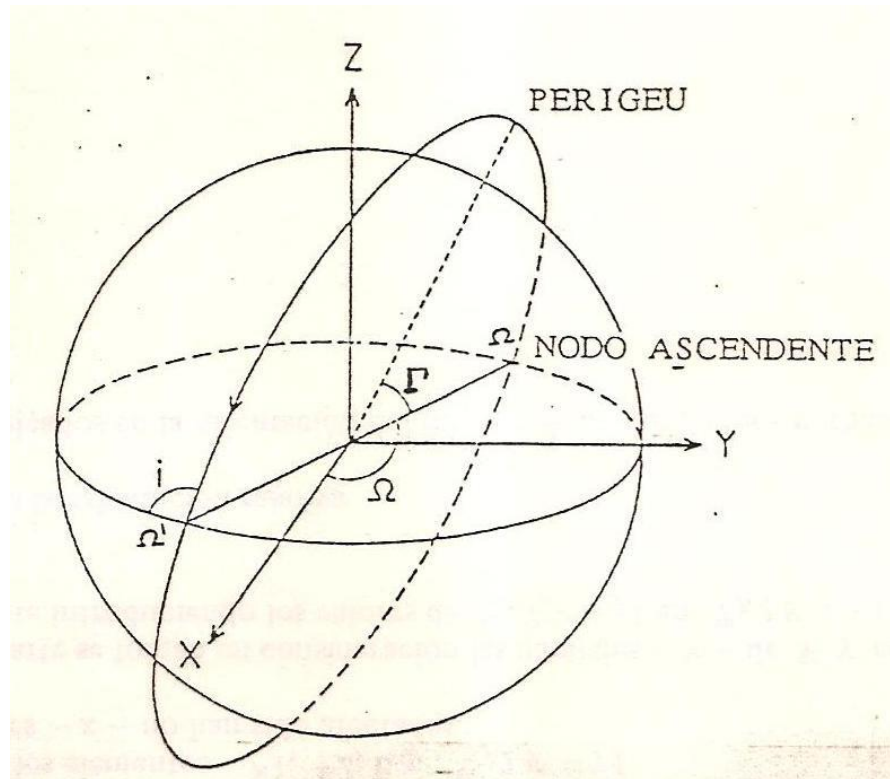
$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{3n C_{20} a_e^2}{4(1 - e^2) a^2} (1 - 5 \cos^2 i)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3n C_{20} a_e^2}{4(1 - e^2)^{3/2} a^2} (3 \cos^2 i - 1)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3n C_{20} a_e^2}{2(1 - e^2) a^2} \cos i$$

a_e é o semieixo maior da Terra

Os parâmetros da órbita




$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3n C_{20} a_e^2}{2(1-e^2)a^2} \cos i$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{3n C_{20} a_e^2}{4(1-e^2)a^2} (1-5\cos^2 i)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3n C_{20} a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2} a^2} (3\cos^2 i - 1)$$

Parâmetros orbitais
 (a, e, i, Γ , Ω)

Perturbação da órbita



A principal força perturbadora do movimento do satélite é devida ao termo zonal $J_2=C_{20}$, isto é, devido à forma achatada da Terra.

Este coeficiente é aproximadamente 1000 vezes superior aos outros coeficientes, produzindo uma aceleração perturbadora de cerca de $5 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$

enquanto que os restantes termos do modelo geopotencial contribuem no seu conjunto com uma aceleração perturbadora aproximada de $3 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$

Precessão do nodo ascendente

A ascensão recta do nodo ascendente Ω evolui linearmente com o tempo:

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) + \dot{\Omega}(t - t_0) \quad ; \quad \dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3nC_{20}a_e^2}{2(1-e^2)a^2} \cos i$$

O movimento de precessão do nodo ascendente aumenta a sua velocidade com a diminuição da inclinação da órbita. Para $i = 90^\circ$ a precessão é nula.

Para uma órbita circular a equação reduz-se a:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{G\mu}{a^3}} C_{20} \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \cos i = -9.97 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} \cos i$$

Precessão do nodo ascendente



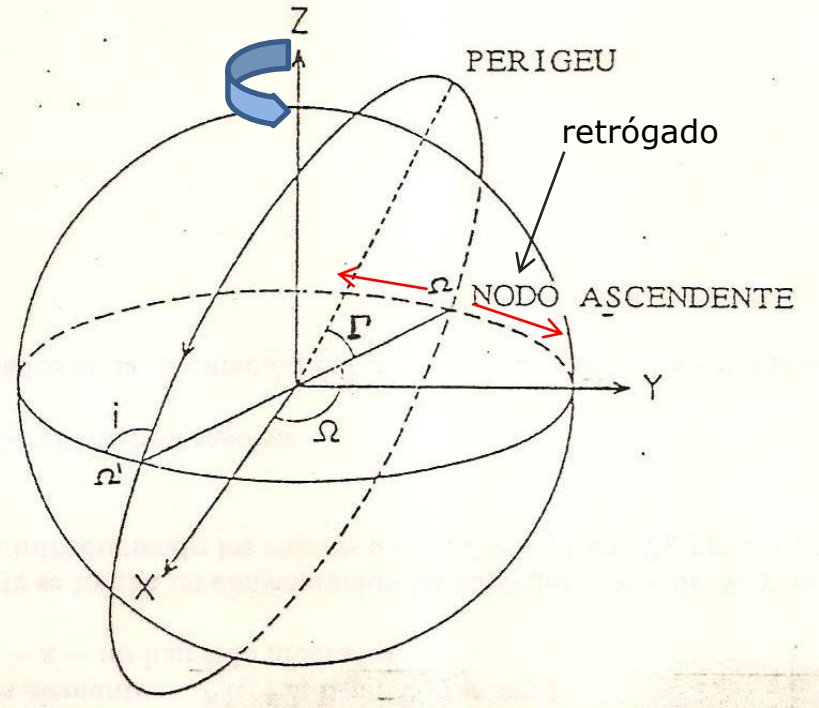
A rotação do nodo ascendente $d\Omega/dt$ é retrogrado para as órbitas $i < 90^\circ$ e directo para órbitas com inclinação maior que 90°

$$\frac{d\Omega}{dt} = -9.97 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} \cos i$$

$$i = 90 \quad \frac{d\Omega}{dt} = 0$$

$$i < 90^\circ \quad \frac{d\Omega}{dt} < 0$$

$$i > 90^\circ \quad \frac{d\Omega}{dt} > 0$$



Rotação do Perigeu

O perigeu varia também linearmente com o tempo:

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_0) + \dot{\Gamma}(t - t_0) \quad ; \dot{\Gamma} = \frac{d\Gamma}{dt}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{3n C_{20} a_e^2}{4(1 - e^2) a^2} (1 - 5 \cos^2 i)$$

Para uma órbita circular a expressão simplifica-se para:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 4.98 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} (1 - 5 \cos^2 i)$$

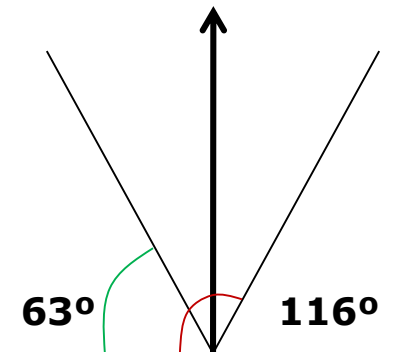
Rotação do Perigeu

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \Rightarrow (1 - 5 \cos^2 i) = 0 \Rightarrow \cos i = \sqrt{1/5} \right)$$

➔ O movimento do perigeu é retrógrado para todas as órbitas com inclinações entre:

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 63^\circ.43 \leq i \leq 116^\circ.57 = 180^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

e directo para todas as outras.



As inclinações $i=63^\circ.43$ e $i=116^\circ.57$ são chamadas críticas porque fazem com que o perigeu oscile em vez de rodar

Modificação do movimento médio

Vimos que a anomalia média no instante t se escrevia:

$$M(t) = M(t_0) + \dot{M}(t - t_0) \quad ; \quad \dot{M} = \frac{dM}{dt} \quad \frac{dM}{dt} = n + \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2}a^2} (3\cos^2 i - 1)$$



O período do satélite, devido à anomalia média é ligeiramente modificada pelo termo C_{20} .

O movimento é mais lento (retardado) para órbitas com inclinação

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54^\circ.74 \leq i \leq 125^\circ.26 = 180^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

e acelerada para as outras.

Órbitas usadas para observação da Terra

Existem dois tipos de órbitas que parecem particularmente bem adaptadas ao estudo da Terra:

Órbitas Geoestacionárias

Estes satélites têm por missão o estudo permanente de uma larga zona da superfície terrestre. Adequado para estudos meteorológicos.

Órbitas de fase Heliosincrona



Missões de observação da Terra.

Têm quatro características:

1. Baixa altitude
2. Circulares (quase)
3. Heliosincronas
4. Fase com a Terra

Órbitas de satélites geoestacionários

Um satélite é dito de **geoestacionário** se se mantém na vertical de um ponto fixo. Para que isso aconteça devem ser verificadas três condições:

1. O satélite deverá ser síncrono: o período de revolução deverá ser igual ao período de rotação da Terra

2. A sua órbita deverá ser circular ($e=0$)

3. A sua órbita deverá ser equatorial ($i=0$)

Órbitas de satélites geoestacionários

Tendo em conta as perturbações produzidas por J_2 , a condição de sincronismo escreve-se para uma órbita circular equatorial:

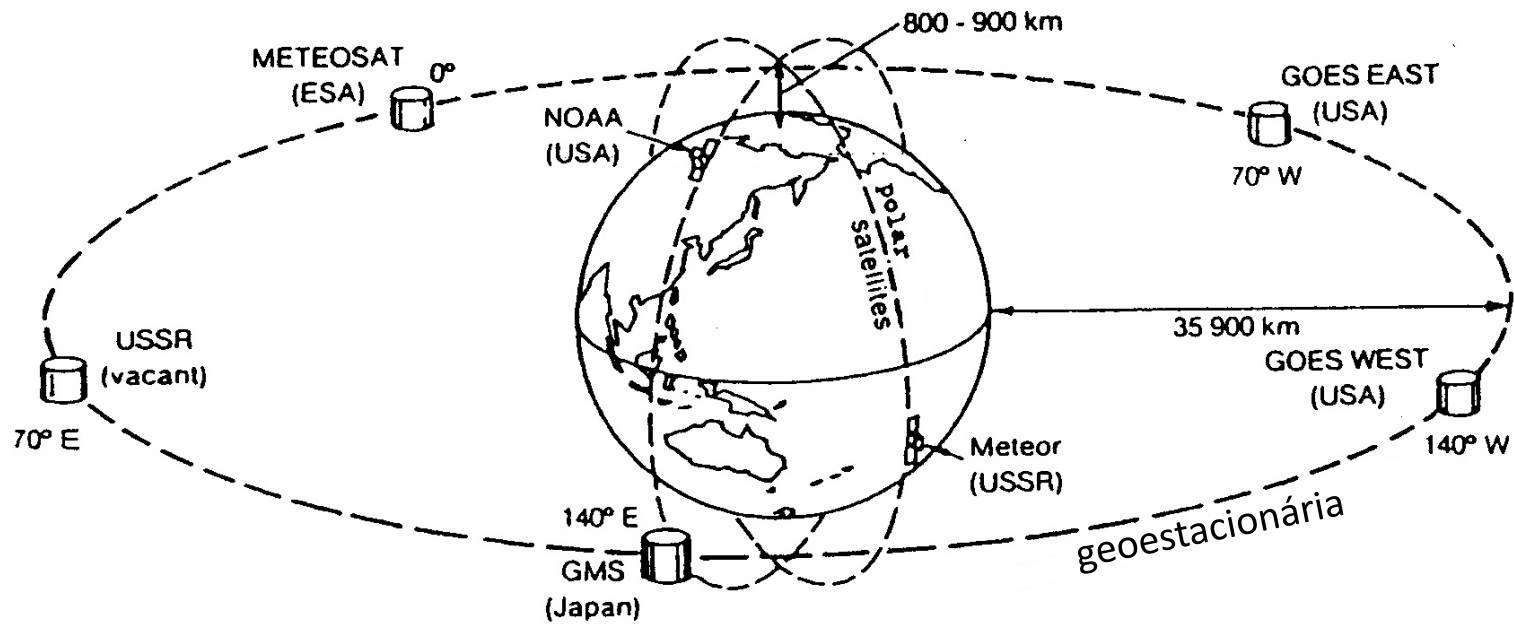
$$\dot{\Gamma} + \dot{\Omega} + \dot{M} = \omega_T \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Gamma}{dt} = 4.98 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} (1 - 5 \cos^2 i) \\ \frac{d\Omega}{dt} = -9.97 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} \cos i \\ \frac{dM}{dt} = n + \frac{3n C_{20} a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2} a^2} (3 \cos^2 i - 1) \end{array} \right.$$

Em que ω_T é a velocidade angular de rotação da Terra
 $\omega_T = 360.9856$ graus por dia.

Resolvendo esta equação em ordem ao semi-eixo maior verificamos que o valor é:

$$a = 42166.260 \text{ km}$$

Missões Geoestacionárias



Órbitas de fase heliosincrona

A órbita dum satélite de observação da Terra deve apresentar características particulares

**regularidade
e
sincronismo**



De modo que as imagens produzidas em diferentes épocas separadas no tempo sejam comparáveis.



Estas características permitem a previsão da passagem do satélite sobre uma zona dada com a possibilidade de definir calendário de passagens simples e universal

Órbitas de fase heliosincrona

Em primeiro lugar

É desejável a obtenção de imagens possuindo as mesmas características seja qual for o lugar observado.

A altitude constante sobre a Terra

Órbita circular

Em segundo lugar

Desejamos obter imagens de todas as regiões da Terra

Órbita Polar

Órbitas de fase heliosincrona

A Terra roda sobre ela mesma no interior da órbita descrevendo o ponto nadiral sob o satélite um traço sobre a Terra em intervalos regulares.



É importante que o satélite disponha de um ciclo de funcionamento permitindo a observação regular de um mesmo ponto sobre a Terra

De modo a criar este ciclo de observação, é necessário que ao fim de um certo tempo o satélite tenha cumprido **um número inteiro de revoluções** sobre a sua órbita, e a Terra, um **número inteiro de revoluções** sobre ela mesma.



Nestas condições dizemos que a órbita está em fase com a Terra

Uma das condições que deverá ser imposta a qualquer sistema de DR é que:



Seja possível a comparação entre observações dum dado lugar obtidas em datas diferentes.



Horas de observação iguais, ou seja à mesma hora local

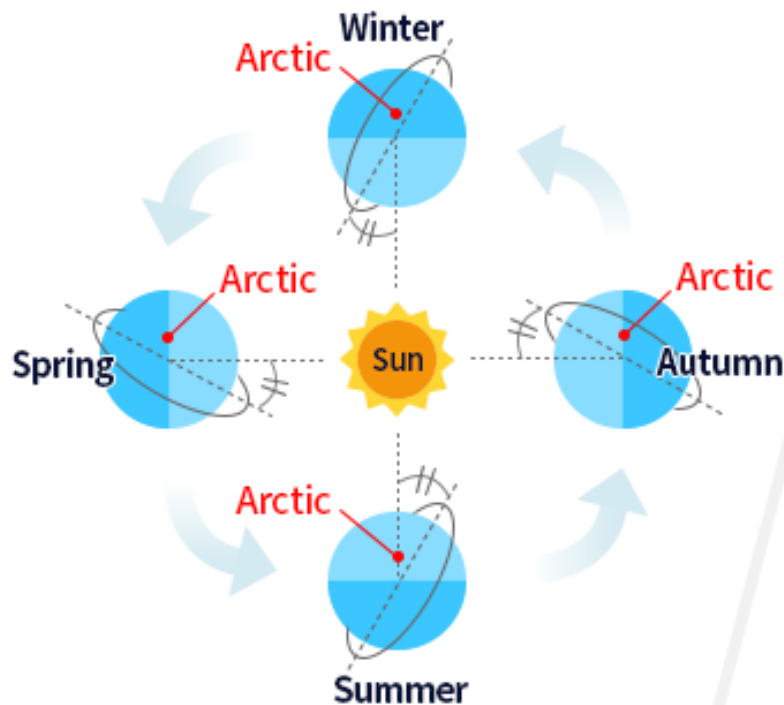


A comparação só poderá ser feita se as condições de iluminação solar forem as mesmas

Este efeito é obtido escolhendo uma órbita heliosincrona, ou seja uma órbita em que a linha dos nodos faça exactamente uma volta completa num ano, como a Terra no seu movimento em torno do Sol.

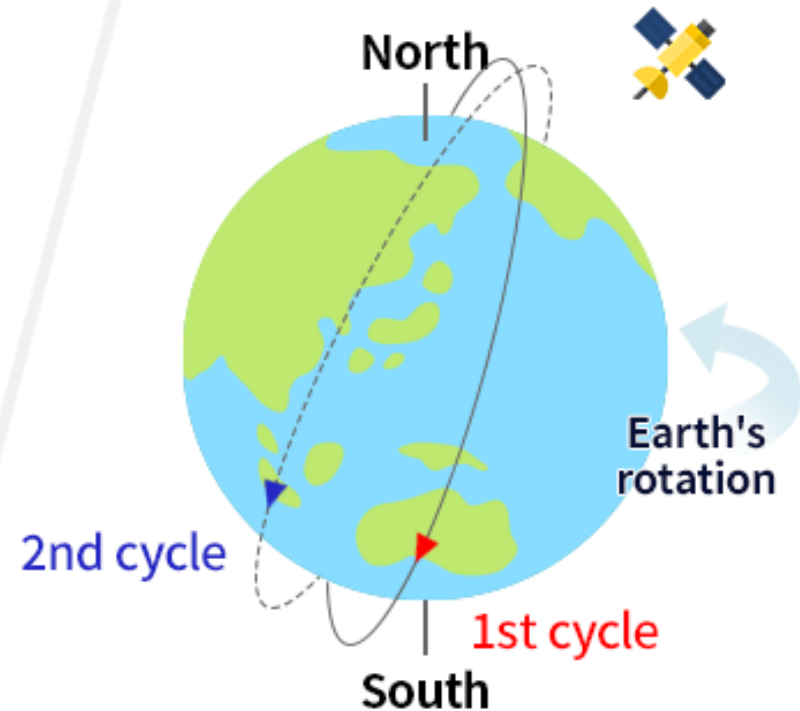
Órbitas de fase heliosincrona

Sun-synchronous orbit



The angle between the orbital plane and the sun is kept almost constant.

Sub-recurrent orbit



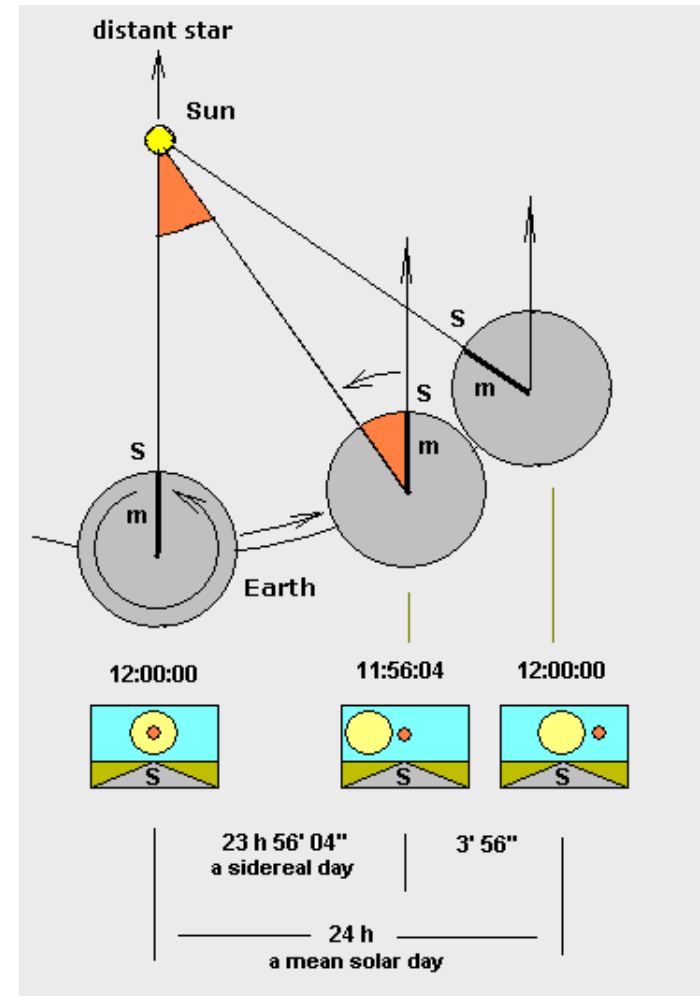
Satellite go around the earth several times a day, and after a few days it passes through the same area at about the same time.

Dia sideral

Dia sideral: é o tempo que a Terra demora a dar uma volta sobre ela mesma com referencia ao ponto vernal (23h 56' 4.091").

Dia solar: tempo entre duas passagens superiores sucessivas do Sol (no meridiano do lugar)

Como a Terra se desloca no seu movimento de translação a sua posição relativa ao Sol é alterada e a Terra tem de rodar mais um pouco para que o Sol cruze o meridiano do lugar.



Se a velocidade de rotação do nodo ascendente for igual à velocidade média do movimento do Sol em torno da Terra, a geometria Sol-plano da órbita será aproximadamente constante e as condições de iluminação para uma dada latitude dependem unicamente da variação da declinação do Sol com as estações.

Definimos órbita hélio-síncrona uma órbita que verifique a seguinte relação:

$$\dot{\Omega} = w_s$$

Em que w_s é a velocidade de rotação aparente do Sol em torno da Terra ($w_s = 0.98561228^\circ / \text{dia}$).

O nodo ascendente tem de rodar mais 0.985 graus por dia para acompanhar a rotação da Terra em 360.985 graus.

A equação do movimento do nodo ascendente é dada por:

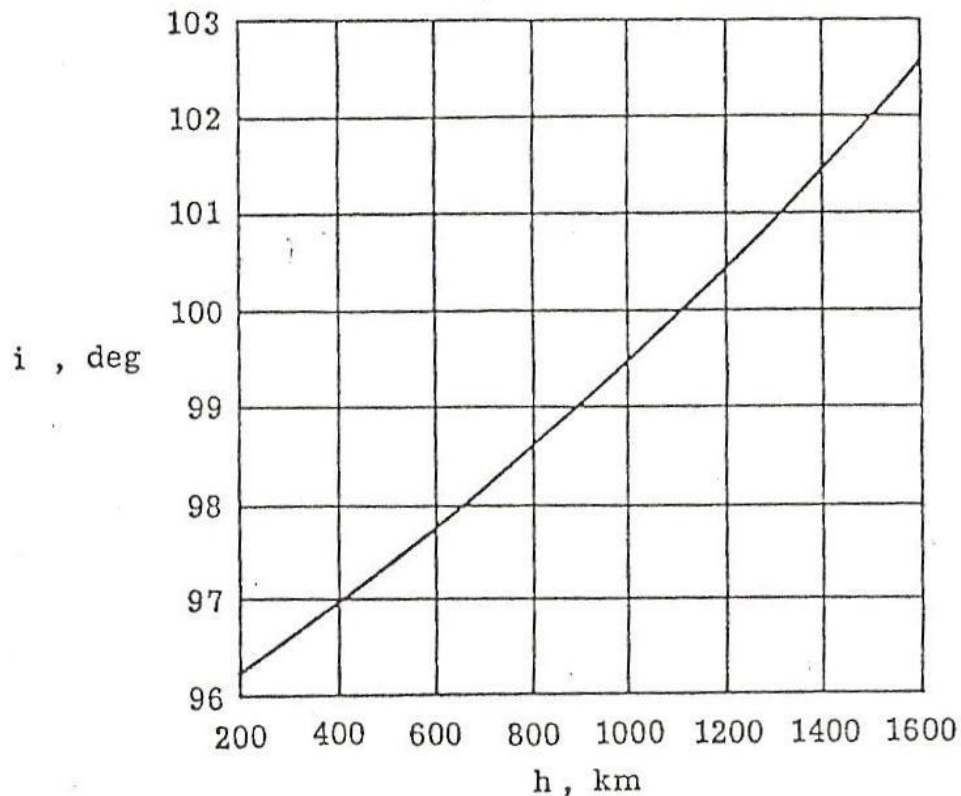
$$\frac{d\Omega}{dt} = -9.97 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} \cos i$$

Forçando a que este movimento seja igual à velocidade aparente do Sol, fica:

$$-9.97 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} \cos i = 0.9856 \Rightarrow \cos i = -0.9856 \left(\frac{a}{a_e} \right)^{7/2} \frac{1}{9.97}$$

Ou seja temos uma relação entre a inclinação da órbita e o semieixo maior da elipse da órbita. O sinal negativo indica que a condição de hélio-sincronismo obriga a que a inclinação seja superior a 90°. A órbita é dita retrógrada.

Variação da inclinação da órbita heliosincrona (circular) em função da altitude



Definimos hora local H do nodo ascendente duma órbita hélio-síncrona pela equação:

$$H = 12h + \alpha_S^* - \Omega$$

Em que α_S^* é a ascensão recta do Sol fictício sobre o plano equatorial com uma velocidade uniforme w_S tendo numa dada data arbitrária, tomada como origem, a mesma ascensão recta que o Sol verdadeiro.

$$\alpha_S^* = \alpha_S(t_0) + 0.98561228 * (t - t_0)$$

A condição de hélio-sincronismo diz-nos que H é constante.

$$H = 12h + \alpha_S(t_0) + 0.98561228 * (t - t_0) - (\Omega(t_0) + \dot{\Omega}(t - t_0))$$

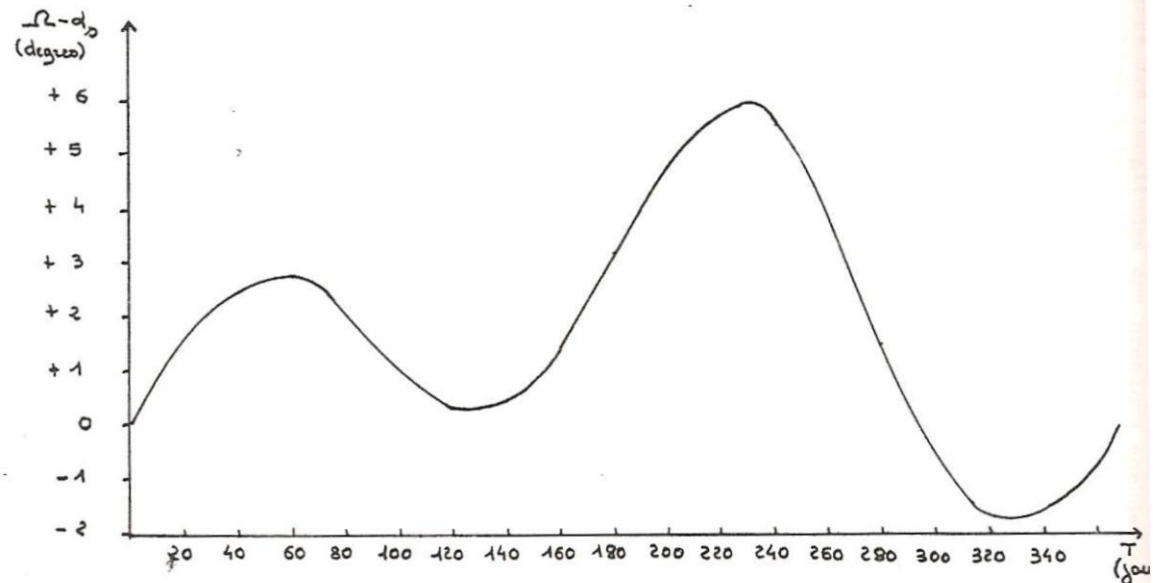
Órbitas de fase heliosincrona

Órbita heliosincrona

Devido às variações da declinação do Sol e das variações da rotação da Terra em torno do Sol o ângulo entre o nodo Ascendente da órbita e o meridiano do Sol não é constante.

Dito de outra forma, a diferença $\Omega - \alpha_S$ é variável.

Diferença entre a ascensão recta do nodo ascendente dum órbita helio-síncrona 12h e a ascensão recta do Sol em função do tempo a partir do equinócio da primavera.



As numerosas missões de observação da Terra impõem uma cobertura repetitiva de toda ou parte da Terra com uma periodicidade considerada aceitável.

A noção de cobertura comporta dois aspectos:

1. Constrangimento de cobertura

2. Constrangimento de repetitividade

1. Constrangimento de cobertura

A cobertura numa dada latitude deve ser realizada tendo em conta uma recobertura de longitude fixa das medidas efectuadas a partir de duas órbitas em que o traço sobre a superfície sejam vizinhos. Este constrangimento está ligado à largura do campo de visão: IGOV

2. Constrangimento de repetitividade

As séries de observações de dois ciclos de cobertura devem ser sobrepostos. Isto impõe que periodicamente o satélite passe de novo exactamente sobre o mesmo ponto. O intervalo de tempo entre duas passagens sobre o mesmo ponto é igual à duração do ciclo de cobertura.

Se o constrangimento de repetibilidade é satisfeito, então:

1) Existe um inteiro M tal que:

$$P = N + M/Q$$

P : é o número de períodos nodais por dia

Q : é a duração do ciclo de cobertura

N : parte inteira de P

2) Representando por L_j^i a longitude do i -ésimo nodo ascendente do dia j , e tomando convenientemente a origem das longitude $L_0^1 = 0$ temos que:

Separação entre traços consecutivos

$$L_j^1 = \left(\frac{2\pi}{PQ} \right) (Q - r_j) \quad \text{com} \quad r_j = j \cdot M \pmod{Q} \quad \text{e} \quad r_j < Q$$

A sequência de longitudes dos primeiros nodos de cada dia é equivalente à sequência dos resíduos de módulo Q dos Q primeiros múltiplos de M .

3) Por fim temos que, se: $C = \left(\frac{2\pi}{PQ} \right)$

em que C é a distância entre dois nodos contíguos no equador.

A condição de cobertura no equador é escrita:

$$\left(\frac{2\pi}{PQ} \right) \leq (1-r)C_p$$

Em que C_p é o campo de visão medido no solo e r é a recobertura imposta. Assim, como Q é fixo obtemos o limite inferior ao valor de P : ou seja o limite superior ao semieixo maior da órbita.



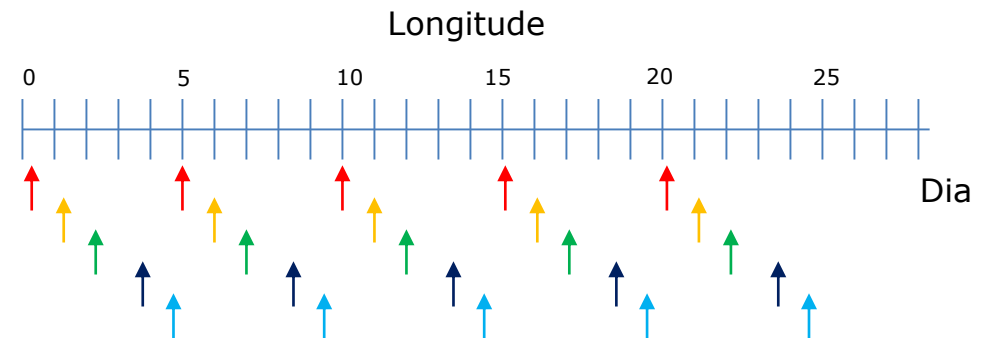
Longitude de traços consecutivos

(programa orbita)

Satélite SPOT

$P = 14 + 5/26$

dia= 1,	Longitude= 20.4878 grau
dia= 2,	Longitude= 15.6098 grau
dia= 3,	Longitude= 10.7317 grau
dia= 4,	Longitude= 5.8537 grau
dia= 5,	Longitude= 0.9756 grau
dia= 6,	Longitude= 21.4634 grau
dia= 7,	Longitude= 16.5854 grau
dia= 8,	Longitude= 11.7073 grau
dia= 9,	Longitude= 6.8293 grau
dia= 10,	Longitude= 1.9512 grau
dia= 11,	Longitude= 22.4390 grau
dia= 12,	Longitude= 17.5610 grau
dia= 13,	Longitude= 12.6829 grau
dia= 14,	Longitude= 7.8049 grau
dia= 15,	Longitude= 2.9268 grau
dia= 16,	Longitude= 23.4146 grau
dia= 17,	Longitude= 18.5366 grau
dia= 18,	Longitude= 13.6585 grau
dia= 19,	Longitude= 8.7805 grau
dia= 20,	Longitude= 3.9024 grau
dia= 21,	Longitude= 24.3902 grau
dia= 22,	Longitude= 19.5122 grau
dia= 23,	Longitude= 14.6341 grau
dia= 24,	Longitude= 9.7561 grau
dia= 25,	Longitude= 4.8780 grau
dia= 26,	Longitude= 25.3659 grau
dia= 27,	Longitude= 20.4878 grau
dia= 28,	Longitude= 15.6098 grau



Distância entre dois traços
consecutivos

$$= 2\pi / P = 25.3659 \text{ grau}$$

$$360 - (14 * 25.3659) = 4.878 \text{ graus}$$

Determinação dos parâmetros orbitais de uma missão de observação da Terra.

Parâmetros Críticos:

Cobertura dos sensores no solo: 117 km
Deslocamento oeste da órbita por dia

Constantes utilizadas:

$$G\mu = 3986005 \times 10^8 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$$

$$R_t = 6378155 \text{ m}$$

$$J_2 = 1082.7 \text{e}^{-6}$$

Formulário Básico

$$\left(\frac{2\pi}{PQ} \right) \leq (1-r)C_p$$

$$PQ > 2\pi/(1-r)C_p$$

$$P = N+M/Q$$

$$T = 24h * 3600 / P$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{G\mu}{4\pi^2} T^2}$$

$$\cos i = -0.9856 \left(\frac{a}{a_e} \right)^{7/2} \frac{1}{9.97}$$

$$v^2 = G\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} \right)$$

Determinação dos parâmetros orbitais

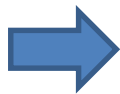
1. Condição de Cobertura

$$\left(\frac{2\pi}{PQ} \right) \leq (1-r)C_p$$

$C_p = 117 \text{ km}$; $(1-r) = 0.95$; sobreposição = 5%

$$C_p = 360^\circ * 117 \text{ km} / 40073 \text{ km} = 1^\circ.051081$$

→ $P.Q \geq 360^\circ / (0.95 * 1^\circ.051081)$



$$P.Q \geq 360.6$$

Determinação dos parâmetros orbitais

2. Condição de Repetitividade

i) $P = N + M/Q$

ii) $P.Q = N.Q + M$

iii) A fracção M/Q determina o padrão de cobertura

iv) Se $M/Q = 0$ a órbita é dita ressonante, e os traços são repetidos todos os dias  Lacunas na cobertura

O desenho da missão tem início na escolha de:

M/Q e N

Determinação dos parâmetros orbitais

Altitude da missão (h):

$$400\text{km} \leq h \leq 1300 \text{ km} \quad \longrightarrow \quad 13 \leq P \leq 15$$

Assumindo $N = 14$ e sabendo que $P \cdot Q \geq 360.5$

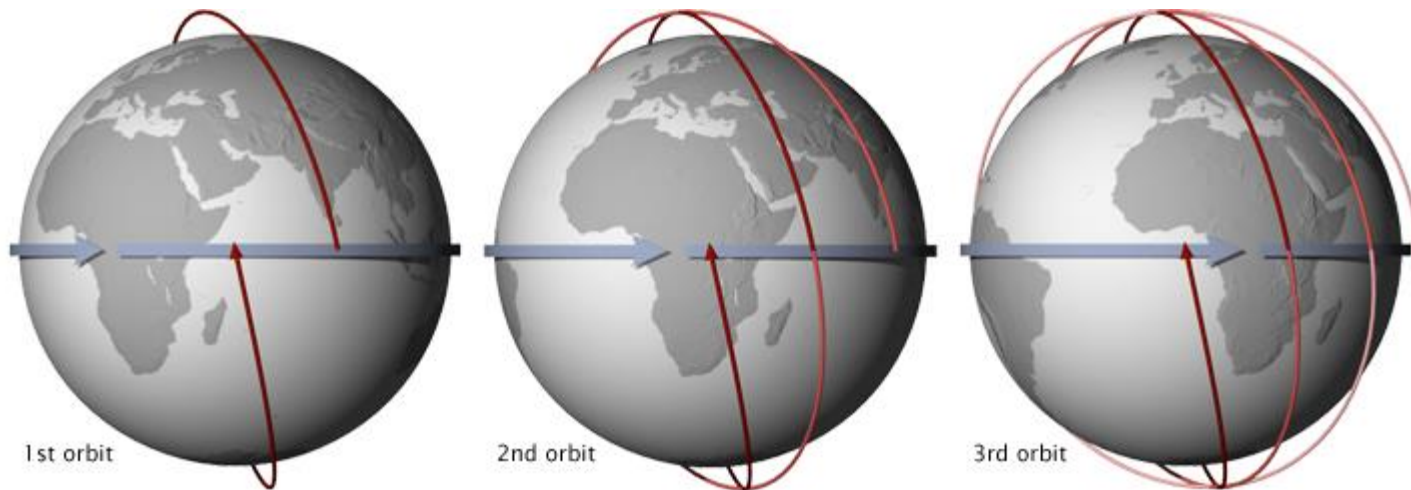
então: $Q = 25.75 \Rightarrow Q = 26$ (numero de dias de um ciclo)

Como $P \cdot Q = N \cdot Q + M$, então $NQ + M \geq 360.5$

então M pode ser qualquer inteiro entre 1 e 25

$$P = 14 + 5 / 26$$

Numero de
revoluções diárias





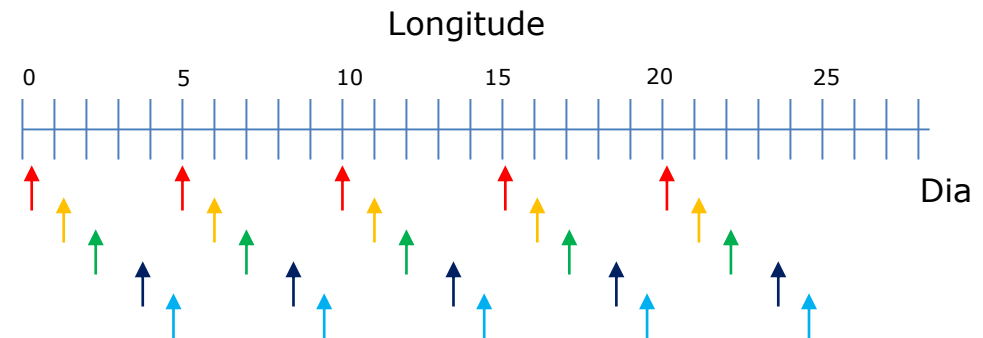
Longitude de traços consecutivos

(programa orbita)

Satélite SPOT

$P = 14 + 5/26$

dia= 1,	Longitude= 20.4878 grau
dia= 2,	Longitude= 15.6098 grau
dia= 3,	Longitude= 10.7317 grau
dia= 4,	Longitude= 5.8537 grau
dia= 5,	Longitude= 0.9756 grau
dia= 6,	Longitude= 21.4634 grau
dia= 7,	Longitude= 16.5854 grau
dia= 8,	Longitude= 11.7073 grau
dia= 9,	Longitude= 6.8293 grau
dia= 10,	Longitude= 1.9512 grau
dia= 11,	Longitude= 22.4390 grau
dia= 12,	Longitude= 17.5610 grau
dia= 13,	Longitude= 12.6829 grau
dia= 14,	Longitude= 7.8049 grau
dia= 15,	Longitude= 2.9268 grau
dia= 16,	Longitude= 23.4146 grau
dia= 17,	Longitude= 18.5366 grau
dia= 18,	Longitude= 13.6585 grau
dia= 19,	Longitude= 8.7805 grau
dia= 20,	Longitude= 3.9024 grau
dia= 21,	Longitude= 24.3902 grau
dia= 22,	Longitude= 19.5122 grau
dia= 23,	Longitude= 14.6341 grau
dia= 24,	Longitude= 9.7561 grau
dia= 25,	Longitude= 4.8780 grau
dia= 26,	Longitude= 25.3659 grau
dia= 27,	Longitude= 20.4878 grau
dia= 28,	Longitude= 15.6098 grau



Distância entre dois traços
consecutivos

$$= 2\pi / P = 25.3659 \text{ grau}$$

$$360 - (14 * 25.3659) = 4.878 \text{ graus}$$

Determinação dos parâmetros orbitais

3. Período de revolução do satélite

$$T = 1440 \text{ min} / (14 + 5/26) = 101.4 \text{ min}$$

$$\text{Período} = 101.4 \text{ min}$$

4. Semi-eixomaior da elipse

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\mu}{4\pi^2} \quad a = \sqrt[3]{\frac{G\mu}{4\pi^2} T^2}$$

$$a = 7208 \text{ km}; h = 830 \text{ km}$$

Determinação dos parâmetros orbitais

5. Condição de heliosincronismo

$$\cos i = -0.9856 \left(\frac{a}{a_e} \right)^{7/2} \frac{1}{9.97}$$

$$i = 98^\circ.7$$

6. Distância entre traços no equador

$$\text{distEquador} = 40073 \text{ km} / 369 \text{ revoluções} = 108.6 \text{ km}$$

(369 = 14*26 + 5)

7. Distância entre duas passagens sucessivas

$$\text{Dist} = 40073 \text{ km} * (360^\circ/P) / 360^\circ = 2823 \text{ km}$$

8. Velocidade na órbita

$$v^2 = G\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} \right)$$

$$v = 398601 / 7201 = 7.4 \text{ km /s}$$

Características do SPOT e Landsat

	SPOT	LANDSAT
Altitude (km)	830	705
Períodos nodais por dia	14 + 5/26	14 + 9 / 16
Período de cobertura (dias)	26	16
Período orbital (min)	101.4	99
Número de revoluções	369	233
Distância entre traços (km)	108.6	172
Campo visão vertical (km)	117	185
Inclinação da órbita (graus)	98.7	98.2
Hora local de passagem	10:30	9:45
Distancia entre traços (km)	2833.6	2752
Resolução (m)	10-20	30

Características de Missões de EO

Plataformas	Altit.(Km)	Veloc.(Km/s)	Período (min)
ERS-2	785	7.46	100.5
IRS-1C	817	7.44	101.2
JERS-1	569	7.58	96.0
Landsat 5	705	7.50	98.9
RADARSAT	798	7.45	100.8
SPOT -3	832	7.44	101.5
IKONOS	681	7.51	98.8



Sentinel-1, 12 day repeat cycle,
175 orbits per cycle. H= 693 km

Sentinel-2, 10 day repeat cycle,
h=786 km, i=98.62
Swath=290 km
14+3/10 revoluções por dia

Sentinel-1 Satellite Characteristics

Lifetime: 7 years (consumables 12 years)
Launcher: Soyuz from Kourou (baseline),
Zenith-2 (backup)
Orbit: near-polar Sun-synchronous
693 km; 12-day repeat cycle; 175 revs
per cycle
Mean Local Solar Time: 18:00 at
ascending node
Orbital period: 98.6 minutes
Attitude stabilisation: 3-axis
Attitude accuracy: 0.01 deg (each axis)
Orbit knowledge: 10 m (each axis,
3-sigma) using GPS
Operating autonomy: 96 hours
Launch mass: 2300 kg (including 130 kg
monopropellant fuel)
Size (stowed): 3900 x 2600 x 2500 mm
Solar array average power: 4800 W (end-
of-life); battery capacity: >300 Ah
Spacecraft availability: 0.998
Science data storage capacity: 900 Gb
(end-of-life)
S-band TT&C data rates: 4 kbit/s
telecommand; 16/128/512 kbit/s
telemetry (programmable)
X-band science data rate: 600 Mbit/s

Determine dos parâmetros orbitais de uma missão de observação da Terra na qual se pretende:

- i) Cobertura dos sensores no solo: 15.2 km
- ii) Altitude elipsoidal média da órbita : 684 km

Calcule os seguintes parâmetros da órbita:

- Número de revoluções diárias
- Período de revolução do satélite
- Semi-eixo maior da elipse
- Inclinação da órbita
- Distância entre duas passagens sucessivas



Exame 22 junho 2012

Assuma as características do satélite da pergunta anterior.

- a) Determine o valor do campo de visão do sensor na posição nadiral (FOV).
- b) Sabendo que o GIFOV na posição nadiral é 0.41m calcule o GIFOV para um ângulo de vista de 30° (off-nadir look angle) .