

4. Monitorização de estruturas

4.1. Introdução

Uma vez que este capítulo vai tratar da monitorização de estruturas, começa-se por definir o que é a estrutura de um objecto de forma a ser possível identificar no objecto que vai ser sujeito a monitorização as componentes cujo eventual movimento pode implicar algum risco para a sua estabilidade.

Designa-se por estrutura de uma construção a parte dessa construção cuja função é assegurar, ao longo do respectivo tempo de vida, a sua resistência em boas condições de estabilidade aos esforços a que está submetida. Estes esforços podem corresponder a solicitações permanentes (aquelas que actuam de forma ininterrupta, como o peso próprio das estruturas e do material de revestimento e de compartimentação, assim como da carga transmitida à estrutura pelo equipamento fixo) ou acidentais, podendo estas últimas ser habituais (englobam as sobrecargas como o peso das pessoas, veículos, equipamento não fixo, efeitos de frenagem, força centrífuga, acção do vento habitual, acção da neve, variações de temperatura, forças devidas à retracção, fluência e relaxação dos materiais, forças devidas a assentamento dos apoios, atritos e resistências em aparelhos de apoio, impulsos de terras ou de outros materiais e forças hidrostáticas e hidrodinâmicas) ou excepcionais (ventos excepcionais, sismos).

As estruturas podem ter diversas concepções e ser executadas com vários materiais, cada um com características de resistência próprias, devendo a escolha da estrutura mais conveniente fazer-se por forma a que, utilizando os materiais e técnicas disponíveis, se satisfaça a finalidade da obra em condições de segurança e dentro das exigências de custo e prazo de construção. Os materiais mais correntemente utilizados nas estruturas são a madeira, a pedra (blocos com forma regular assentes uns sobre os outros – alvenaria, intercalados com argamassa, isto é, uma mistura em proporções adequadas de areia, água e um elemento aglomerante, que quando solidifica, garante alguma ligação entre as pedras), os metais e o betão armado ou pré-esforçado.

A pedra, quando de boa qualidade, resiste bem à compressão e à tracção; quando utilizada em alvenaria apenas resiste bem à compressão. As estruturas em aço são formadas por elementos metálicos (chapas ou perfis laminados com secção transversal em L ou I reduzida, o que é possível por as resistências do aço à compressão, à tracção e ao corte serem praticamente iguais) ligados entre si por rebites, parafusos ou soldadura; estas estruturas são em geral reticuladas, ou seja, constituídas por um conjunto de elementos alongados ligados uns aos outros pelas extremidades, em pontos que se designam por nós da estrutura. O betão, um dos materiais mais utilizados em construção civil, é formado por uma mistura de cimento, pedra, areia e água em proporções adequadas. Na altura em que é fabricado, o betão é fluido e pode ser lançado num molde; depois de compactado, endurece, adquirindo excelente capacidade de resistência à compressão, embora tenha uma capacidade de resistência à tracção reduzida. Se no interior do molde existirem alguns varões de aço, os esforços de tracção são suportados pelos varões, enquanto que o betão resiste às compressões - betão armado, que beneficia das características próprias do aço e do betão. Para moldar uma estrutura de betão armado (por exemplo uma viga) começa-se por construir a cofragem, um molde em madeira, que se destina a conter o betão num estado fluido; em seguida montam-se as armaduras dentro da cofragem; numa betoneira misturam-se os vários componentes do betão que depois se vaza dentro da cofragem; compacta-se então o betão com vibradores com o objectivo de expulsar o ar da massa de betão e conseguir uma perfeita adaptação do betão à forma da cofragem e uma completa penetração daquele entre a armadura. Espera-se entre 3 a 28 dias até

que o betão tenha endurecido e remove-se a cofragem. Pode também utilizar-se o betão pré-esforçado que pretende tirar partido dos aços de alta resistência sem provocar a fissuração do betão: sujeita-se a armadura a uma tracção (pré-esforço) e depois torna-se a armadura solidária com o betão, tendendo a viga a flectir para cima; quando a viga for sujeita a uma carga, a deformação tende a anular a flecha introduzida pelo pré-esforço.

Para se compreender o modo de actuar das estruturas é conveniente considerar as diferentes formas em como os seus elementos podem ser solicitados: considerando uma peça paralelepédica submetida a um conjunto de cargas axiais de tracção e compressão, a rotura da peça ocorre quando em qualquer secção for ultrapassada a capacidade resistente do material. A figura 4.1. ilustra várias possibilidades de rotura: a. corresponde a uma forma de rotura à tracção típica de materiais frágeis como por exemplo o betão, b. corresponde à rotura por tracção de materiais ductéis como por exemplo o aço, c. exemplifica um caso de rotura por compressão em consequência de esmagamento, d. representa um fenómeno de encurvadura ou deformação transversal. A capacidade de resistência de um dado material pode corresponder a cargas semelhantes quando actuam forças de compressão ou de tracção (aço) ou a cargas diferentes (madeira, betão); por exemplo no caso do betão, a resistência à tracção é cerca de 1/10 da resistência à compressão, o que deu origem à criação de estruturas em betão armado, de betão e aço.

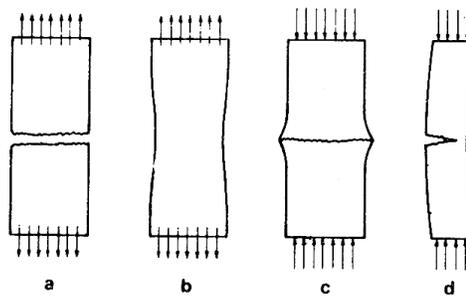
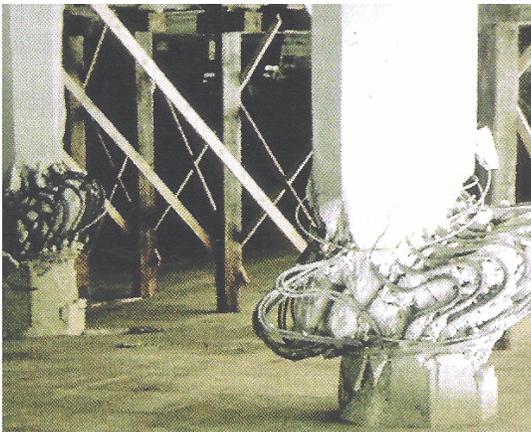


figura 4.1. Formas de rotura devidas à tracção (a, b) e à compressão (c, d)



Danos graves com encurvadura das armaduras dos pilares de um viaduto (Northridge, 1994)



Colapso de um piso intermédio (Kobe, 1995)

figura 4.2. Efeitos de sismos em estruturas

Para cada material definem-se tensões de rotura à tracção, σ_t , e à compressão, σ_c , que representam o menor valor da força (de tracção ou compressão) por unidade de área da secção transversal (perpendicular à direcção da força) capaz de provocar a rotura. Se S for a área da secção transversal, as forças capazes de provocar a rotura por tracção ou compressão são $F_t = \sigma_t S$ e $F_c = \sigma_c S$, respectivamente. Para haver uma garantia que não ocorra rotura (e para impedir que os elementos da estrutura fiquem sujeitos a deformações plásticas, não recuperáveis quando cessa a actuação das forças), define-se um coeficiente de segurança n_t e n_c , em geral próximo de três, tal que $n_t = \sigma_t / \sigma_{st}$ e $n_c = \sigma_c / \sigma_{sc}$, onde os índices st e sc representam a tensão de segurança à rotura por tracção ou tensão de segurança à rotura por compressão, respectivamente. Assim, as forças máximas que a estrutura pode estar submetida quando solicitada à tracção ou à compressão são dadas por $F_t = \sigma_{st} S$ e $F_c = \sigma_{sc} S$.

Considere-se agora um cubo solicitado da forma indicada na figura 4.3., correspondente à situação de corte, que tende a provocar tensões máximas de tracção e compressão segundo facetas a 45° com a direcção das cargas: a. se o material for homogéneo e com características resistentes semelhantes à tracção e à compressão, a linha de rotura poderá ser paralela à direcção das forças; sendo τ e τ_s a tensão de rotura e a tensão de segurança ao corte, n o coeficiente de segurança ao corte e S a área da secção do elemento paralela à direcção do esforço, tem-se $F = \tau/n$, $S = \tau_s S$; b. o mesmo tipo de solicitações actuando sobre um material que tenha fraca resistência à tracção provocará uma rotura por fendilhação na direcção mais traccionada, a 45° com a direcção do esforço; c. verifica-se uma situação análoga para um material homogéneo solicitado de acordo com a figura, supondo que as forças de tracção são iguais às de compressão.

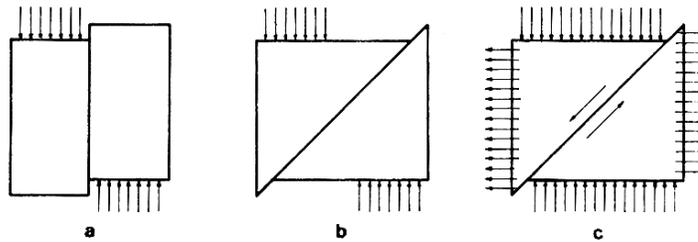


figura 4.3. Formas de rotura devidas ao corte

Existem alguns elementos estruturais comuns à maioria das estruturas; um dos mais importantes é o pilar, cuja missão é receber as cargas transmitidas pelos diferentes elementos da construção que sobre ele se apoiam e transmiti-las, por sua vez, a outros elementos da estrutura ou directamente ao terreno em que a construção assenta através das fundações. Antigamente os pilares eram de madeira ou de pedra, mas actualmente são correntes os pilares de betão de secção rectangular, quadrada ou circular e os pilares metálicos. Os pilares podem ser solicitados apenas à compressão por intermédio de forças verticais ou estar sujeitos a forças horizontais que os solicitam à flexão, quase sempre devido a sismos. As paredes podem ter funções resistentes similares às dos pilares, embora modernamente as paredes não tenham funções resistentes aos esforços verticais, destinando-se a fechar espaços vazios das estruturas. Um tipo diferente de paredes são os muros de suporte que se destinam, fundamentalmente, a suportar cargas horizontais perpendiculares aos muros, transmitidas nos casos mais correntes pela terra ou pela água que esses muros retêm. Estreitamente relacionadas com os pilares e as paredes estão as fundações, que são a parte da estrutura através das quais se transmitem ao terreno as forças que actuam sobre ela. Um exemplo é dado pelas sapatas, maciços destinados a transmitir ao terreno a carga recebida de um pilar. Uma viga é um elemento normalmente

horizontal em que as cargas actuam em regra perpendicularmente ao eixo longitudinal, provocando esforços de flexão, podendo ser construída em betão armado ou metal. As vigas, em vez de serem apenas apoiadas nas extremidades, podem ter diversos apoios intermédios, designando-se então por vigas contínuas. Podem também estar apenas fixas numa extremidade, designando-se assim vigas em consola. Uma estrutura do tipo da viga mas mais larga designa-se por laje, normalmente rectangular, apoiada em vigas, assentes por sua vez em pilares.



figura 4.4. Exemplos de pilares, muros de suporte, fundações e vigas

4.2. Redes de monitorização

Uma das funções mais importantes de um engenheiro geógrafo é a implantação e monitorização, normalmente através da utilização de redes geodésicas ou topográficas (a distinção prende-se sobretudo com a extensão da rede, sendo as primeiras calculadas no elipsóide e as segundas no plano), de estruturas naturais ou artificiais susceptíveis de sofrer deformação, um processo contínuo que afecta a totalidade de um objecto, embora com magnitude e direcção variável de ponto para ponto e ao longo do tempo. A complexidade, extensão e custos crescentes dos trabalhos de engenharia civil implicam uma maior exigência nos trabalhos de implantação e monitorização de estruturas, de forma a garantir que os projectos sejam cumpridos. O desenvolvimento de instrumentos de observação, registo e processamento automáticos oferece a possibilidade de efectuar esta monitorização de forma precisa e económica; para além da utilização destes instrumentos, é necessário dominar os princípios da concepção, instalação, cálculo e avaliação da qualidade das observações de redes de controlo, para que sejam consistentes e fidedignas. É importante avaliar e controlar a qualidade do resultado, verificando se os requisitos pré-definidos são obtidos e, se por configuração deficiente da rede ou por erros de observação esses requisitos não forem alcançados, devem estar disponíveis procedimentos para corrigir a situação. O resultado final vai depender, basicamente, da precisão e da exactidão com que as observações são efectuadas (a propagação dos erros aleatórios presentes nas observações para as coordenadas é avaliada em termos de precisão enquanto que a identificação de erros grosseiros e sistemáticos nas observações e a sensibilidade das observações a estes erros é medida em termos de fiabilidade). O campo dos vectores de deformação é aproximado por modelos concebidos para estimar separadamente o deslocamento do objecto como um corpo rígido e o movimento relativo entre os pontos desse corpo. Por razões de eficácia e de economia, é necessário conhecer, pelo menos de forma aproximada, e mesmo antes da concepção da rede de controlo, a direcção e ordem de grandeza dos deslocamentos a medir, pois só desta forma a rede pretendida terá uma estrutura geométrica e estocástica que permita detectar as eventuais deformações.

Esquemáticamente (figura 4.5), o problema consiste em determinar o deslocamento (horizontal, neste caso) de um ponto P de uma estrutura relativamente aos pilares I e II considerados fixos, a partir de ângulos azimutais α e β observados em épocas distintas A e B (entre as quais se deseja obter o valor dos deslocamentos), sendo m uma marca de referência fixa; as diferenças angulares $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ permitem determinar a nova posição P_B relativamente à posição P_A .

Embora sejam suficientes dois pilares, para aumentar a precisão dos resultados e obter o valor dos erros cometidos na determinação do deslocamento, é conveniente utilizar um terceiro pilar fixo III. A metodologia indicada baseia-se na hipótese de os pilares de observações serem efectivamente fixos pois de outro modo qualquer alteração na respectiva posição relativa vai contaminar o valor determinado para o movimento do ponto P. Neste último caso é indispensável incluir marcas de verificação cujo movimento possa ser considerado desprezável, ou por estarem localizadas a grande distância ou por os pilares serem de betão, bem encastrados na rocha, envolvidos por tubos de material isolante e dispondo de centragem forçada. A inclusão de mais pilares pode igualmente dever-se à configuração da estrutura a ser monitorizada.

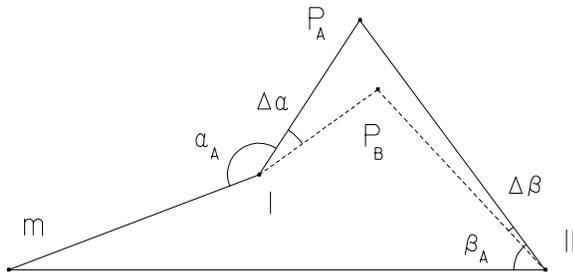


figura 4.5. Determinação de deslocamentos horizontais por triangulação e/ou trilateração: a escolha do método geodésico para a determinação de deformações supõe a instalação de uma rede de pontos; a observação da rede, repetida em diversas épocas, deve permitir a determinação, tão exacta quanto possível, da deformação efectiva que afecta um objecto

O valor de uma distância ou de um ângulo obtido por medições de campo nunca traduz o valor verdadeiro da grandeza que se pretende medir devido a erros que resultam de imperfeições instrumentais, de limitações do operador e das condições ambientais, podendo estes erros ser sistemáticos ou aleatórios. A exactidão de uma observação é uma indicação da proximidade dessa observação do valor verdadeiro da grandeza que se pretende medir; assim, para se obter observações exactas os aparelhos de medida devem ser regularmente calibrados por comparação com um padrão, o que permite a eliminação de erros sistemáticos. A precisão de uma observação está relacionada com a “perfeição” com que essa observação foi obtida, o que depende da qualidade do aparelho utilizado, da respectiva resolução (menor unidade de leitura) e da repetibilidade dessa observação, factores que influenciam os erros aleatórios que afectam essa observação (a repetibilidade traduz o grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de uma mesma grandeza, efectuadas nas mesmas condições: método de observação, observador, instrumento de medida, local, condições de utilização e em intervalos de tempo curtos entre medições; a repetibilidade pode ser expressa quantitativamente em termos de dispersão de resultados).

Como ilustração da diferença entre os termos exactidão e precisão, considere-se que uma distância é medida cinco vezes utilizando duas fitas métricas: com a primeira obtiveram-se os valores 736.80 m, 736.70 m, 736.75 m, 736.85 m, 736.65 m e com a segunda obtiveram-se os valores 736.42 m, 736.40 m, 736.40 m, 736.42 m, 736.41 m. Analizando a dispersão dos resultados pode dizer-se que a segunda série de observações é mais precisa que a primeira série; admitindo que o valor “verdadeiro” da distância (obtido por um método mais rigoroso) é 736.72 m, como os valores da primeira série de observações tendem a agrupar-se em torno do valor verdadeiro, esta série é mais exacta do que a segunda. Manifestamente, a segunda série foi obtida utilizando uma fita afectada por algum tipo de erro sistemático. Por esta razão, é fundamental utilizar aparelhos calibrados ou de alguma forma corrigir *a posteriori* a existência de algum sistematismo nas observações.

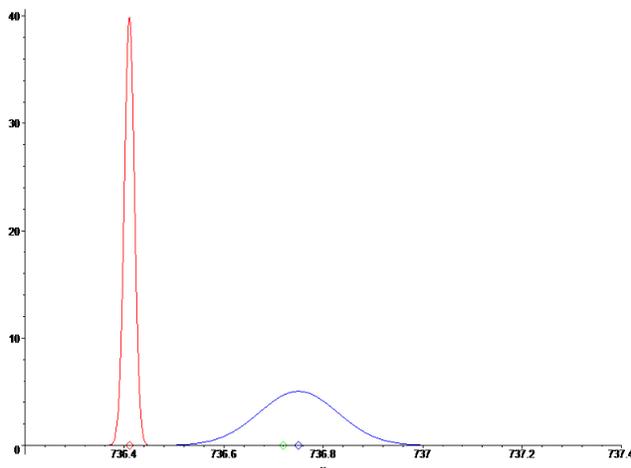


figura 4.6. Admitindo uma distribuição normal, interpretação gráfica das duas séries de observações, com a indicação dos respectivos valores médios, 736.75 e 736.41 assim como do valor médio “exacto”, 736.72 (os desvios padrão são, respectivamente, 0.0791 e 0.0100)

Normalmente em monitorização observam-se distâncias, ângulos e desníveis que são utilizados para calcular coordenadas (posições), que podem por sua vez ser utilizadas para obter áreas ou volumes. Para o efeito, o método dos mínimos quadrados é utilizado como ferramenta para processar observações redundantes e respectivas matrizes de variâncias-covariâncias e obter valores dos parâmetros e respectivas matrizes de variâncias-covariâncias. As grandezas a observar são consideradas como variáveis aleatórias sujeitas às leis estatísticas: os valores numéricos resultantes da medição de um dado elemento de uma rede constituem uma amostra da variável aleatória correspondente a esse elemento. Essa amostra (por vezes constituída por um único elemento) é utilizada para deduzir ou estimar o valor esperado μ e a variância σ^2 da variável aleatória respectiva. Os estimadores de μ e de σ^2 são a média aritmética e a variância da amostra de dimensão n:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 .$$

Se uma amostra consistir apenas num único elemento, não é possível utilizar a expressão anterior para o cálculo do desvio padrão; na prática isto não constitui um problema pois normalmente o aparelho e a metodologia utilizados para obter essa observação já foram utilizados noutras circunstâncias, de onde se obteve uma estimativa para s. Para além disto, os construtores dos aparelhos indicam para cada aparelho e em condições muito gerais o valor do desvio padrão de uma medição.

Em caso de dúvida, deve ser realizada uma série de testes consistindo em leituras repetidas de forma a determinar o desvio padrão das observações efectuadas por um determinado aparelho. Antes da concepção da rede é conveniente verificar a instrumentação disponível e confirmar o desvio padrão das respectivas observações, assim como calibrar regularmente os aparelhos de forma a evitar erros sistemáticos. É muito importante conhecer os requisitos de precisão impostos pelo dono da obra, de forma a que a rede seja correctamente concebida: não interessa obter uma precisão para as coordenadas melhor do que o pretendido pois isso implica normalmente um custo mais elevado do que o necessário nem interessa obter uma precisão para as coordenadas pior do que o pretendido pois isso implica um aumento do custo por ser necessário repetir as observações.

Note-se que \bar{x} é um estimador não enviesado de μ e que a sua variância é igual a σ^2/n , designando-se σ/\sqrt{n} por erro padrão de \bar{x} , normalmente aproximado por s/\sqrt{n} . Esta fórmula indica que quanto maior for a dimensão da amostra mais precisa é a determinação do parâmetro média da amostra; assim, por exemplo, para duplicar a precisão de uma dada grandeza medida (direcção, distância) é necessário quadruplicar o número de observações dessa grandeza. Note-se ainda que s^2 é um estimador não enviesado de σ^2 mas s é um estimador enviesado de σ ; no caso de se pretender um estimador não enviesado para σ deve utilizar-se o estimador

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \text{ com } c_n = \left(\frac{\sqrt{2} \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \right)^2, \text{ sendo } \Gamma(x) \text{ a função gama.}$$

n	2	3	4	5	10	15	20	30	90
$n-1$	1	2	3	4	9	14	19	29	89
c_n	0.64	1.57	2.55	3.53	8.51	13.51	18.51	28.50	88.50

tabela 4.1. Comparação dos valores de n , $n-1$ e c_n para a estimação não enviesada de σ

No caso de uma rede de apoio à implantação de uma obra, a posição das estações vai depender não só de constrangimentos topográficos que garantam a intervisibilidade entre estações (note-se, por exemplo, que uma visada que pareça livre de refração antes do início das obras pode vir a estar afectada por este tipo de erros durante a obra) mas também da dimensão e localização dos trabalhos de construção. As actividades topográficas têm frequentemente que dar prioridade aos trabalhos de construção que muitas vezes danificam o apoio previamente instalado. É então necessário um compromisso entre a materialização do apoio topográfico suficientemente perto do local de implantação da obra como garantia de precisão e suficientemente afastado de forma a que as actividades da obra não danifiquem as estações. Deste compromisso vão depender as propriedades de precisão da rede: uma rede que garanta este critério mas cujas estações venham a ser destruídas durante as obras é inútil, assim como é inútil uma rede concebida para estar imune às obras mas que por estar tão afastada do local de implantação da estrutura não consiga garantir os critérios de precisão da rede.

Uma rede pode ter outros objectivos para além da precisão, como a fiabilidade (uma rede é fiável quando os erros grosseiros nas observações não têm influência nos resultados do ajustamento pois as observações “controlam-se” mutuamente de tal forma que os erros são detectados com facilidade) e o custo: como em qualquer problema de optimização, define-se *a priori* uma função ou critério de risco (de ganho) que deve ser minimizada (maximizada) de acordo com o interesse, quer científico quer económico, da rede. Numa rede fiável, se existir um erro sistemático ou grosseiro nalguma observação, é possível detectar esse erro a um dado nível de confiança (consistência interna) e, se esse erro não for detectado, o respectivo efeito nas coordenadas pode ser estimado (consistência externa). A fiabilidade de uma rede é importante apenas no caso dessa rede ser utilizada para monitorização (de deformação): é possível conceber uma rede de tal forma que se um conjunto de estações sofrer uma dada deformação, então esse movimento pode ser detectado num dado nível de confiança. Em geral, o procedimento adoptado para a concepção de redes topográficas não resulta numa concepção óptima, no sentido em que não maximiza ou minimiza um ou mais objectivos da rede, mas apenas garante os requisitos de precisão.

Se uma rede for concebida para garantir os requisitos de precisão e for tecnicamente viável, o respectivo custo é avaliado; se for demasiado caro, a respectiva redução de custo pode obter-se efectuando menos observações ou utilizando uma instrumentação mais barata. Em qualquer dos casos os requisitos de precisão podem não vir a ser verificados. Esta relação entre requisitos de precisão e custos é crítica e ilustra a importância de impor requisitos de precisão que não sejam desnecessariamente altos.

A teoria da análise de deformações tornou-se popular na década de 70 do século XX, embora as primeiras aplicações datem dos anos vinte do século passado, com a determinação de deslocamentos no caso de grandes barragens na Suíça. Actualmente a análise de deformações é utilizada para o estudo de movimentos da crosta, deslizamentos ou subsidência do terreno e monitorização de estruturas (barragens, pontes, torres, etc.), pretendendo-se com este procedimento o estabelecimento e verificação de hipóteses em ciências naturais (geofísica, geologia, etc.) e a avaliação da segurança e desempenho de estruturas em engenharia civil, tendo em vista a protecção das populações (prevenção) e a determinação de eventuais responsabilidades em caso de acidentes. Este capítulo inclui métodos de monitorização de deformação baseados na observação repetida de redes geodésicas/topográficas; outros métodos utilizam outro tipo de instrumentação como pêndulos, clinómetros, extensómetros, termómetros, marégrafos, etc., cuja técnica de análise é similar.

O objecto ou área em estudo é normalmente representado por um conjunto discreto de pontos, que são monumentalizados ou identificados de forma duradoura, sendo estes pontos transformados numa rede através da realização de observações que estabelecem, em diferentes épocas, relações de posição entre eles. Se ocorrer deformação nesses intervalos, a modificação da posição relativa entre os pontos da rede resulta em observações (e portanto coordenadas) diferentes para cada ponto, sendo estas diferenças tipicamente da mesma ordem de magnitude dos erros de observação.

Normalmente consideram-se dois tipos de pontos numa rede de monitorização, os pontos de referência e os pontos objecto (ou pontos-alvo). No caso da figura 4.7a., a rede instalada consiste em pontos de referência (pontos estáveis) e pontos objecto, sendo a determinação dos deslocamentos (e das velocidades) dos pontos objecto relativamente aos pontos de referência o objectivo da análise (observações absolutas); no caso da figura 4.7b. existem apenas pontos objecto, separados em dois grupos por uma falha geológica, podendo aqui apenas ser determinados os deslocamentos relativos entre os dois blocos (é apenas possível detectar variações na geometria da rede e não se a rede como um todo sofreu um deslocamento ou uma rotação). A selecção dos pontos da rede é, na maioria dos casos, determinada pela topografia circundante e pela estrutura do próprio objecto, sendo o seu número dependente quer do objecto quer das deformações previstas (não é possível estabelecer uma regra geral para a selecção do número de pontos, sendo desejável uma abordagem multidisciplinar na resolução deste problema).

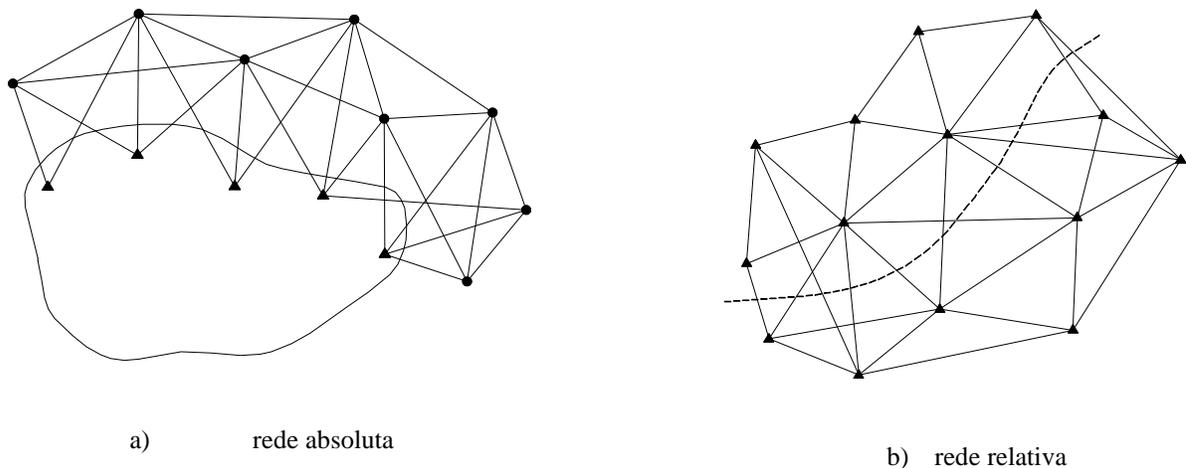


figura 4.7.: Redes de monitorização consistindo em pontos de referência (circunferências) e pontos objecto (triângulos).

Em teoria, todas as observações de uma dada época devem ser efectuadas em simultâneo; uma vez que é impossível verificar esta condição, devem ser tidas em consideração as deformações que ocorram durante o período de observação, embora em geral a taxa de deformação seja suficientemente pequena de forma que o respectivo efeito pode ser desprezado em comparação com o período de observação. Caso isto não se verifique, as observações correspondentes a uma dada época devem ser reduzidas a uma mesma referência temporal.

Para estudar as deformações que afectam um objecto ou uma área é necessário repetir as observações geodésicas em diferentes épocas, sendo cada conjunto de observações ajustado de forma independente. A partir das diferenças de coordenadas obtidas para os mesmos pontos da rede (deslocamentos), deduzem-se os parâmetros do modelo de deformação.

A época inicial define a posição de referência dos pontos da rede relativamente à qual serão determinados os desvios acumulados nas épocas de observação seguintes (para que um deslocamento seja considerado significativo em relação à época anterior, deve ser superior à precisão obtida, dentro da margem de erro considerada). Após a primeira repetição das observações, existindo dois conjuntos de dados disponíveis, efectua-se uma análise entre essas duas épocas, podendo os modelos utilizados ser estáticos (adopta-se um ponto de vista estritamente geométrico, sendo os resultados apresentados na forma de vectores deslocamento) ou dinâmicos (relaciona-se os deslocamentos com as forças que lhes deram origem). O resultado desta análise permite verificar a adequação da rede observada para a detecção da deformação e a selecção da frequência de futuras campanhas de observação. Para cada campanha adicional, é efectuada uma comparação com o conjunto inicial. Como na generalidade dos casos o quociente sinal/ruído é pequeno, é necessário um grande cuidado na avaliação da qualidade das observações geodésicas e na especificação do modelo matemático adoptado (erros grosseiros ou sistemáticos não detectados nas observações ou variâncias *a priori* incorrectamente adoptadas traduzem-se em deformações aparentes que contaminam o resultado). É assim da maior importância utilizar os métodos e a informação adequados para o desenvolvimento de um modelo matemático realista, que descreva de forma verosímil a realidade.

Sendo p o número de pontos da rede (3D), para a época k obtém-se após o processamento, o vector $\hat{\mathbf{x}}_k$ de dimensão $n=3p$ que contém as coordenadas estimadas dos pontos da rede, isto é, $\hat{\mathbf{x}}_k^T = (\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{z}_2, \dots, \hat{x}_p, \hat{y}_p, \hat{z}_p)_k$, a matriz de variâncias-covariâncias $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}_k}$ de dimensão $n \times n$ associada à estimativa das coordenadas e a variância estimada por unidade de peso S_0^2 que descreve o estado do objecto na época considerada. A diferença de coordenadas entre as épocas de observação k e ℓ é dada pelo vector $\bar{\Delta} = \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_\ell = (\Delta_1^T, \Delta_2^T, \dots, \Delta_p^T)^T$, com $\Delta_i^T = (\hat{x}_k - \hat{x}_\ell, \hat{y}_k - \hat{y}_\ell, \hat{z}_k - \hat{z}_\ell)_i$, $i=1, \dots, p$ representando os deslocamentos do ponto i . Frequentemente, o cálculo de $\bar{\Delta}$ pode tornar-se mais complexo pois a configuração da rede pode alterar-se de época para época, ou porque alguns pontos são danificados, ou porque é necessário instalar mais alguns pontos para fortalecer a geometria da rede, ou porque são disponibilizados novos aparelhos que permitem a realização de observações adicionais, etc.

Para se obter os deslocamentos absolutos dos pontos objecto relativamente aos pontos de referência, deve assegurar-se a estabilidade destes últimos pois caso contrário a análise e interpretação da deformação pode ter distorções significativas. A figura 4.8. ilustra a situação onde os pontos A, B, C e D são pontos de referência e os restantes são pontos objecto. Se o ponto B sofreu um deslocamento que não foi identificado entre 2 campanhas de observação e se esse ponto for utilizado em ambas as campanhas, juntamente com o ponto A, para calcular as coordenadas dos pontos restantes, incluindo os pontos C e D, todos estes vão apresentar movimentos significativos, mesmo que na realidade possam ter permanecido estáticos.

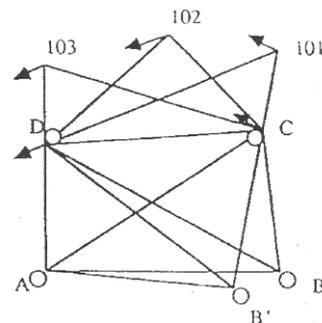


figura 4.8. Influência de pontos de referência instáveis

Na fase de projecto, é necessário decidir a configuração de uma rede geodésica, ou seja, a localização dos pontos e o tipo de observações a realizar. A análise dos dados correspondentes a uma dada época é efectuada de acordo com os seguintes passos, que dependem do padrão de deformação esperado e do tipo de rede geodésica (no caso de existirem apenas pontos objecto, a análise tem início no segundo passo):

- Triagem dos pontos de referência e eliminação dos pontos instáveis
- Triagem dos pontos objecto para detecção de movimentos individuais, exclusão desses pontos ou modelação do respectivo movimento
- Planeamento do modelo de deformação
- Verificação do modelo através de testes estatísticos

Recentemente, em diversos projectos de monitorização, têm sido utilizadas estações totais motorizadas (TPS) com reconhecimento automático de alvos (ATR), eventualmente conjugadas com receptores GPS de alta precisão, pois as duas tecnologias são complementares: o sistema GPS fornece directamente coordenadas de pontos, enquanto que as estações totais operam em áreas onde o sinal GPS pode não ser recebido.

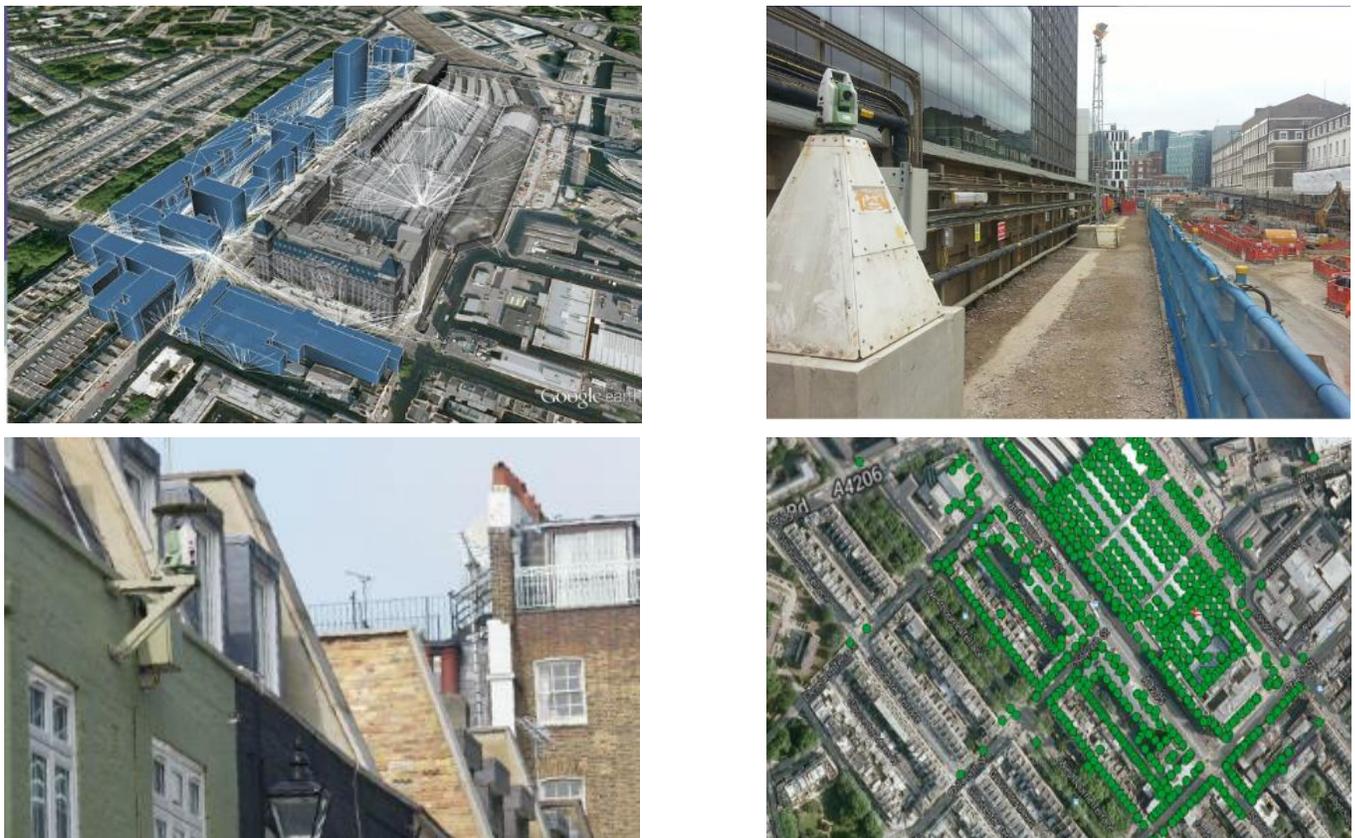


figura 4.9. Rede dinâmica instalada para apoio das obras da estação de Paddington, Londres

Um exemplo deste tipo de redes dinâmicas, onde as observações são efectuadas de forma automática e em tempo real é a rede instalada para apoio das obras na estação de metropolitano de Paddington, em Londres, que inclui 52 estações totais Leica TM 30 S e cerca de 1800 alvos (figura 4.9.), que são continuamente observados ao longo do tempo de acordo com um ciclo de observações pré-configurado, gerando um conjunto de observações muito extenso que é processado pelo software GeoMos (software muito flexível da Leica para monitorização automática de deformações). As estações totais são instaladas de forma permanente durante a duração da obra em locais estáveis de forma a assegurar que as coordenadas calculadas a partir desses pontos são obtidas num referencial consistente para simplificar a detecção de movimento dos alvos.

No entanto, em muitos locais, esta condição não pode ser completamente verificada pois devido a constrangimentos da obra, os sensores podem não ser colocados em zonas estáveis. Para ultrapassar este problema, recorre-se a um conjunto de pontos de controlo disseminados em torno da zona instável de forma a monitorizar a estabilidade dos pontos estação através de um procedimento designado por estação livre (as estações devem dispor de um compensador bi-axial muito rigoroso que permita a correcção das direcções devido à eventual falta de verticalidade do eixo principal do aparelho). Os pontos de controlo são utilizados para controlar cada ciclo completo de medições; no caso de se utilizar mais do que um ponto estação na rede, por razões de cobertura do objecto ou para aumentar a fiabilidade (figura 4.10.), é necessário relacionar todos os pontos estação num referencial comum (o algoritmo de cálculo de estação livre utiliza as observações efectuadas do ponto estação para os pontos de controlo para calcular as coordenadas desse mesmo ponto e para realinhar o índice de origem do limbo azimutal).

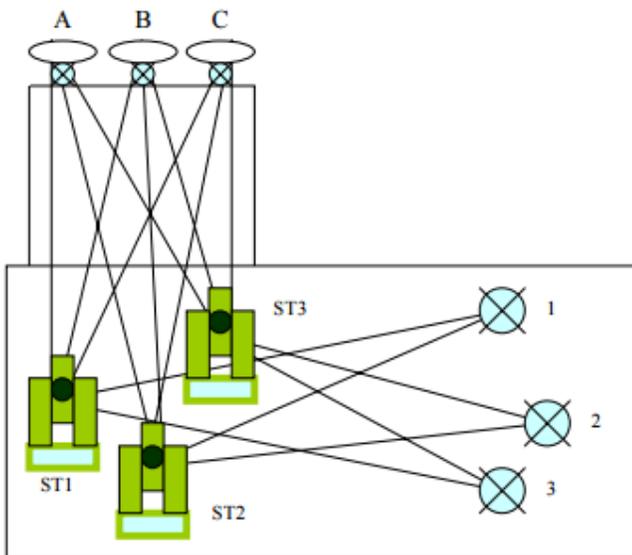


figura 4.10. Os pontos A, B, C são pontos de controlo cujas coordenadas são continuamente determinadas por GPS e nos quais se colocaram alvos (prismas), permitindo a realização de pontarias a partir dos pontos estação ST1, ST2, ST3, nos quais se encontram estacionadas de forma permanente estações totais robotizadas (as coordenadas dos pontos estação são assim continuamente monitorizadas). Os pontos 1,2,3 são pontos objecto colocados na estrutura que se pretende monitorizar.

A tabela 4.2. indica a precisão obtida na coordenação de um ponto por GNSS no caso de bases curtas (3.3 km de comprimento, 10 m de desnível) para o caso de pós processamento, o que permite avaliar se a utilização de redes dinâmicas pode ser uma opção num caso concreto de monitorização (a incerteza nas coordenadas dos pontos de controlo propaga-se primeiro para os pontos estação e posteriormente para os pontos objecto, de acordo com as características dos aparelhos utilizados (tabela 4.3.), podendo nalguns casos este procedimento ser incompatível com movimentos milimétricos que se pretende detectar: nas barragens de betão, as tolerâncias impostas para os erros são 1 mm em planimetria e 0.2 mm em altimetria nos pontos objecto).

	L1		L1/L2	
	precisão 2D	precisão cota (95%)	precisão 2D (95%)	precisão cota (95%)
10 m	7.2 mm	12.4 mm	5.2 mm	11.8 mm
1 h	3.8 mm	7.0 mm	3.8 mm	7.2 mm
24 h	1.8 mm	2.1 mm	1.8 mm	2.0 mm

tabela 4.2 Melhoria na precisão do posicionamento GNSS com o aumento do intervalo de tempo de observação

	incerteza em direcção (")	incerteza em distância (mm)
Leica TS 30	0.5	0.6+1ppm
Leica TM 30 S	0.5	0.6+1ppm
Leica TCA 2003	0.5	1.0+1ppm
Leica TCA 1800	1.0	1.0+2ppm
Leica TS 09	1.0	1.0+1.5ppm
Leica TCA 2001 M	1.0	2.0+2ppm
Leica TPS 2001+	1.0	1.0+1.5ppm
Leica TDRA 6000	0.5	0.3+13 μ m/m
Leica TDM 5005	0.5	0.3+1ppm
Leica TDA 5005	0.5	0.3+1ppm
Leica TM 5100 ^a	0.5	1.0+2ppm
Sokkia NET1	1.0	1.1+1ppm
Sokkia NET05	0.5	0.5+1ppm
Trimble S8	1.0	1.0+1ppm

tabela 4.3. Características das estações totais utilizadas em monitorização de estruturas

4.3. Correção e redução das observações

Os valores observados dos elementos de uma rede de monitorização devem, em geral, ser corrigidos e reduzidos antes de poderem ser utilizados em conjunto com os modelos funcional e estocástico (estatístico) para estimar os parâmetros, que em geral são coordenadas. O espaço físico onde são realizadas as observações contém a atmosfera e está sujeito ao campo gravítico, ao observador, às diversas componentes do aparelho e a muitos outros factores que influenciam de alguma forma a medição efectuada. Por outro lado, o modelo no qual o ajustamento é efectuada integra apenas elementos matemáticos. É assim necessário aplicar correcções para transformar as observações efectuada de forma a poderem ser utilizadas no ajustamento, correcções essas por vezes obtidas de forma empírica, que pretendem representar o melhor possível os efeitos dos elementos físicos: por exemplo, a expressão da refração vertical pode ser utilizada para corrigir o ângulo zenital observado, removendo o efeito da atmosfera terrestre, obtendo-se o valor que seria observado no vácuo. As expressões utilizadas para corrigir as observações não são, em geral, exactas, porque o conhecimento do fenómeno associado também não é exacto.

O cálculo de uma correcção com base numa fórmula não é a única forma de reduzir os erros sistemáticos. Como exemplo, conceptualmente, num teodolito o eixo de colimação é perpendicular ao eixo de rotação, embora na prática não seja possível realizar perfeitamente esta condição, ocorrendo portanto um erro de colimação. Embora seja possível formular expressões para calcular as correcções a aplicar aos valores observados, a forma mais conveniente de ultrapassar este tipo de erro é utilizar um procedimento de observação que implique o cancelamento do erro ao ser efectuada a média das leituras conjugadas. Devem, portanto, ser seguidos procedimentos de observação e de registo que possibilitem a detecção de erros. Devem igualmente ser registados dados auxiliares relativos à temperatura e pressão atmosférica, valores de calibração, etc.; após a eliminação dos erros grosseiros, os dados são utilizados em modelos lineares ou linearizados juntamente com a matriz cofactor *a priori* ou a matriz dos pesos das observações para estimar os parâmetros e as observações ajustadas. A estimação por mínimos quadrados dos parâmetros e das observações ajustadas permite calcular a variância *a posteriori*, podendo utilizar-se testes estatísticos para determinar se a estimação obtida é satisfatória, caso em que se aceitam os resultados. Se o resultado dos testes não for satisfatório deve procurar-se a causa (em geral o teste não indica se o problema reside no modelo funcional ou no modelo estatístico). Algumas observações podem ter resíduos (correcções) demasiado grandes, indicando que podem ter sido afectadas por influências não aleatórias (por exemplo erros de centragem); nesses casos, pode ou não ser possível aplicar uma correcção às observações. Caso seja necessário desprezar observações, o número de graus de liberdade da estimação reduz-se, tornando os resultados menos fiáveis, podendo no limite obrigar à repetição dessas observações.

A imperfeição no conhecimento da realidade física significa que os erros sistemáticos vão estar sempre presentes nos dados, sendo necessário garantir que tenham uma magnitude insignificante em cada caso particular. Quando uma grandeza (correcção) c é calculada utilizando uma expressão do tipo $c = f(p, q, \dots, t)$, onde os parâmetros p, q, \dots, t representam as observações e/ou constantes que intervêm no cálculo, pode calcular-se o efeito em c de erros de pequena magnitude dp, dq, \dots, dt em p, q, \dots, t através do diferencial total

$$dc = \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) dq + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) dt .$$

Após a remoção de todos os erros sistemáticos devidos a influências físicas, é necessário considerar outro tipo de procedimentos: por exemplo, após remover o efeito da refração atmosférica na distância medida por um distanciómetro é necessário para efeitos de posicionamento modificar a distância inclinada para a correspondente distância horizontal. Este tipo de modificação é designado por redução. As fórmulas correspondentes às reduções são conhecidas de forma exacta, pelo que a respectiva aplicação não introduz erros (embora alguns parâmetros que intervenham nessas fórmulas possam ter incertezas, cuja influência pode ser determinada através da expressão anterior. Por vezes é necessário o conhecimento prévio de forma suficientemente aproximada da posição dos pontos de forma a ser possível a aplicação das correcções ou das reduções às observações, efectuando-se nestas circunstâncias um cálculo preliminar das coordenadas utilizando os dados originais, utilizam-se estas coordenadas para o cálculo das correcções ou reduções e recalculam-se as coordenadas definitivas a partir das observações corrigidas. Os métodos normalmente utilizados permitem efectuar correcções com precisão da ordem de algumas partes por milhão (ppm) no caso das distâncias e de alguns segundos de arco no caso das direcções, o que é adequado para a maior parte dos levantamentos; no entanto, em trabalhos de alta precisão, em particular em zonas montanhosas ou desérticas, onde ocorrem condições atmosféricas anormais, a não medição ou registo dos valores necessários para o processamento podem conduzir a erros significativos nas distâncias e nas direcções.

4.4. Definição de *datum*

A posição não é uma grandeza absoluta, isto é, a posição de um ponto no espaço requer não só a especificação de 3 parâmetros independentes (coordenadas) mas também dos elementos do *datum* (referencial), devendo este último ser sempre considerado na discussão da precisão e da exactidão das coordenadas. No caso das redes topográficas, embora a posição relativa dos pontos seja de grande importância prática, as respectivas coordenadas só podem ser obtidas num *datum* (local, regional ou global) adequadamente definido, que permita o cálculo das posições em função das observações realizadas. Fisicamente, numa rede 1D de nivelamento (de gravimetria) isto quer dizer que enquanto não for fixada uma cota (um valor da gravidade) qualquer translação em z mantém os desníveis mas não permite a atribuição de cota aos pontos da rede; numa rede 2D, qualquer conjunto de uma translação no plano, uma rotação em z e um escalamento mantém a posição relativa dos pontos da rede, não permitindo a determinação das coordenadas dos pontos da rede. Frequentemente é difícil decidir se os deslocamentos detectados numa rede são o resultado de movimentos reais, podendo dever-se a erros nas observações ou a alterações no *datum* adoptado em diferentes épocas.

Um *datum* usual no posicionamento espacial é constituído por um sistema de eixos ortogonais e directos (X,Y,Z), que tem que ser localizado no espaço. Associado à definição do *datum* está a unidade de comprimento utilizada no cálculo dos parâmetros (coordenadas). Uma forma de o realizar é seleccionar ou materializar uma origem na proximidade da zona de interesse; a orientação dos eixos pode fixar-se alinhando um deles (convencionalmente o eixo Z) segundo a direcção da força da gravidade na origem (utilizando nivelas) e alinhando outro eixo na direcção de um outro ponto. Esta definição é explícita na medida em que se baseia em pontos que têm existência física. A definição do *datum* pode ser implícita, isto é, não pode ser fisicamente realizado: é o caso de um *datum* espacial global com origem no centro de massa da Terra, o eixo Z alinhado segundo o eixo médio de rotação da Terra e o eixo X definido de tal forma que o plano XZ contenha o meridiano médio de Greenwich. Outro exemplo é a superfície de um elipsóide, a partir da qual se definem 3 parâmetros independentes necessários para definir a posição de um ponto: latitude, longitude e altitude elipsoidais. Um referencial espacial tridimensional requer a definição de sete elementos do *datum*: um elemento de escala, três elementos de localização da origem do referencial e três elementos de rotação dos três eixos; para o posicionamento num plano devem ser definidos quatro elementos: um elemento de escala, dois elementos de localização da origem do referencial e um elemento de rotação dos dois eixos. O número necessário e suficiente e o tipo de elementos do *datum* pode ser obtido através de uma combinação apropriada de observações: por exemplo, em duas dimensões, define-se um *datum* fixando as coordenadas de dois pontos da rede, assim como também se define um *datum* fixando as coordenadas de um ponto de rede, uma distância entre dois pontos da rede e o azimute (rumo) entre dois pontos da rede.

4.5. Modelo funcional e modelo estocástico

A generalidade das variáveis observadas em topografia (direcções, distâncias, desníveis, etc.) são variáveis aleatórias que devido a flutuações probabilísticas (classicamente conhecidas como erros, actualmente como incertezas) tomariam valores diferentes se as observações fossem repetidas. No caso de existir uma única observação para cada variável com interesse para o problema em questão, obtêm-se estimativas para as incógnitas que são consistentes com o modelo utilizado, não se justificando o ajustamento das observações. Se, pelo contrário, existirem mais observações do que aquelas estritamente

necessárias para resolver univocamente o problema, é necessário efectuar um ajustamento de forma a garantir estimativas consistentes (neste último caso, combinações diferentes de observações conduzem a estimativas diferentes para as incógnitas, isto é, inconsistência nos resultados; uma vez ajustadas, qualquer subconjunto de observações de dimensão n_0 conduz à mesma solução).

Efectuar uma medição significa realizar uma operação física, que consiste frequentemente em diversas operações elementares tais como estacionar um aparelho, apontar, registar a leitura; o resultado numérico obtido neste procedimento designa-se por medição, que depende das circunstâncias com que foi obtida. Medir significa comparar com um padrão, sendo fundamental registar as unidades envolvidas nesta operação. Antes da realização do trabalho de campo, é necessário definir o modelo matemático a utilizar, determinado através de um dado número de variáveis e da relação entre essas variáveis. O modelo matemático, por sua vez, tem duas componentes: o modelo funcional e o modelo estocástico. O modelo funcional é a componente mais óbvia, pois descreve as características geométricas do problema, enquanto que o modelo estocástico descreve as propriedades estatísticas dos elementos envolvidos no modelo funcional. O modelo funcional exprime uma simplificação da realidade física existente, estabelecendo relações matemáticas entre as observações e, eventualmente, com outras quantidades desconhecidas designadas por parâmetros, que normalmente não podem ser medidos directamente (como é o caso de coordenadas planimétricas, altitudes, coeficientes de refacção, etc.). Pode acontecer o modelo funcional ser apropriado mas o(s) aparelho(s) utilizado(s) para efectuar as observações não garantir(em) precisão suficiente, assim como também pode acontecer o(s) aparelho(s) utilizado(s) ser(em) adequado(s) mas a geometria seleccionada não ser suficientemente sólida ou nem sequer relacionar todas as observações entre si. Deve portanto existir uma relação estreita entre os modelos funcional e estocástico de forma a serem obtidos os resultados pretendidos, o que pode ser previsto através de uma simulação. Pode ainda acontecer o modelo funcional estar incompleto: por exemplo, o factor de escala para alguma ou para a totalidade das observações de distância pode ter sido erradamente omitido, como pode acontecer quando um novo levantamento é ajustado às estações de um levantamento antigo dando origem a uma discrepância nas coordenadas obtidas.

Naturalmente, o objectivo é definir um modelo matemático (figura 4.11.) que represente o melhor possível a realidade, embora a respectiva forma dependa do objectivo do ajustamento. Frequentemente, as observações originais são corrigidas ou reduzidas antes de serem utilizadas no ajustamento. Por exemplo, a refacção afecta de forma significativa as observações de ângulos verticais; se as observações originais forem utilizadas directamente, o modelo utilizado tem que ser suficientemente geral para prever a estimação dos parâmetros da refacção, quer para cada estação quer para a totalidade da rede. Como alternativa, as observações originais podem ser corrigidas do efeito da refacção com base num modelo atmosférico, utilizando-se as observações corrigidas no modelo.

As observações quase sempre definem quantidades relativas, sendo necessário seleccionar de forma mais ou menos arbitrária um sistema de referência – estabelecimento do *datum* - no qual os parâmetros possam ser calculados, devendo distinguir-se de entre os diversos componentes da rede os que são dependentes e independentes do *datum*, de forma a poder seleccionar um *datum* cuja influência seja mínima nos parâmetros e respectiva precisão.

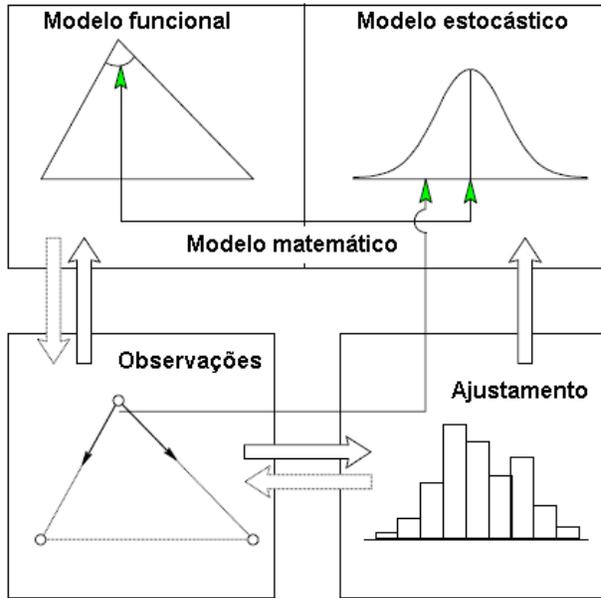


figura 4.11. modelo matemático

Por forma a determinar os u parâmetros desconhecidos são realizadas n observações L_i , obtendo-se o vector $\bar{L}_{n \times 1}$. Supõe-se que $n > u$, de tal forma que o sistema de equações que relaciona as observações e os parâmetros é inconsistente (isto é, qualquer conjunto mínimo de observações determina valores diferentes dos parâmetros). Devido à natureza estocástica das observações, estas são afectadas por erros aleatórios, tendo-se $E(\bar{L}_{n \times 1}) = \tilde{\bar{L}}_{n \times 1}$, representando este último vector as observações ajustadas. A partir do modelo funcional $\bar{F}_{n \times u}$, as observações vão produzir estimativas $\hat{X}_{u \times 1}$ dos parâmetros tal que $E(\hat{X}_{u \times 1}) = \tilde{\bar{X}}_{u \times 1}$, em que $\tilde{\bar{X}}_{u \times 1}$ é o vector dos parâmetros ajustados, tal que

$$\tilde{\bar{L}}_{n \times 1} = \bar{F}_{n \times u}(\tilde{\bar{X}}_{u \times 1}),$$

sendo este modelo em geral não linear. Substituindo $\tilde{\bar{L}}_{n \times 1}$ pelo vector das observações efectuadas, $\bar{L}_{n \times 1}$ e incluindo o vector dos resíduos $\bar{v}_{n \times 1}$, obtem-se o sistema de equações $\hat{L}_{n \times 1} = \bar{L}_{n \times 1} + \bar{v}_{n \times 1} = \bar{F}_{n \times u}(\hat{X}_{u \times 1})$. Para ser possível o tratamento matemático do problema do ajustamento, é necessário linearizar o modelo funcional anterior, na forma

$$\hat{L}_{n \times 1} = \bar{F}_{n \times u}(\bar{X}_{u \times 1}^0) + \left(\frac{\partial \bar{F}_{n \times u}(\bar{X}_{u \times 1})}{\partial \bar{X}_{u \times 1}} \right)_0 (\hat{X}_{u \times 1} - \bar{X}_{u \times 1}^0)$$

em que $\hat{X}_{u \times 1} = \bar{X}_{u \times 1}^0 + \hat{x}_{u \times 1}$, sendo $\bar{X}_{u \times 1}^0$ a aproximação inicial do valor dos parâmetros, necessário para inicializar o processo iterativo de cálculo dos parâmetros e $\hat{x}_{u \times 1}$ sendo a actualização em cada iteração do valor dos parâmetros. De forma idêntica tem-se $\hat{L}_{n \times 1} = \bar{L}_{n \times 1}^0 + \hat{\ell}_{n \times 1} = \bar{L}_{n \times 1}^0 + \bar{\ell}_{n \times 1} + \bar{v}_{n \times 1}$.

Assim, o modelo funcional linearizado é da forma

$$\hat{L}_{n \times 1} - \bar{L}_{n \times 1}^0 = \hat{\ell}_{n \times 1} = \bar{\ell}_{n \times 1} + \bar{v}_{n \times 1} = A\hat{x}_{u \times 1},$$

onde A é a matriz dos coeficientes dos parâmetros.

O modelo estocástico descreve as características estatísticas das observações, de tal forma que $E(\bar{\ell}_{n \times 1}) = A\bar{x}_{u \times 1}$. A matriz $\Sigma_{\bar{\ell}\bar{\ell}}$ das variâncias-covariâncias das observações, cujos elementos são, na diagonal principal as variâncias σ_i^2 das observações ℓ_i , $i=1, \dots, n$ e nas restantes posições as covariâncias ρ_{ik} entre as observações ℓ_i e ℓ_k , relaciona-se com a matriz cofactor $Q_{\bar{\ell}\bar{\ell}}$ através de $\Sigma_{\bar{\ell}\bar{\ell}} = \sigma_0^2 Q_{\bar{\ell}\bar{\ell}}$, sendo σ_0^2 a variância *a priori* por unidade de peso, que funciona como um factor de escala, pois na maior parte dos casos apenas é conhecida informação relativa quanto às propriedades estocásticas das observações. Tem-se que $Q_{n \times n}^{-1} = P_{n \times n}$, sendo $P_{n \times n}$ a matriz dos pesos das observações, tal que $P_{i,j} = \sigma_0^2 \Sigma_{i,j}^{-1}$ representa o peso de uma dada observação; uma observação tem o peso igual à unidade se $\sigma_i^2 = \sigma_0^2$, razão pela qual se designa σ_0^2 variância *a priori* por unidade de peso. A quantidade σ_0^2 é originalmente desconhecida, sendo a respectiva estimativa obtida por $s_0^2 = v_{l \times n}^T P_{n \times n} \bar{v}_{n \times 1} / (n - u)$, designada por variância por unidade de peso *a posteriori*, tal que $E(s_0^2) = \sigma_0^2$.

O ajustamento é efectuado acrescentando ao modelo matemático definido pelo sistema de equações $\hat{\ell}_{n \times 1} = \bar{\ell}_{n \times 1} + \bar{v}_{n \times 1} = A_{n \times u} \hat{x}_{u \times 1}$ (modelo funcional) e $\Sigma_{n \times n} = \sigma_0^2 Q_{n \times n}$, $P_{n \times n} = Q_{n \times n}^{-1}$ (modelo estocástico) o critério dos mínimos quadrados $\bar{v}_{l \times n}^T P_{n \times n} \bar{v}_{n \times 1} = \text{mínimo}$, obtendo-se:

$$N_{u \times u} \hat{x}_{u \times 1} = W_{u \times 1}, \quad N_{u \times u} = A_{u \times n}^T P_{n \times n} A_{n \times u}, \quad W_{u \times 1} = A_{u \times n}^T P_{n \times n} \bar{\ell}_{n \times 1}$$

$$\hat{x}_{u \times 1} = N_{u \times u}^{-1} W_{u \times 1}$$

$$\bar{v}_{n \times 1} = A_{n \times u} \hat{x}_{u \times 1} - \bar{\ell}_{n \times 1}$$

$$\hat{\ell} = \bar{\ell} + \bar{v}$$

$$\hat{L} = \bar{L} + \bar{v}$$

$$\hat{X} = \bar{X}_0 + \hat{x}$$

$$\hat{L} = F(\hat{X})$$

A solução do problema do ajustamento é obtida através de multiplicações, adições e subtrações de matrizes, operações que são efectuadas sem problemas de maior. Apenas duas excepções podem acontecer:

- 1) A inversão da matriz cofactor de forma a obter a matriz peso $P_{n \times n} = Q_{n \times n}^{-1}$ implica que a matriz $Q_{n \times n}$ (ou a matriz $\Sigma_{n \times n}$) seja definida positiva (seja M uma matriz hermítica $n \times n$; M diz-se definida positiva se verificar alguma das condições seguintes: a) para todos os vectores não nulos $\bar{z} \in C$ tem-se $\bar{z}^* M \bar{z} > 0$, onde \bar{z}^* representa o conjugado transposto de \bar{z} b) todos os valores próprios λ_i de M são positivos; uma matriz hermítica é uma matriz quadrada de elementos complexos que tem a propriedade de ser igual à respectiva transposta conjugada que, no caso particular de os elementos dessa matriz terem apenas parte real, se reduz a uma matriz simétrica tal que $M = M^T$).

2) A inversão da matriz normal $N_{u \times u} = A_{u \times n}^T P_{n \times n} A_{n \times u}$ só é possível se $C(A_{n \times u}) = C =$ característica da matriz A for igual a u (nesse caso N é uma matriz regular); caso contrário, isto é, se a característica da matriz $A_{n \times u}$ for inferior a u , a matriz $N_{n \times n}$ é singular, não tendo inversa.

Num ajustamento clássico de uma rede geodésica tem-se $C = u$, donde $d = 0$ e portanto a inversão pode efectuar-se sem dificuldade. Em geral, passa despercebido que a condição $C = u$ é forçada por imposições mais ou menos arbitrárias, que permitem remover o *deficit* de característica $d = u - C$ da matriz $A_{n \times u}$, o que constitui o problema do *datum* geodésico.

Nestas condições $N_{u \times u}^{-1}$ é única e a estimativa dos parâmetros

$$\hat{\bar{x}}_{u \times 1} = (A_{u \times n}^T P_{n \times n} A_{n \times u})^{-1} (A_{u \times n}^T P_{n \times n} \bar{\ell}_{n \times 1})$$

é não enviesada pois

$$E(\hat{\bar{x}}) = (A^T P A)^{-1} (A^T P E(\bar{\ell})) = (A^T P A)^{-1} (A^T P A \tilde{\bar{x}}) = (A^T P A)^{-1} (A^T P A) \tilde{\bar{x}} = I \tilde{\bar{x}} = \tilde{\bar{x}}.$$

Tem-se ainda

$$Q_{u \times u}^{\text{parâmetros}} = (A^T P A)^{-1},$$

$$Q_{n \times n}^{\text{resíduos}} = Q_{n \times n}^{\text{obs}} - A (A^T P A)^{-1} A^T,$$

$$Q_{n \times n}^{\text{ajustadas}} = Q_{n \times n}^{\text{obs}} - Q_{n \times n}^{\text{resíduos}}.$$

Quando numa rede se tem $C < u$ (situação mais geral), ou seja, $d > 0$, a rede diz-se livre, no sentido em que qualquer alteração de posição dos pontos da rede que mantenha as observações, através de translações, rotações ou escalamentos, não é detectada; neste caso $N_{u \times u}$ é singular e $N_{u \times u}^{-1}$ não existe. Torna-se então útil a definição de inversa generalizada, $N_{u \times u}^-$ da matriz $N_{u \times u}$ tal que $N_{u \times u} N_{u \times u}^- N_{u \times u} = N_{u \times u}$: no caso em que $N_{u \times u}$ é singular, $N_{u \times u}^-$ não é única e portanto $N_{u \times u}^- N_{u \times u} \neq I_u$. Os parâmetros são obtidos de

$$\hat{\bar{x}}_{u \times 1} = N_{u \times u}^- A_{u \times n}^T P_{n \times n} \bar{\ell}_{n \times 1},$$

cujo valor esperado é

$$E(\hat{\bar{x}}_{u \times 1}) = N_{u \times u}^- A_{u \times n}^T E(\bar{\ell}_{n \times 1}) = N_{u \times u}^- N_{u \times u} \tilde{\bar{x}}_{u \times 1} \neq \tilde{\bar{x}}_{u \times 1},$$

o que mostra que a estimativa dos parâmetros no caso de um sistema singular é enviesada e portanto os parâmetros não são quantidades estimáveis.

O método clássico de ajustamento de uma rede livre bidimensional consiste em estabelecer o *datum* fixando, no caso de se medirem direcções e distâncias, um ponto e uma direcção para um segundo ponto e no caso de se medirem apenas direcções, dois pontos, deixando desta forma a rede de ser livre para translações, rotações e escalamentos, ou seja, fixam-se, no máximo quatro parâmetros. Numa rede tridimensional estabelece-se o *datum* fixando, no máximo, sete parâmetros e numa rede a uma dimensão (rede de nivelamento) fixa-se um parâmetro.

Analizando o eventual *deficit* d de característica da matriz $A_{n \times u}$, podem ser distinguidas causas externas, relacionadas com o estabelecimento do *datum* e internas, relacionadas com deficiências de configuração da rede. O *deficit* de característica relacionado com o *datum* é identificado através do *deficit* de característica C_{datum} da matriz $A_{n \times u}$, isto é, da diferença entre o número de parâmetros e o número de colunas linearmente independentes de $A_{n \times u}$: $d_{datum} = u - C_{datum}$.

O *deficit* de característica relacionado com a configuração tem como consequência que nem todos os pontos da rede podem ser determinados: designando por $C_{configuração}$ a característica de configuração, definida como o número n^l de linhas linearmente independentes da matriz $A_{n \times u}$, tem-se $n^l = u - d_{datum}$, o que significa que são necessárias e suficientes n^l observações independentes entre si para determinar a rede. Se existirem n observações independentes com $n \leq n^l$, há um *deficit* de característica $d_{configuração} = n^l - n$, com $C_{configuração} = n^l - d_{configuração}$. Os exemplos seguintes ilustram os dois tipos de *deficit* de característica:

1) Rede com *deficit* externo de característica relacionado com a definição do *datum*:

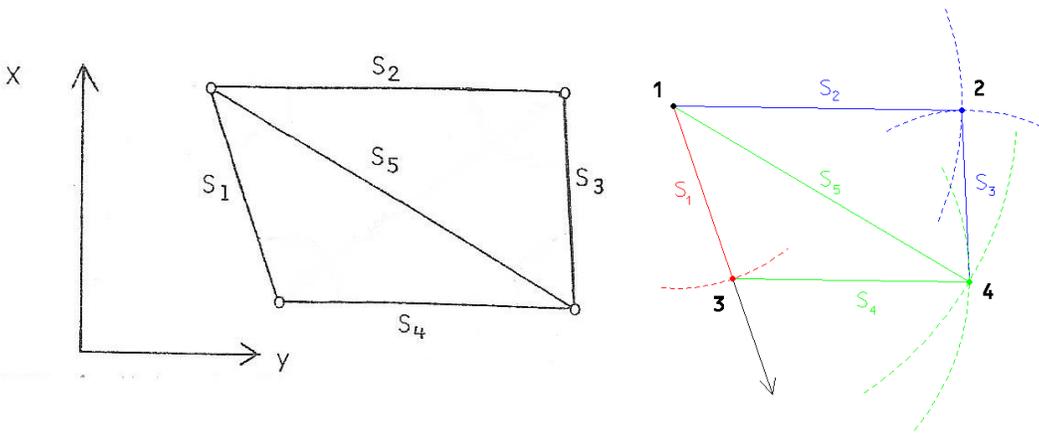


figura 4.12. Rede com *deficit* interno de característica relacionado com a definição do *datum*

Tendo sido efectuadas as 5 observações de distância indicadas na figura 4.12., para obter as coordenadas dos 4 pontos da rede é necessário definir um *datum*; supondo que se fixam arbitrariamente as coordenadas do ponto 1 e que se se fixa a direcção do ponto 1 para o ponto 3 (3 parâmetros no total), obtêm-se as coordenadas do ponto 3 a partir da distância S_1 como intersecção da direcção fixada com uma circunferência de centro no ponto 1 e raio S_1 ; conhecidas as coordenadas dos pontos 1 e 3, obtêm-se as coordenadas do ponto 4 como sendo a intersecção da circunferência com centro no ponto 1 e raio S_5 com a circunferência com centro no ponto 3 e raio S_4 ; as coordenadas do ponto 2 são obtidas como sendo a intersecção da circunferência com centro no ponto 1 e raio S_2 com a circunferência com centro no ponto 4 e raio S_3 . Resumindo, $n=5$, $n_0=5$, $r=n-n_0=0$, $u=5$, $c=r+u=5$.

Posto o problema de outra forma, pretende-se obter as coordenadas planas dos quatro pontos que constituem a rede, pelo que $u = 8$; tendo sido efectuadas 5 observações de distância S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , ou seja, $n=5$, tem-se $d_{datum} = 8 - 5 = 3$, pelo que a rede é livre, sendo necessário fixar as coordenadas de um ponto (2 parâmetros correspondentes a uma translação no plano) e uma direcção (1 parâmetro correspondente a uma rotação no plano), o suficiente para que $d = 0$, pois a escala da rede é fixada pelas próprias observações de distância.

2) Rede com *deficit* interno de característica relacionado com a configuração da rede:

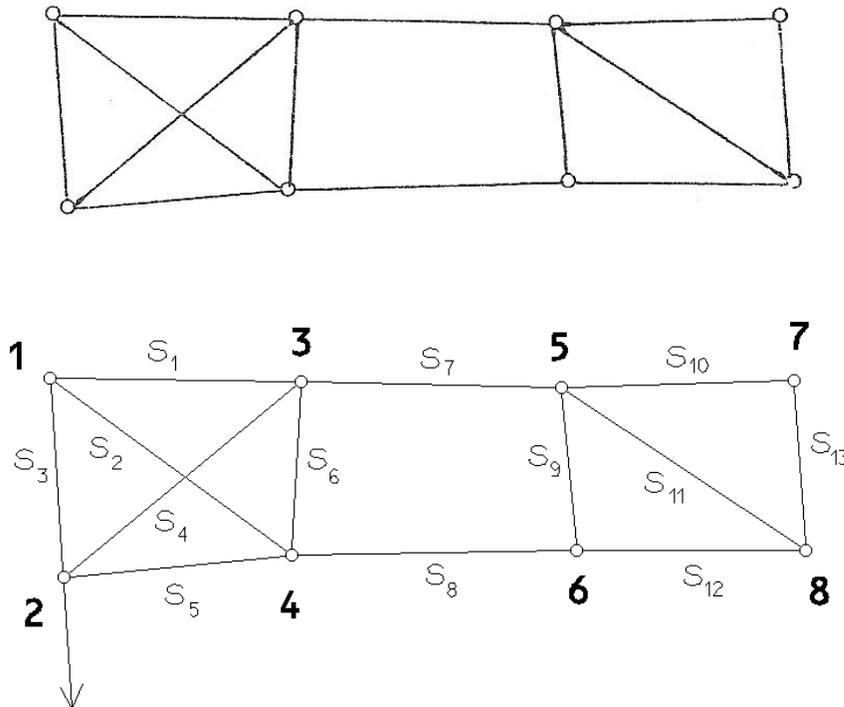


figura 4.13. Rede com *deficit* interno de característica relacionado com a configuração da rede

Tendo sido efectuadas as 13 observações de distância indicadas na figura 4.13., para se obter as coordenadas dos 8 pontos da rede é necessário definir um *datum*; supondo que se fixam arbitrariamente as coordenadas do ponto 1 e que se fixa a direcção do ponto 1 para o ponto 2 (3 parâmetros no total), obtêm-se em primeiro lugar as coordenadas do ponto 2 (com S_3) e em seguida as coordenadas dos pontos 3 e 4, podendo ser utilizadas diversas combinações de S_1, S_2, S_4, S_5 e S_5 (com redundância, portanto). Para passar das coordenadas dos pontos 3 e 4 para os pontos 5 e 6 verifica-se que falta uma observação (de 3 para 6 ou de 4 para 5), pelo que a figura não pode ser completamente calculada. Resumindo, $n=13, n_0=13, r=n-n_0=0, u=13, c=r+u=13$.

Posto o problema de outra forma, pretende-se obter as coordenadas planas dos oito pontos que constituem a rede, pelo que $u = 16$; tendo sido efectuadas 13 observações de distância ou seja, $n=13$, tem-se $d = 16 - 13 = 3$, pelo que a rede é livre, sendo necessário fixar as coordenadas de um ponto (2 parâmetros correspondentes a uma translação no plano) e uma direcção

(1 parâmetro correspondente a uma rotação no plano), o suficiente para que $d=0$, pois a escala da rede é fixada pelas próprias observações de distância. Tem-se, no entanto, que nem todas as 13 observações são independentes, pelo que, mesmo fixando o *datum*, o *deficit* de característica é igual a 1.

A fixação de um *datum* numa rede é uma imposição externa da posição, da orientação e da escala da rede. As quantidades não enviesadas que podem ser estimadas no processo de ajustamento da rede têm que ser independentes de uma (eventual) mudança de *datum* (como é o caso do vector dos resíduos). Uma mudança de *datum* consiste numa transformação afim (ou de afinidade), caso particular de uma transformação linear $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$, em que a matriz A é quadrada e não singular ($\det A \neq 0$). Há seis tipos elementares de transformações afins, podendo uma transformação afim geral ser factorizada numa sequência destas transformações elementares.

Uma transformação afim corresponde a uma translação afectuada pelo vector \vec{b} se $A=I$. As restantes cinco transformações são casos especiais da transformação homogénea $\vec{y} = A\vec{x}$; as rotações em torno da origem e as reflexões segundo cada um dos eixos não alteram o comprimento dos vectores posição de cada um dos vértices da figura a transformar, sendo neste caso a matriz A ortogonal (isto é, a respectiva inversa coincide com a transposta); uma transformação de escala k deixa a direcção dos vectores posição de cada um dos vértices da figura a transformar inalterada, aplicando a mesma variação de escala a cada um dos eixos (a transformação inversa é obtida utilizando o factor $1/k$); uma elongação ou compressão segundo um determinado eixo altera a escala segundo essa direcção, mantendo as coordenadas dos vectores posição de cada um dos vértices da figura a transformar segundo os restantes eixos (a matriz A é diagonal sendo todos os elementos iguais a um com excepção do elemento correspondente à direcção da elongação, neste caso >1 , ou correspondente à direcção da compressão, neste caso <1 ; num cisalhamento são aplicados factores de escala diferentes a cada eixo.

Resumindo, as translações, rotações e reflexões preservam a forma e a dimensão mas podem alterar a orientação da figura original, sendo assim designadas por transformações de um corpo rígido; as translações, rotações, reflexões e escalamentos preservam a forma (isto é, preservam os ângulos), sendo designadas por transformações isogonais; todas as transformações afins transformam linhas paralelas em linhas paralelas. As matrizes seguintes são exemplo de transformações afins elementares:

$$\text{Rot}_{2,2} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} : \text{rotação de } 30^\circ \text{ em torno da origem do referencial no sentido retrógrado}$$

$$\text{RefY}_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} : \text{reflexão em relação ao eixo X}$$

$$\text{Esc}_{2,2} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} : \text{escalamento com factor de escala } \sqrt{3}$$

$$\text{ElonY}_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} : \text{elongamento segundo o eixo Y com factor de escala 2}$$

$$\text{CisX}_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{cisalhamento segundo o eixo X com factor de escala 3}$$

Como exemplos de transformações afins gerais tem-se:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -2/\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que corresponde a um escalamento com factor de escala 3, um cisalhamento segundo Y com factor de escala $-2/\sqrt{3}$, uma reflexão segundo Y e um cisalhamento segundo X com factor de escala $-2/\sqrt{3}$ e

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

que corresponde a um escalamento com factor de escala 3, um cisalhamento segundo Y com factor de escala $\sqrt{3}$, uma reflexão segundo X e uma compressão segundo Y com factor de escala $2/3$.

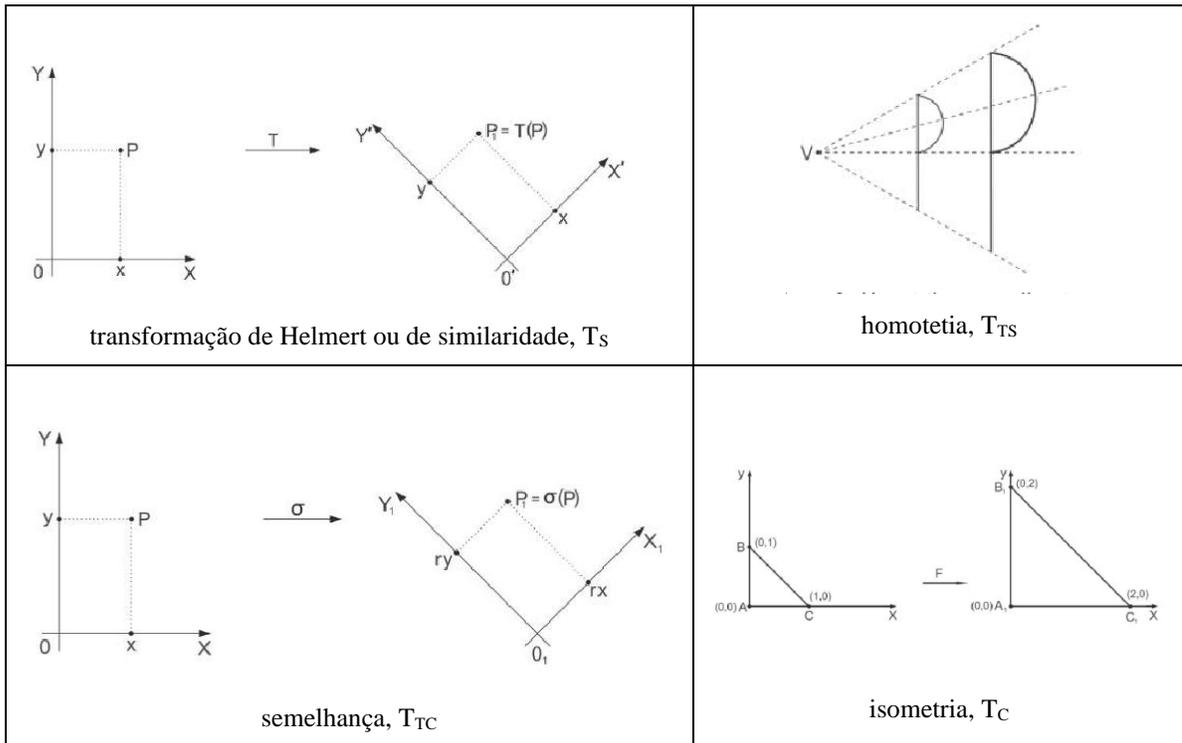


figura 4.14. Representação gráfica das transformações afins compatíveis com uma mudança de datum

A expressão geral de uma transformação afim para o caso de uma rede bidimensional, é da forma $T_A(\lambda, \mu, H, \vec{t})$, onde λ, μ são os factores de escala em cada um dos eixos x e y , H é a matriz rotação de um ângulo θ em torno do eixo z e \vec{t} é o vector translação, num total de cinco parâmetros (recorde-se que no caso bidimensional são necessários, no máximo, quatro parâmetros para fixar o *datum*, razão pela qual a transformação afim geral não é adequada). Um caso particular desta transformação afim é a transformação de similaridade ou transformação de Helmert, dada por $T_S(\lambda = \mu, H = \lambda R, \vec{t})$, com $R^T R = I$ (ou seja R é uma matriz ortogonal), que mantém os ângulos e a proporcionalidade de distâncias; outro caso particular é a transformação dada por $T_C(\lambda = \mu = 1, H = R, \vec{t})$, designada por isometria, transformação na qual as distâncias são igualmente conservadas; a transformação $T_{TS}(\lambda = \mu, H = \lambda I, \vec{t})$, designada por homotetia, mantém os rumos inalterados (ampliação ou redução da configuração original); finalmente, a transformação $T_{TC}(\lambda = \mu = 1, H = I, \vec{t})$, designada por semelhança, mantém as distâncias e os rumos invariantes. Resumindo:

	T_S	T_C	T_{TS}	T_{TC}
Distâncias	-	x	-	x
Razão de distâncias	x	x	x	x
Rumos	-	-	x	x
Ângulos	x	x	x	x

tabela 4.4.: As distâncias relativamente a translações e rotações, os rumos relativamente a translações e escalamentos e os ângulos e razões de distâncias relativamente a translações, rotações e escalamentos permanecem invariantes

Para ser possível a estimação dos parâmetros no caso mais geral em que o sistema é singular, é necessário transformar o problema num sistema regular; as transformações apresentadas atrás possuem as características adequadas de forma a manter as observações invariantes e permitir a estimação não enviesada dos parâmetros.

Uma possibilidade de resolver o problema do ajustamento no caso da matriz A ser singular é através da factorização da matriz $A_{n \times u}$ na forma seguinte:

$$A_{n \times u} = B_{n \times r} C_{r \times u}$$

em que $C_{r \times u} = (B_{r \times n}^T B_{n \times r})^{-1} (B_{r \times n}^T A_{n \times u})$. O vector resultante $\vec{c}_{r \times 1} = C_{r \times u} \hat{x}_{u \times 1}$ contém as (restantes) estimativas não enviesadas dos parâmetros, de acordo com $\vec{l} + \vec{v} = A \vec{x} = B \vec{c}$. Esta solução apenas pode ser concretizada incluindo informação adicional, através do estabelecimento de um *datum*.

Uma forma completamente diferente de resolver o modelo $E(\vec{L}_{n \times 1}) = \vec{L}_{n \times 1}$ é através da utilização de inversas generalizadas, que verificam as seguintes características, sendo N^- a inversa generalizada da matriz N :

1) $NN^-N = N$

2) $N^-NN^- = N^-$

3) $(NN^-)^T = NN^-$

4) $(N^-N)^T = N^-N$

(uma inversa generalizada que verifique estas quatro condições é designada por inversa Moore-Penrose ou N^+). Para o sistema $\hat{x} = N^+A^T\vec{\ell}$, a inversa generalizada N^+ (única) conduz à solução $\vec{v}^T\vec{v} = \min$ imo , assim como à solução norma mínima $\hat{x}^T\hat{x} = \min$ imo

O problema do *datum* (problema de ordem zero) é a selecção do *datum* ou referencial local óptimo. Este problema resulta do facto de que as coordenadas dos pontos de uma rede não são determinadas de forma unívoca a partir de quantidades relativas como ângulos ou distâncias. O problema de ordem um é um problema de configuração, onde as posições dos pontos e as observações efectuadas são optimizadas. O problema dos pesos das observações numa configuração fixa é designado por problema de ordem dois, de tal forma que as estimativas das coordenadas exibam propriedades estatísticas previamente fixadas, como por exemplo, variância igual para todas as coordenadas ou estimativas não correlacionadas para as coordenadas. O problema de ordem três consiste na optimização de uma rede através da inclusão de novos pontos ou observações. Tem-se, assim:

	Parâmetros fixos	Parâmetros livres
Problema de ordem zero	A, P	x, Q _x
Problema de ordem um	P, Q _x	A
Problema de ordem dois	A, Q _x	P
Problema de ordem três	Q _x	A, P

tabela 4.5. Tipos de problemas envolvidos na concepção de redes de monitorização

Como exemplo de um problema de ordem três, considere-se o caso da densificação de uma rede através da inclusão do ponto P₄, utilizando para o efeito observações de distância, a partir das quais se coordena o novo ponto por trilateração (figura 4.15.). Tendo obtido as coordenadas do novo ponto, é possível calcular os rumos de P₄ para cada um dos pontos visados, por hipótese: $R_{P_4P_1} = 27^\circ$, $R_{P_4P_2} = 126^\circ$, $R_{P_4P_3} = 225^\circ$.

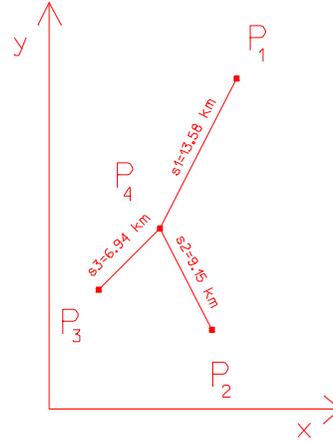


figura 4.15. densificação de uma rede

Impondo como precisão pré-definida para as coordenadas de P₄ uma circunferência de raio 1cm (elipse de erro), isto é,

$$Q_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tem-se que as equações que relacionam as observações com os parâmetros $X = \begin{bmatrix} \delta X_{P_4} \\ \delta Y_{P_4} \end{bmatrix}$ são do tipo

$$\ell^2 - (X_{P_4} - X_{P_i})^2 + (Y_{P_4} - Y_{P_i})^2 = 0 \quad \text{para } i=1,2,3$$

ou, na forma linearizada, considerando os pontos 1,2,3 fixos,

$$\ell - \ell_0 + v - \frac{X_{P_4}^0 - X_{P_i}}{\ell_0} \delta X_{P_4} - \frac{Y_{P_4}^0 - Y_{P_i}}{\ell_0} \delta Y_{P_4} = 0 \Leftrightarrow \ell - \ell_0 + v - \sin R_{P_i P_4} \delta X_{P_4} - \cos R_{P_i P_4} \delta Y_{P_4} = 0$$

ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} -\sin R_{P_4 P_1} & -\cos R_{P_4 P_1} \\ -\sin R_{P_4 P_2} & -\cos R_{P_4 P_2} \\ -\sin R_{P_4 P_3} & -\cos R_{P_4 P_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.454 & -0.891 \\ -0.809 & +0.588 \\ +0.707 & +0.707 \end{bmatrix}.$$

Sendo

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$$

a matriz dos pesos das observações, consideradas não correlacionadas, a matriz N tem a forma $N = A^T P A = Q_x^{-1}$, ou

$$N = \begin{bmatrix} 0.206 p_1 + 0.654 p_2 + 0.5 p_3 & 0.404 p_1 - 0.476 p_2 + 0.5 p_3 \\ 0.404 p_1 - 0.476 p_2 + 0.5 p_3 & 0.794 p_1 + 0.346 p_2 + 0.5 p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde se obtém $p_1 = 0.511$, $p_2 = 0.974$, $p_3 = 0.515$.

Em seguida é necessário concretizar este design óptimo nas observações realizadas: supondo que o distanciómetro utilizado tem um desvio padrão $\sigma_D = 0.5 \text{ cm} + 1 \text{ ppm} = 0.5 \text{ cm} + 1 \times 10^{-6} \times D_{\text{cm}}$, o desvio padrão associado a cada uma das distâncias medidas é $\sigma_1 = 1.86_{\text{cm}}$, $\sigma_2 = 1.42 \text{ cm}$, $\sigma_3 = 1.19 \text{ cm}$. Admitindo que observações repetidas da mesma distância são não correlacionadas, o desvio padrão da média aritmética de n medições é $\sigma = \sigma_D / \sqrt{n}$, cujo peso é $p = \sigma_0^2 / \sigma^2 = n \sigma_0^2 / \sigma_D^2$. Tomando $\sigma_0 = 1 \text{ cm}$, o número de repetições de cada distância é, respectivamente, 1.76, 1.96, 0.73 ou, arredondando para números inteiros, 2, 2, 1. Estas repetições conduzem ao desvio padrão para os valores médios das distâncias: 1.32 cm, 1.01 cm e 1.19 cm, a que correspondem os pesos 0.57, 1.00 e 0.71. Com estes pesos recalculam-se as matrizes N e Q :

$$N = \begin{bmatrix} 1.13 & 0.11 \\ 0.11 & 1.15 \end{bmatrix} \text{ e } N^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 0.89 & -0.08 \\ -0.08 & 0.88 \end{bmatrix}.$$

A partir dos elementos da matriz Q obtêm-se os parâmetros da elipse: $a=0.96 \text{ cm}$, $b=0.80 \text{ cm}$, $\alpha = 133.2^\circ$:

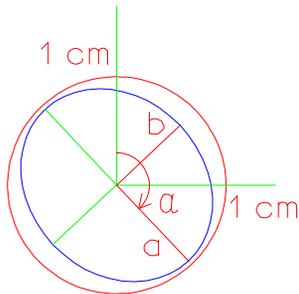


figura 4.16. A elipse de erro da rede com observações com pesos modificados fica completamente contida no círculo de raio 1 cm

4.6. Tipos de ajustamento

Sendo $\vec{\ell}_a^{n \times 1}$ o vector das observações ajustadas e $\vec{x}_a^{u \times 1}$ o vector dos parâmetros ajustados, o modelo matemático geral, misto ou condicionado traduz-se pela expressão

$$\vec{F}^{c \times 1}(\vec{\ell}_a^{n \times 1}, \vec{x}_a^{u \times 1}) = 0$$

onde $\vec{F}^{c \times 1}$ representa c equações, em geral não lineares, que relacionam as n observações e os u parâmetros ajustados.

Exemplo: considere-se a distância horizontal (ajustada) ℓ entre os pontos A e B ; sendo (M_A, P_A) e (M_B, P_B) as coordenadas rectangulares (ajustadas) desses pontos, a relação funcional $F(\vec{\ell}, \vec{x}) = 0$ entre observações e parâmetros é:

$$\ell^2 = (M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2 \text{ ou } F(\ell, M_A, P_A, M_B, P_B) = (M_B - M_A)^2 + (P_B - P_A)^2 - \ell^2 = 0 .$$

No caso de as equações serem não lineares, como no caso do exemplo anterior, é necessário efectuar a respectiva linearização: sendo $\bar{x}_0^{u \times 1}$ uma aproximação inicial para os parâmetros, $\delta \bar{x}^{u \times 1} = \bar{x}_a^{u \times 1} - \bar{x}_0^{u \times 1}$ representa a correcção ao valor dos parâmetros obtida em cada iteração (enquanto que no caso de equações lineares, a solução do sistema é obtida de forma imediata, no caso de equações linearizadas é necessário recorrer a um processo iterativo que, sendo convergente, vá atenuando a eliminação dos termos de ordem superior a um). Definindo o vector dos resíduos das observações como $\bar{v}^{n \times 1} = \bar{\ell}_a^{n \times 1} - \bar{\ell}_b^{n \times 1}$, o modelo geral tem a forma

$$\bar{F}^{c \times 1}(\bar{\ell}_a^{n \times 1}, \bar{x}_a^{u \times 1}) = \bar{F}^{c \times 1}(\bar{\ell}_b^{n \times 1} + \bar{v}^{n \times 1}, \bar{x}_0^{u \times 1} + \delta \bar{x}^{u \times 1}) = 0,$$

ou, após a linearização, retendo apenas os termos de ordem zero e um:

$$\bar{F}^{c \times 1}(\bar{\ell}_b^{n \times 1}, \bar{x}_0^{u \times 1}) + \left. \frac{\partial \bar{F}^{c \times 1}}{\partial \bar{\ell}} \right|_{\bar{\ell}_b^{n \times 1}, \bar{x}_0^{u \times 1}} \cdot \bar{v}^{n \times 1} + \left. \frac{\partial \bar{F}^{c \times 1}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{\ell}_b^{n \times 1}, \bar{x}_0^{u \times 1}} \cdot \delta \bar{x}^{u \times 1} = 0.$$

Pondo $B = \left[\left. \frac{\partial \bar{F}^{c \times 1}}{\partial \bar{\ell}} \right|_{\bar{\ell}_b^{n \times 1}, \bar{x}_0^{u \times 1}} \right]$, $A = \left[\left. \frac{\partial \bar{F}^{c \times 1}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{\ell}_b^{n \times 1}, \bar{x}_0^{u \times 1}} \right]$, $W = \left[\bar{F}^{c \times 1}(\bar{\ell}_b^{n \times 1}, \bar{x}_0^{u \times 1}) \right]$, o modelo geral linearizado pode representar-se

por

$$\bar{W}^{c \times 1} + B^{c \times n} \bar{v}^{n \times 1} + A^{c \times u} \delta \bar{x}^{u \times 1} = 0$$

O modelo tem solução quando forem obtidos valores para todas as variáveis; isto é possível (determinado ou indeterminado) quando existir um número suficiente de observações (e de constantes) e impossível quando o *datum* não estiver convenientemente definido. A indeterminação surge quando $r > 0$: de $c = r + u$, tem-se $c > u$, o que significa que não existe solução única para os u parâmetros (por outro lado, se $r > 0$, de $r = n - n_0$ tem-se $n > n_0$, e de $0 \leq u \leq n_0$ vem $n > u$). Desta forma, as n observações têm que ser ajustadas para tornar as c equações consistentes, de forma a satisfazerem o modelo.

O método de estimação designado por ajustamento por mínimos quadrados, que remonta ao início do século XIX, tendo sido desenvolvido de forma independente por Gauss e Legendre, consiste na minimização da função $\phi = \bar{v}^T P \bar{v}$. Nalguns casos não é possível substituir na função ϕ a expressão dos resíduos, $\bar{v}^{n \times 1} = \bar{\ell}_a^{n \times 1} - \bar{\ell}_b^{n \times 1}$, na medida em que há n resíduos e $c = r + u < n$ equações no modelo. Assim, os mínimos de ϕ são determinados impondo constrangimentos sobre as equações do modelo (problema de mínimos condicionados); para o efeito acrescentam-se à função ϕ as equações do modelo multiplicadas pelos factores $\bar{\lambda} = -2\bar{k}$, designados por multiplicadores de Lagrange, de tal que a função a minimizar é $\phi'(\bar{v}, \bar{k}, \delta \bar{x}) = \bar{v}^T P \bar{v} - 2\bar{k}(\bar{B}\bar{v} + A \delta \bar{x} + \bar{W}) = 0$. Como após o ajustamento se tem $B \bar{v} + A \delta \bar{x} + \bar{W} = 0$, a minimização de ϕ' corresponde à minimização de ϕ , obtendo-se então as seguintes derivadas parciais de ϕ' :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial \vec{v}} \right)^T = P \vec{v} - B^T \vec{k} = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial \vec{k}} \right)^T = -M^{-1} (A \delta \vec{x} + \vec{W}) = 0, \text{ com } M = B P^{-1} B^T \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial \delta \vec{x}} \right)^T = -A^T \vec{k} = 0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{cases} \vec{v} = P^{-1} B^T \vec{k} \\ \vec{k} = -M^{-1} (A \vec{x} + \vec{W}) \\ \delta \vec{x} = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} \vec{W} \Rightarrow \vec{x}_a^{u \times 1} = \vec{x}_0^{u \times 1} + \delta \vec{x}^{u \times 1} \end{cases}$$

sendo as matrizes cofactor das quantidades ajustadas dadas por:

$$\begin{cases} Q_{\vec{W}} = B P^{-1} B^T = M \\ Q_{\delta \vec{x}} = (A^T M^{-1} A)^{-1} \\ Q_{\vec{v}} = P^{-1} B^T M^{-1} (M - A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T) M^{-1} B P^{-1} \\ Q_{\vec{\ell}_a} = P^{-1} - Q_{\vec{v}} \end{cases}$$

Uma simplificação (caso particular) do modelo de ajustamento geral consiste no modelo paramétrico, onde as observações são explicitamente relacionadas com os parâmetros através de $c = r + u = n$ equações da forma:

$$\boxed{\vec{F}^{c \times 1}(\vec{x}_a^{u \times 1}) - \vec{\ell}_a^{n \times 1} = 0}$$

Neste caso, como cada uma das c equações contém apenas uma observação, tem-se $B = \left[\frac{\partial(\vec{F}(\vec{x}_a) - \vec{\ell}_a)}{\partial \vec{\ell}_a} \right] = I$, e portanto

o modelo linearizado é:

$$\boxed{\vec{W}^{n \times 1} + \vec{v}^{n \times 1} + A^{n \times u} \delta \vec{x}^{u \times 1} = 0}$$

O método de estimação de coordenadas utilizando equações de observação linearizadas é por vezes designado por método de variação de coordenadas, no sentido em que em cada iteração as coordenadas dos pontos da rede (parâmetros) vão variando até se obterem valores que satisfaçam a condição $\vec{v}^T P \vec{v} = \text{mínimo}$.

Outro caso particular do modelo de ajustamento geral consiste no modelo condicional, definido através da eliminação dos parâmetros, obtendo-se $c = r + u = r$ (pois $u=0$) equações da forma:

$$\bar{F}^{r \times 1}(\bar{\ell}_a^{n \times 1}) = 0$$

Tem-se neste caso $A = \left[\frac{\partial \bar{F}(\bar{\ell}_a)}{\partial \delta \bar{x}} \right] = 0$, sendo o modelo linearizado dado por:

$$\bar{W}^{c \times 1} + B^{c \times n} \bar{v}^{n \times 1} = 0$$

A decisão de qual dos modelos a utilizar num determinado problema depende da complexidade da formulação matemática associada a cada modelo.

	<i>Modelo geral</i>	<i>Modelo paramétrico</i>	<i>Modelo condicional</i>
Modelo não linear	$\bar{F}^{c \times 1}(\bar{\ell}_a^{n \times 1}, \bar{x}_a^{u \times 1}) = 0$	$\bar{F}^{c \times 1}(\bar{x}_a^{u \times 1}) - \bar{\ell}_a^{n \times 1} = 0$	$\bar{F}^{r \times 1}(\bar{\ell}_a^{n \times 1}) = 0$
Casos particulares		$B = I, c = n, \bar{\ell} = \bar{W}$	$A = 0, c = r$
Modelo linear	$B\bar{v} + A \delta \bar{x} + \bar{W} = 0$	$\bar{v} + A \delta \bar{x} + \bar{W} = 0$	$B\bar{v} + \bar{W} = 0$
Equações normais	$M = B P^{-1} B^T$	$M = P^{-1}$	$M = B P^{-1} B^T$
	$N = A^T M^{-1} A$	$N = A^T P A$	
	$U = A^T M^{-1} \bar{W}$	$U = A^T P \bar{W}$	
	$N \delta \bar{x} = -\bar{U}$	$N \delta \bar{x} = -\bar{U}$	
Minimização de $\phi = \bar{v}^T P \bar{v}$	$-U^T N^{-1} U + W^T M^{-1} W$	$-U^T N^{-1} U + L^T P L$	$W^T M^{-1} W$
Parâmetros estimados	$\delta \bar{x} = -N^{-1} U$	$\delta \bar{x} = -N^{-1} U$	
Resíduos estimados	$\hat{\bar{v}} = P^{-1} B^T \bar{k}$	$\hat{\bar{v}} = A \delta \bar{x} + \bar{W}$	$\hat{\bar{v}} = P^{-1} B^T \bar{k}$
s_0^2 estimado	$s_0^2 = \bar{v}^T P \bar{v} /_{r-u}$	$s_0^2 = \bar{v}^T P \bar{v} /_{r-u}$	$s_0^2 = \bar{v}^T P \bar{v} /_{r-u}$
Matriz cofactor dos parâmetros	$Q_{\bar{x}} = N^{-1}$	$Q_{\bar{x}} = N^{-1}$	
Matriz cofactor dos resíduos	$Q_{\bar{v}} = P^{-1} B^T M^{-1} (M - A N^{-1} A^T) M^{-1} B P^{-1}$	$Q_{\bar{v}} = (P^{-1} - A N^{-1} A^T)$	$Q_{\bar{v}} = P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1}$
Matriz cofactor das observações ajustadas	$Q_{\ell_a} = Q_{\ell_b} - Q_v$	$Q_{\ell_a} = Q_{\ell_b} - Q_v$	$Q_{\ell_a} = Q_{\ell_b} - Q_v$

tabela 4.6. Modelos de ajustamento

Apresentam-se de seguida as equações de observação mais comuns no caso de observação de redes geodésicas ou topográficas, assim como a respectiva versão linearizada:

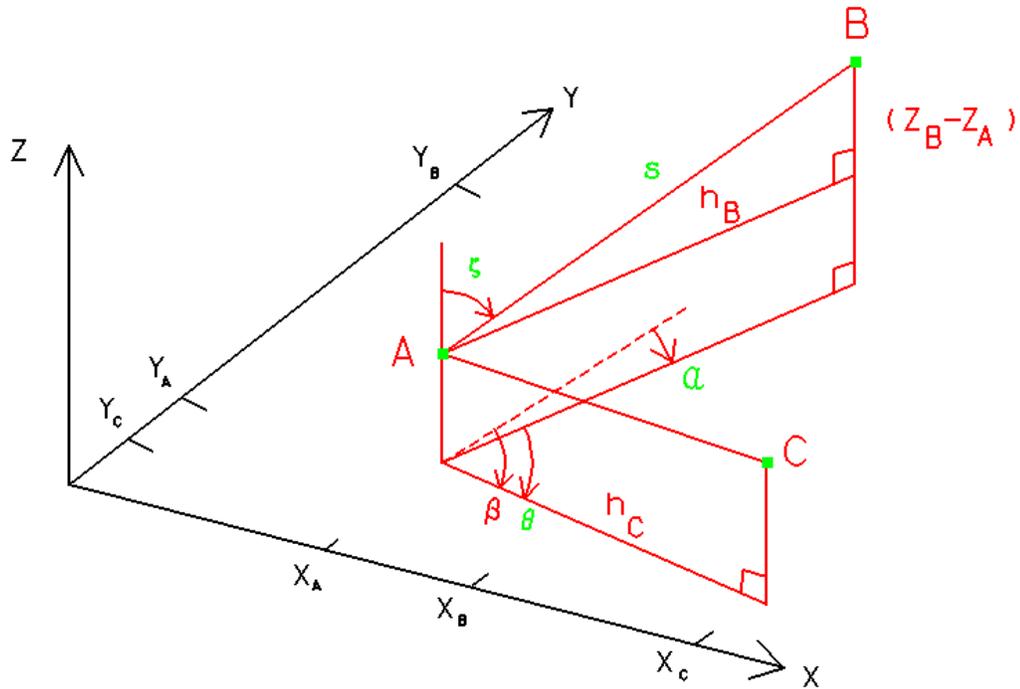


figura 4.17. Representação gráfica das medições de distância inclinada s , rumo α , ângulo azimutal θ e ângulo zenital ζ

1. Equação de observação para a distância inclinada s:

Se a distância inclinada s entre os pontos $A(X_A, Y_A, Z_A)$ e $B(X_B, Y_B, Z_B)$ for medida, o modelo funcional é

$$F(\bar{x}, \bar{l}) = \left[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2 \right]^{1/2} - s = 0$$

onde $\bar{x} = [X_A \ Y_A \ Z_A \ X_B \ Y_B \ Z_B]^T$ e $\bar{l} = [-s]$.

Sendo $[X_0^A \ Y_0^A \ Z_0^A \ X_0^B \ Y_0^B \ Z_0^B]^T$ valores aproximados para as coordenadas dos 2 pontos, $\Delta \bar{x}_{6 \times 1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta Z_A \ \delta X_B \ \delta Y_B \ \delta Z_B]^T$ as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento, então

$$A_{1 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_B} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{X_A - X_B}{\left[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2 \right]^{3/2}} \\ \frac{Y_A - Y_B}{\left[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2 \right]^{3/2}} \\ \frac{Z_A - Z_B}{\left[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2 \right]^{3/2}} \\ \frac{X_B - X_A}{\left[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2 \right]^{3/2}} \\ \frac{Y_B - Y_A}{\left[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2 \right]^{3/2}} \\ \frac{Z_B - Z_A}{\left[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2 \right]^{3/2}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial s} \end{bmatrix} = [-1]$$

e a equação linearizada tem a forma

$$A \Delta \bar{x} + B \bar{v} - s + s_0 = 0$$

ou

$$\frac{X_A^0 - X_B^0}{s_0} \delta X_A + \frac{Y_A^0 - Y_B^0}{s_0} \delta Y_A + \frac{Z_A^0 - Z_B^0}{s_0} \delta Z_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0} \delta X_B + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0} \delta Y_B + \frac{Z_B^0 - Z_A^0}{s_0} \delta Z_B = s - s_0 + v$$

com $s_0 = \left[(X_A^0 - X_B^0)^2 + (Y_A^0 - Y_B^0)^2 + (Z_A^0 - Z_B^0)^2 \right]^{1/2}$ sendo a distância espacial calculada entre os dois pontos a partir dos valores aproximados das coordenadas.

2. Equação de observação para o rumo α :

Se o rumo α entre os pontos $A(X_A, Y_A, Z_A)$ e $B(X_B, Y_B, Z_B)$ for medido, o modelo funcional é

$$F(\bar{x}, \bar{\ell}) = a \tan \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} - \alpha = 0$$

onde $\bar{x} = [X_A \ Y_A \ X_B \ Y_B]^T$ e $\bar{\ell} = [-\alpha]$.

Sendo $[X_A^0 \ Y_A^0 \ X_B^0 \ Y_B^0]^T$ valores aproximados para as coordenadas dos 2 pontos e $\bar{\Delta}_{4 \times 1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta X_B \ \delta Y_B]^T$ as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento e, lembrando que $\frac{\partial}{\partial x} a \tan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{\partial u}{\partial x}$, tem-se

$$A_{1 \times 4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ -\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \end{bmatrix}^T \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = [-1]$$

e a equação linearizada tem a forma

$$A\bar{\Delta} + Bv - \alpha + \alpha_0 = 0$$

ou

$$-\frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B = (\alpha - \alpha_0) + v$$

com $h_{0AB}^2 = (X_A^0 - X_B^0)^2 + (Y_A^0 - Y_B^0)^2$ sendo a distância horizontal entre os dois pontos A e B calculada a partir dos valores aproximados das coordenadas.

3. Equação de observação para o ângulo azimutal θ :

Se o ângulo azimutal θ for medido no ponto A, no sentido retrógrado, de B para C, então $\theta = \beta - \alpha$, onde α e β são os rumos de AC e AB, respectivamente. O modelo funcional é:

$$F(\bar{x}, \bar{\ell}) = a \tan \frac{X_C - X_A}{Y_C - Y_A} - a \tan \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} - \theta = 0$$

onde $\bar{x} = [X_A \ Y_A \ X_B \ Y_B \ X_C \ Y_C]^T$, $\bar{\ell} = [-\theta]$.

Sendo $[X_A^0 \ Y_A^0 \ X_B^0 \ Y_B^0 \ X_C^0 \ Y_C^0]^T$ valores aproximados para as coordenadas dos 3 pontos e $\bar{\Delta}_{6 \times 1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta X_B \ \delta Y_B \ \delta X_C \ \delta Y_C]^T$ as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento:

$$A_{1 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \\ \frac{\partial F}{\partial X_C} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_C} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{Y_C - Y_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} + \frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_C - X_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} - \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ -\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{Y_C - Y_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} \\ -\frac{X_C - X_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} \end{bmatrix}^T \quad B = \left[\frac{\partial F}{\partial \theta} \right] = [-1]$$

a equação linearizada tem a forma

$$A\bar{\Delta} + Bv - \theta + \theta_0 = 0$$

ou

$$\left(\frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} - \frac{Y_C^0 - Y_A^0}{h_{0AC}^2} \right) \delta X_A + \left(\frac{X_C^0 - X_A^0}{h_{0AC}^2} - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \right) \delta Y_A - \frac{(Y_B^0 - Y_A^0)}{h_{0AB}^2} \delta X_B + \frac{(X_B^0 - X_A^0)}{h_{0AB}^2} \delta Y_B + \frac{(Y_C^0 - Y_A^0)}{h_{0AC}^2} \delta X_C - \frac{(X_C^0 - X_A^0)}{h_{0AC}^2} \delta Y_C = \theta - \theta_0 + v$$

com $h_{0AB}^2 = (X_0^A - X_0^B)^2 + (Y_0^A - Y_0^B)^2$ e $h_{0AC}^2 = (X_0^A - X_0^C)^2 + (Y_0^A - Y_0^C)^2$ sendo a distância horizontal entre os dois pontos A e B e entre os pontos A e C calculada a partir dos valores aproximados das coordenadas.

4. Equação de observação para o ângulo zenital ζ :

Sendo ζ o ângulo zenital medido entre A e B, o modelo funcional é:

$$F(\bar{x}, \bar{\ell}) = a \cos \left[\frac{Z_B - Z_A}{\left[(X_A - X_B)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2 \right]^{1/2}} \right] - \zeta = 0$$

onde $\bar{x} = [X_A \ Y_A \ Z_A \ X_B \ Y_B \ Z_B]^T$ e $\bar{\ell} = [-\zeta]$; sendo $(X_A^0, Y_A^0, Z_A^0, X_B^0, Y_B^0, Z_B^0)$ valores aproximados para as coordenadas dos 2 pontos e $\bar{\Delta}_{6 \times 1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta Z_A \ \delta X_B \ \delta Y_B \ \delta Z_B]^T$ as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento, tem-se, lembrando que $\frac{\partial}{\partial x} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\partial u}{\partial x}$:

$$A_{1 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_B} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{X_A - X_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{Y_A - Y_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ -\frac{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ -\frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{X_A - X_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ -\frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{Y_A - Y_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ \frac{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \end{bmatrix}^T \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [-1]$$

a equação linearizada tem a forma

$$A\bar{\Delta} + Bv - \zeta + \zeta_0 = 0$$

ou

$$-\frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0^2 \tan \zeta_0} \delta X_A - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0^2 \tan \zeta_0} \delta Y_A + \frac{h_0}{s_0^2} \delta Z_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0^2 \tan \zeta_0} \delta X_B + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0^2 \tan \zeta_0} \delta Y_B - \frac{h_0}{s_0^2} \delta Z_B = \zeta - \zeta_0 + v$$

5. Equação de observação para a direcção azimutal ℓ :

Se ℓ for a direcção azimutal observada no ponto A para o ponto B, tem-se:

$$R_{AB}^{\text{ajustado}} = R_{AB}^{\text{calculado}} - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B,$$

correspondendo estes últimos termos à variação do rumo de A para B para pequenos deslocamentos de A e B. Tem-se, por outro lado:

$$R_{AB}^{\text{ajustado}} = \ell + R_A^0$$

onde R_A^0 é o rumo do zero da graduação azimutal na estação A. Assim:

$$R_{AB}^{\text{calculado}} - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B = \ell + R_A^0.$$

Pondo $R_A^0 = \bar{R}_A^0 + \delta R_A^0$, tem-se:

$$-\delta R_A^0 - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B = \ell + \bar{R}_A^0 - R_{AB}^{\text{calculado}}$$

em que a incógnita δR_A^0 é a mesma para todas as direcções definidas a partir da estação A.

Exemplo: considere a rede de nivelamento representada na figura 4.18., que contém a marca de nivelamento BM, de cota conhecida (102.251 m) e os pontos 1, 2, 3 cujas cotas x_1, x_2, x_3 se pretende determinar, observando-se para o efeito os desníveis não correlacionados de igual precisão $\ell_1 = 5.011$ m, $\ell_2 = 2.989$ m, $\ell_3 = 8.018$ m, $\ell_4 = 1.009$ m, $\ell_5 = 8.992$ m.

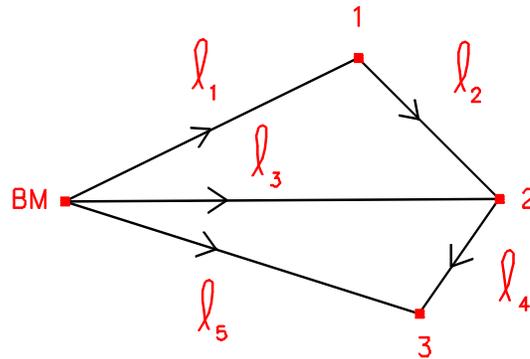


figura 4.18. Rede de nivelamento

Neste caso o modelo é linear, pelo que não é necessário utilizar um processo iterativo para a determinação da solução a partir de aproximações iniciais dos parâmetros, tendo-se $n_0 = 3$, $n = 5$, $r = 2$, $u = 3$, $c = r + u$, $P = I$. O datum (altimétrico) ficou estabelecido quando se atribuiu ao ponto BM a cota 102.251 m, tratando-se portanto de uma rede de constrangimento mínimo:

a) Modelo geral: é possível estabelecer $c = 2 + 3 = 5$ equações independentes entre os 3 parâmetros e as 5 observações, como por exemplo:

$$\begin{cases} \text{BM} + \ell_1 + v_1 + \ell_2 + v_2 - x_2 = 0 \\ \text{BM} + \ell_3 + v_3 + \ell_4 + v_4 - x_3 = 0 \\ \text{BM} + \ell_5 + v_5 - \ell_4 - v_4 - x_2 = 0 \\ \text{BM} + \ell_3 + v_3 - \ell_2 - v_2 - x_1 = 0 \\ \text{BM} + \ell_5 + v_5 - \ell_4 - v_4 - \ell_2 - v_2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

ou, na forma matricial $\vec{B}\vec{v} + \vec{A}\vec{X} + \vec{W} = 0$ (ou $\vec{B}\vec{v} + \vec{W} = -\vec{A}\vec{X}$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.234 \\ 107.280 \\ 107.245 \end{bmatrix} = 0$$

cuja solução é dada por:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T M^{-1} \bar{W} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.234 \\ 107.280 \\ 107.245 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -112.252 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = -N^{-1}U = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 112.252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3}$$

b) Modelo paramétrico: é possível estabelecer $c = 2 + 3 = 5$ equações independentes entre os 3 parâmetros e as 5 observações, contendo cada equação uma única observação, como por exemplo:

$$\begin{cases} \text{BM} + \ell_1 + v_1 - x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 + \ell_2 + v_2 = 0 \\ \text{BM} - x_2 + \ell_3 + v_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + \ell_4 + v_4 = 0 \\ \text{BM} - x_3 + \ell_5 + v_5 = 0 \end{cases}$$

ou, na forma matricial, $\bar{v} + A\bar{X} + \bar{W} = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 107.262 \\ 2.989 \\ 110.269 \\ 1.009 \\ 111.243 \end{bmatrix} = 0$$

cuja solução é dada por:

$$N = A^T P A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T P \bar{W} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 107.262 \\ 2.989 \\ 110.269 \\ 1.009 \\ 111.243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -112.252 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = -N^{-1}U = - \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -112.252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3}$$

c) Modelo condicional: é possível estabelecer $c = 2 + 0 = 2$ equações independentes entre as 5 observações, como por exemplo:

$$\begin{cases} \ell_1 + v_1 + \ell_2 + v_2 - \ell_3 - v_3 = 0 \\ \ell_3 + v_3 + \ell_4 + v_4 - \ell_5 - v_5 = 0 \end{cases}$$

ou, na forma matricial, $B\bar{v} + \bar{W} = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.018 \\ 0.035 \end{bmatrix} = 0$$

cuja solução é dada por:

$$M = B P^{-1} B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} P \bar{v} = \bar{W}^T M^{-1} \bar{W} = \begin{bmatrix} -0.018 & 0.035 \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.018 \\ 0.035 \end{bmatrix} = 0.000423375$$

$$\bar{k} = -M^{-1} \bar{W} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.018 \\ 0.035 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002375 \\ -0.010875 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = P^{-1} B^T \bar{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.002375 \\ -0.010875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002375 \\ 0.002375 \\ -0.013250 \\ -0.010875 \\ 0.010875 \end{bmatrix}$$

$$\bar{l}_a = \bar{l}_b + \bar{v} = \begin{bmatrix} 5.013375 \\ 2.991375 \\ 8.004750 \\ 0.998125 \\ 9.002875 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 102.251 + 5.013375 \\ 102.251 + 8.004750 \\ 102.251 + 9.002875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3}$$

Como era de esperar, obtiveram-se os mesmos valores para os parâmetros (cotas dos pontos 1, 2 e 3), independentemente do modelo utilizado.

Exemplo: a figura 4.19. indica as observações de direcção efectuadas, tendo em vista a obtenção dos ângulos utilizados na coordenação do ponto V por intersecção directa a partir dos pontos E1, E2 e E3, cujas coordenadas também estão indicadas. Supondo que o desvio padrão das observações de direcção é igual a 2'', obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas do ponto V.

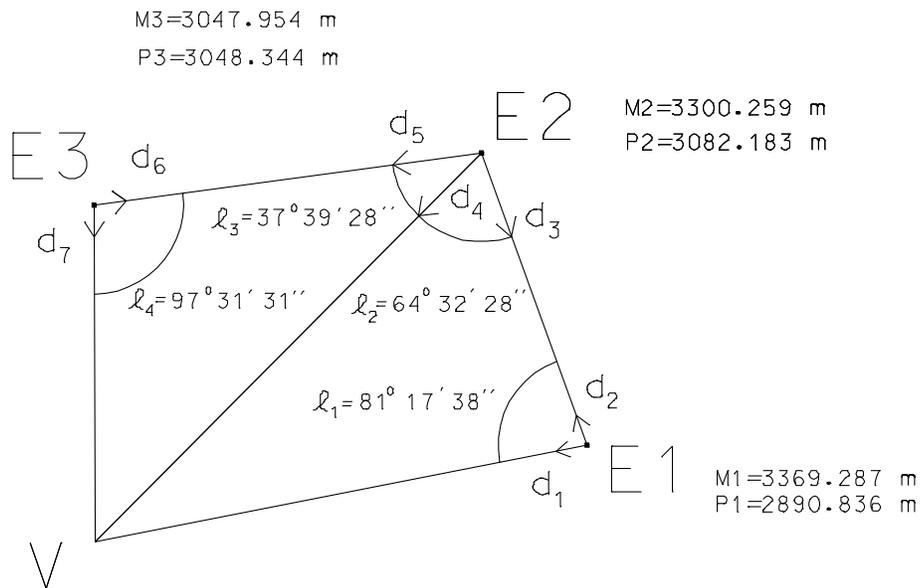


figura 4.19. Coordenação do ponto V por intersecção directa

Neste caso tem-se $n=4$ (número de ângulos observados), $n_0=2$ (número mínimo de ângulos para calcular uma intersecção directa, correspondente ao estacionamento em dois pontos de coordenadas conhecidas), $r=n-n_0=2$, $u=2$ (número de parâmetros desconhecidos: M_V, P_V), $c=r+u=4$ (número de equações de condição que relacionam os ângulos observados e os parâmetros). As equações de observação (modelo paramétrico) são então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_1 + v_1 - R_{E1,E2} + R_{E1,V} = 0 \Leftrightarrow \ell_1 + v_1 - a \tan \frac{M_{E2} - M_{E1}}{P_{E2} - P_{E1}} + a \tan \frac{M_V - M_{E1}}{P_V - P_{E1}} = 0 \Leftrightarrow v_1 + F_1(M_V, P_V) = -\ell_1 \Leftrightarrow v_1 + F_1 = -\ell_1 \\ \ell_2 + v_2 - R_{E2,V} + R_{E2,E1} = 0 \Leftrightarrow \ell_2 + v_2 - a \tan \frac{M_V - M_{E2}}{P_V - P_{E2}} + a \tan \frac{M_{E1} - M_{E2}}{P_{E1} - P_{E2}} = 0 \Leftrightarrow v_2 + F_2(M_V, P_V) = -\ell_2 \Leftrightarrow v_2 + F_2 = -\ell_2 \\ \ell_3 + v_3 - R_{E2,E3} + R_{E2,V} = 0 \Leftrightarrow \ell_3 + v_3 - a \tan \frac{M_{E3} - M_{E2}}{P_{E3} - P_{E2}} + a \tan \frac{M_V - M_{E2}}{P_V - P_{E2}} = 0 \Leftrightarrow v_3 + F_3(M_V, P_V) = -\ell_3 \Leftrightarrow v_3 + F_3 = -\ell_3 \\ \ell_4 + v_4 - R_{E3,V} + R_{E3,E2} = 0 \Leftrightarrow \ell_4 + v_4 - a \tan \frac{M_V - M_{E3}}{P_V - P_{E3}} + a \tan \frac{M_{E2} - M_{E3}}{P_{E2} - P_{E3}} = 0 \Leftrightarrow v_4 + F_4(M_V, P_V) = -\ell_4 \Leftrightarrow v_4 + F_4 = -\ell_4 \end{array} \right.$$

Como estas equações são não lineares em M_V e P_V , é necessário efectuar uma linearização para formar um sistema da forma $\bar{v}_{4,1} + A_{4,2} \delta \bar{x}_{2,1} = \bar{W}_{4,1}$; sendo M_V^0 e P_V^0 valores aproximados dos parâmetros a estimar (calculados na intersecção directa sem ajustamento), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = F_1^0 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial M_V}\right)^0 (M_V - M_V^0) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial P_V}\right)^0 (P_V - P_V^0) \\ F_2 = F_2^0 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial M_V}\right)^0 (M_V - M_V^0) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_V}\right)^0 (P_V - P_V^0) \\ F_3 = F_3^0 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial M_V}\right)^0 (M_V - M_V^0) + \left(\frac{\partial F_3}{\partial P_V}\right)^0 (P_V - P_V^0) \\ F_4 = F_4^0 + \left(\frac{\partial F_4}{\partial M_V}\right)^0 (M_V - M_V^0) + \left(\frac{\partial F_4}{\partial P_V}\right)^0 (P_V - P_V^0) \end{array} \right.$$

com

$$F_1^0 = \ell_1 - R_{E1,E2} + R_{E1,V}^0$$

$$F_2^0 = \ell_2 - R_{E2,V}^0 + R_{E2,E1}$$

$$F_3^0 = \ell_3 - R_{E2,E3} + R_{E2,V}^0$$

$$F_4^0 = \ell_4 - R_{E3,V}^0 + R_{E3,E2}$$

e

$$\frac{\partial F_1}{\partial M_V} = \frac{P_V - P_{E1}}{(M_V - M_{E1})^2 + (P_V - P_{E1})^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial P_V} = -\frac{M_V - M_{E1}}{(M_V - M_{E1})^2 + (P_V - P_{E1})^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial M_V} = -\frac{P_V - P_{E2}}{(M_V - M_{E2})^2 + (P_V - P_{E2})^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_V} = \frac{M_V - M_{E2}}{(M_V - M_{E2})^2 + (P_V - P_{E2})^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial M_V} = \frac{P_V - P_{E2}}{(M_V - M_{E2})^2 + (P_V - P_{E2})^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial P_V} = -\frac{M_V - M_{E2}}{(M_V - M_{E2})^2 + (P_V - P_{E2})^2}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial M_V} = -\frac{P_V - P_{E3}}{(M_V - M_{E3})^2 + (P_V - P_{E3})^2}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial P_V} = \frac{M_V - M_{E3}}{(M_V - M_{E3})^2 + (P_V - P_{E3})^2}$$

Considerando $M_V^0 = 3048.388$ m e $P_V^0 = 2827.699$ m, calculados por intersecção directa apenas com os pontos E_1 e E_2 , tem-se os seguintes valores para os termos de ordem zero e para os coeficientes dos termos de ordem um:

$$F_1^0 = 81^\circ.293889 - a \tan \frac{3300.259 - 3369.287}{3082.183 - 2890.836} + a \tan \frac{3048.388 - 3369.287}{2827.699 - 2890.836} = 81^\circ.293889 - a \tan \frac{-69.028}{191.347} + a \tan \frac{-320.899}{-63.137} =$$

$$81^\circ.293889 - 340^\circ.163205 + 258^\circ.869207 = -0^\circ.000109 = -1.902409 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$F_2^0 = 64^\circ.541111 - a \tan \frac{3048.388 - 3300.259}{2827.699 - 3082.183} + a \tan \frac{3369.287 - 3300.259}{2890.836 - 3082.183} = 64^\circ.541111 - a \tan \frac{-251.871}{-254.484} + a \tan \frac{69.028}{-191.347} =$$

$$64^\circ.541111 - 224^\circ.704333 + 160^\circ.163205 = -0^\circ.000017 = -2.967060 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

$$F_3^0 = 37^\circ.657778 - a \tan \frac{3047.954 - 3300.259}{3048.344 - 3082.183} + a \tan \frac{3048.388 - 3300.259}{2827.699 - 3082.183} = 37^\circ.657778 - a \tan \frac{-252.305}{-33.839} + a \tan \frac{-251.871}{-254.484} =$$

$$37^\circ.657778 - 262^\circ.361109 + 224^\circ.704333 = 0^\circ.001002 = 1.748820 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$F_4^0 = 97^\circ.525278 - a \tan \frac{3048.388 - 3047.954}{2827.699 - 3048.344} + a \tan \frac{3300.259 - 3047.954}{3082.183 - 3048.344} = 97^\circ.525278 - a \tan \frac{0.434}{-220.645} + a \tan \frac{252.305}{33.839} =$$

$$97^\circ.525278 - 179^\circ.887302 + 82^\circ.361109 = -0^\circ.000915 = -1.596976 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

(estes termos independentes passam para o 2º membro das equações de condição, trocando de sinal),

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial M_V}\right)^0 = \frac{2827.699 - 2890.836}{(3048.388 - 3369.287)^2 + (2827.699 - 2890.836)^2} = -5.902717 \times 10^{-4}$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial P_V}\right)^0 = -\frac{3048.388 - 3369.287}{(3048.388 - 3369.287)^2 + (2827.699 - 2890.836)^2} = 3.000108 \times 10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial M_V}\right)^0 = -\frac{2827.699 - 3082.183}{(3048.388 - 3300.259)^2 + (2827.699 - 3082.183)^2} = 1.985037 \times 10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial P_V}\right)^0 = \frac{3048.699 - 3300.259}{(3048.388 - 3300.259)^2 + (2827.699 - 3082.183)^2} = -1.964654 \times 10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial M_V}\right)^0 = \frac{2827.699 - 3082.183}{(3048.388 - 3300.259)^2 + (2827.699 - 3082.183)^2} = -1.985037 \times 10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial P_V}\right)^0 = -\frac{3048.388 - 3300.259}{(3048.388 - 3300.259)^2 + (2827.699 - 3082.183)^2} = 1.9646454 \times 10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_4}{\partial M_V}\right)^0 = -\frac{2827.699 - 3048.344}{(3048.388 - 3047.954)^2 + (2827.699 - 3048.344)^2} = 4.532149 \times 10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial F_4}{\partial P_V}\right)^0 = \frac{3048.388 - 3047.954}{(3048.388 - 3047.954)^2 + (2827.699 - 3048.344)^2} = 8.911228 \times 10^{-6}$$

Com as aproximações anteriores, as matrizes A e \bar{W} são:

$$A = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.590273 & 3.000109 \\ 1.985037 & -1.964655 \\ -1.985037 & 1.964655 \\ 4.532150 & 0.008915 \end{bmatrix} m^{-1}, \quad \bar{W} = 10^{-5} \begin{bmatrix} -0.190083 \\ -0.029303 \\ 1.748993 \\ -1.597517 \end{bmatrix} rad$$

Sendo $\ell_1 = 81^\circ 17' 38''$, $\ell_2 = 64^\circ 32' 28''$, $\ell_3 = 37^\circ 39' 28''$, $\ell_4 = 97^\circ 31' 31''$ e sendo d_1 a direcção $E1 \rightarrow V$, d_2 a direcção $E1 \rightarrow E2$, d_3 a direcção $E2 \rightarrow E1$, d_4 a direcção $E2 \rightarrow V$, d_5 a direcção $E2 \rightarrow E3$, d_6 a direcção $E3 \rightarrow E2$, d_7 a direcção $E3 \rightarrow V$, tem-se $\ell_1 = d_2 - d_1$, $\ell_2 = d_4 - d_3$, $\ell_3 = d_5 - d_4$, $\ell_4 = d_7 - d_6$. Na forma matricial, estas relações tomam a forma

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{\ell}_{4,1} = J_{4,7} d_{7,1}.$$

Sendo o desvio padrão associado à observação de uma direcção igual a 2'', a matriz da variância das direcções igual a $\Sigma_{dd} = 4 I_{7,7}''^2 = (4\pi''/(360 \times 60 \times 60''))^2 I_{7,7} \text{ rad}^2 = 9.401772 \times 10^{-11} I_{7,7} \text{ rad}^2$; pela lei de propagação dos erros, a matriz de covariância associada aos ângulos é dada por

$$\Sigma_{\ell\ell} = J_{4,7} \Sigma_{dd} J_{4,7}^T = 9.401772 \times 10^{-11} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ rad}^2.$$

As equações normais são $(A_{2,4}^T \Sigma_{\ell\ell,4,4}^{-1} A_{4,2}) \delta \bar{x}_{2,1} = A_{2,4}^T \Sigma_{\ell\ell,4,4}^{-1} \bar{W}_{4,1} \Leftrightarrow N_{2,2} \delta \bar{x}_{2,1} = \bar{t}_{2,1} \Rightarrow \delta \bar{x}_{2,1} = N_{2,2}^{-1} \bar{t}_{2,1}$, em que $\delta \bar{x} = (\delta M, \delta P)$, donde

$$\delta \bar{x}^1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3.792248 \\ 0.624771 \end{bmatrix} \text{ m}.$$

Estas correcções são então somadas à aproximação inicial das coordenadas do ponto V, isto é, $\bar{x}^1 = \bar{x}^0 + \delta \bar{x}^1$, o que dá $M_V^1 = 3048.392 \text{ m}$ e $P_V^1 = 2827.700 \text{ m}$; em função da tolerância seleccionada *a priori*, repete-se o processo com estas novas aproximações, até se obter, na iteração *i*, $\delta M = |M_V^i - M_V^{i-1}| \leq \text{tolerância}$, $\delta P = |P_V^i - P_V^{i-1}| \leq \text{tolerância}$. Admitindo, neste caso, que tolerância = 1 mm, tem-se logo na 2ª iteração que as correcções são inferiores à tolerância:

$$\delta \bar{x}^2 = 10^{-4} \begin{bmatrix} -2.077621 \\ -3.752259 \end{bmatrix} \text{ m}$$

e portanto as coordenadas finais para o ponto V são $\bar{x}^2 = \bar{x}^1 + \delta \bar{x}^2$, ou seja, $M_V^2 = 3048.392 \text{ m}$ e $P_V^2 = 2827.700 \text{ m}$. A partir destas coordenadas ajustadas, são calculados os resíduos das observações, as observações ajustadas a a precisão associada a cada quantidade estimada.

Exemplo: considerando o quadrilátero plano representado na figura 4.20., tendo sido efectuadas observações de direcção azimutal em cada um dos vértices visando os vértices restantes, efectue o ajustamento das observações. No ajustamento terá naturalmente que ser utilizado o modelo condicional, onde não intervêm parâmetros (coordenadas dos vértices). Supõem-se as observações de direcção não correlacionadas e de igual precisão.

Ajustamento das direcções:

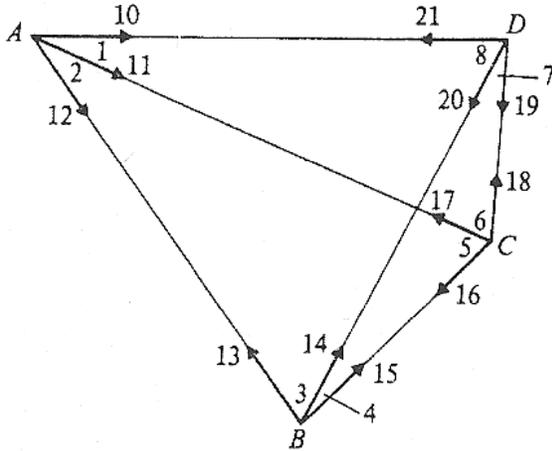


figura 4.20. Quadrilátero

direcções, d	valor
10	00° 00' 00".00
11	22° 01' 42".51
12	38° 46' 13".71
13	00° 00' 00".00
14	57° 08' 57".10
15	76° 42' 11".23
16	00° 00' 00".00
17	86° 33' 13".45
18	145° 19' 49".38
19	00° 00' 00".00
20	15° 06' 52".28
21	99° 11' 42".94

tabela 4.7. Direcções azimutais observadas

Os valores observados das direcções azimutais estão indicados na tabela 4.7.; para analisar esta informação, composta de quatro conjuntos de três direcções, é conveniente determinar o número mínimo de observações necessárias para definir o quadrilátero: como a dimensão da figura é irrelevante (não foi definido um *datum*!), uma vez que o problema envolve apenas a respectiva forma, considerem-se no ponto A, as direcções 10, 11 e 12; seleccionando o ponto C num ponto sobre a direcção 11, as direcções 16, 17 e 18 definem o quadrilátero. Utilizaram-se assim 6 observações (direcções), das 12 efectuadas; no entanto, estão implícitas mais duas direcções, as direcções do zero da graduação do limbo azimutal em cada um dos pontos A e C (estas direcções representam o valor de R_0 , desconhecido, em cada ponto A e C), obtendo-se portanto como número mínimo de variáveis que determina o modelo o valor $n_0=6+2=8$, sendo então a redundância $r=n-n_0=12-8=4$, correspondente ao número de equações de condição independentes. Podem definir-se 3 equações angulares e uma equação linear, esta última garantindo que uma diagonal calculada a partir de triângulos adjacentes é a mesma, de forma a que se obtenha um quadrilátero e não triângulos adjacentes. Podem então estabelecer-se as seguintes quatro equações entre as 12 observações:

$$\begin{cases} -d_{10} + d_{12} - d_{13} + d_{14} - d_{20} + d_{21} = 0 \\ -d_{14} + d_{15} - d_{16} + d_{18} - d_{19} + d_{20} = 0 \\ -d_{10} + d_{11} - d_{17} + d_{18} - d_{19} + d_{21} = 0 \\ \frac{\sin(d_{11} - d_{10})\sin(d_{20} - d_{19})\sin(d_{17} - d_{16})\sin(d_{14} - d_{13})}{\sin(d_{12} - d_{11})\sin(d_{21} - d_{20})\sin(d_{18} - d_{17})\sin(d_{15} - d_{14})} - 1 = 0 \end{cases}$$

Designando as quatro equações por f_1, f_2, f_3, f_4 , a respectiva forma linearizada tem a forma $B^{4,12} \bar{v}^{12,1} = \bar{f}^{4,1}$, ou

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & b_{4,5} & b_{4,6} & b_{4,7} & b_{4,8} & b_{4,9} & b_{4,10} & b_{4,11} & b_{4,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1''.4700 \\ 4''.2100 \\ -1''.3800 \\ -6''.2670 \end{bmatrix}$$

em que

$$b_{4,1} = -\frac{\sin(d_{11} - d_{10})\sin(d_{20} - d_{19})\sin(d_{17} - d_{16})\sin(d_{14} - d_{13})}{\sin(d_{12} - d_{11})\sin(d_{21} - d_{20})\sin(d_{18} - d_{17})\sin(d_{15} - d_{14})} \cot(d_{11} - d_{10}) = -2.47162$$

$$b_{4,2} = \frac{\sin(d_{11} - d_{10})\sin(d_{20} - d_{19})\sin(d_{17} - d_{16})\sin(d_{14} - d_{13})}{\sin(d_{12} - d_{11})\sin(d_{21} - d_{20})\sin(d_{18} - d_{17})\sin(d_{15} - d_{14})} (\cot(d_{11} - d_{10}) + \cot(d_{12} - d_{11})) = 5.79604$$

$$b_{4,3} = -\frac{\sin(d_{11} - d_{10})\sin(d_{20} - d_{19})\sin(d_{17} - d_{16})\sin(d_{14} - d_{13})}{\sin(d_{12} - d_{11})\sin(d_{21} - d_{20})\sin(d_{18} - d_{17})\sin(d_{15} - d_{14})} \cot(d_{12} - d_{11}) = -3.32242$$

$$b_{4,4} = -\frac{\sin(d_{11} - d_{10})\sin(d_{20} - d_{19})\sin(d_{17} - d_{16})\sin(d_{14} - d_{13})}{\sin(d_{12} - d_{11})\sin(d_{21} - d_{20})\sin(d_{18} - d_{17})\sin(d_{15} - d_{14})} \cot(d_{14} - d_{13}) = -0.64573$$

$$b_{4,5} = \frac{\sin(d_{11} - d_{10})\sin(d_{20} - d_{19})\sin(d_{17} - d_{16})\sin(d_{14} - d_{13})}{\sin(d_{12} - d_{11})\sin(d_{21} - d_{20})\sin(d_{18} - d_{17})\sin(d_{15} - d_{14})} (\cot(d_{14} - d_{13}) + \cot(d_{15} - d_{14})) = 3.46131$$

$$b_{4,6} = -\frac{\sin(d_{11}-d_{10})\sin(d_{20}-d_{19})\sin(d_{17}-d_{16})\sin(d_{14}-d_{13})}{\sin(d_{12}-d_{11})\sin(d_{21}-d_{20})\sin(d_{18}-d_{17})\sin(d_{15}-d_{14})}\cot(d_{15}-d_{14}) = -2.81557$$

$$b_{4,7} = -\frac{\sin(d_{11}-d_{10})\sin(d_{20}-d_{19})\sin(d_{17}-d_{16})\sin(d_{14}-d_{13})}{\sin(d_{12}-d_{11})\sin(d_{21}-d_{20})\sin(d_{18}-d_{17})\sin(d_{15}-d_{14})}\cot(d_{17}-d_{16}) = -0.06022$$

$$b_{4,8} = \frac{\sin(d_{11}-d_{10})\sin(d_{20}-d_{19})\sin(d_{17}-d_{16})\sin(d_{14}-d_{13})}{\sin(d_{12}-d_{11})\sin(d_{21}-d_{20})\sin(d_{18}-d_{17})\sin(d_{15}-d_{14})}(\cot(d_{17}-d_{16}) + \cot(d_{18}-d_{17})) = 0.66642$$

$$b_{4,9} = -\frac{\sin(d_{11}-d_{10})\sin(d_{20}-d_{19})\sin(d_{17}-d_{16})\sin(d_{14}-d_{13})}{\sin(d_{12}-d_{11})\sin(d_{21}-d_{20})\sin(d_{18}-d_{17})\sin(d_{15}-d_{14})}\cot(d_{18}-d_{17}) = -0.60620$$

$$b_{4,10} = -\frac{\sin(d_{11}-d_{10})\sin(d_{20}-d_{19})\sin(d_{17}-d_{16})\sin(d_{14}-d_{13})}{\sin(d_{12}-d_{11})\sin(d_{21}-d_{20})\sin(d_{18}-d_{17})\sin(d_{15}-d_{14})}\cot(d_{20}-d_{19}) = -3.70255$$

$$b_{4,11} = \frac{\sin(d_{11}-d_{10})\sin(d_{20}-d_{19})\sin(d_{17}-d_{16})\sin(d_{14}-d_{13})}{\sin(d_{12}-d_{11})\sin(d_{21}-d_{20})\sin(d_{18}-d_{17})\sin(d_{15}-d_{14})}(\cot(d_{20}-d_{19}) + \cot(d_{21}-d_{20})) = -3.80623$$

$$b_{4,12} = -\frac{\sin(d_{11}-d_{10})\sin(d_{20}-d_{19})\sin(d_{17}-d_{16})\sin(d_{14}-d_{13})}{\sin(d_{12}-d_{11})\sin(d_{21}-d_{20})\sin(d_{18}-d_{17})\sin(d_{15}-d_{14})}\cot(d_{21}-d_{20}) = -0.10368$$

Sendo as observações não correlacionadas e de igual precisão, $W=I$, tem-se:

$$N = \begin{bmatrix} 6.0 & -2.0 & 2.0 & -0.6557 \\ -2.0 & 6.0 & 2.0 & 0.6859 \\ 2.0 & 2.0 & 6.01 & 10.5939 \\ -0.6557 & 0.6859 & 10.5939 & 100.1021 \end{bmatrix}^{-2}, N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2773 & 0.1490 & -0.1765 & 0.0195 \\ 0.1490 & 0.2712 & -0.1703 & 0.0171 \\ -0.1765 & -0.1703 & 0.3471 & -0.0367 \\ 0.0195 & 0.3471 & -0.0367 & 0.0139 \end{bmatrix}^{-2},$$

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} 0.3414 \\ 1.0502 \\ -0.7066 \\ 0.0072 \end{bmatrix}^{-1}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 0.3474 \\ -0.6648 \\ 0.3174 \\ -0.3460 \\ -0.6838 \\ 1.0299 \\ -1.0506 \\ 0.7114 \\ 0.3392 \\ -0.3703 \\ 0.7362 \\ -0.3660 \end{bmatrix}, \hat{d} = \begin{bmatrix} 0^\circ & 00' & 0".3474 \\ 22^\circ & 01' & 41".8452 \\ 38^\circ & 46' & 14".0274 \\ 359^\circ & 59' & 59".6540 \\ 57^\circ & 08' & 56".4162 \\ 76^\circ & 42' & 12".2599 \\ 359^\circ & 59' & 58".9494 \\ 86^\circ & 33' & 14".1614 \\ 145^\circ & 19' & 49".7192 \\ 359^\circ & 59' & 59".6297 \\ 15^\circ & 06' & 53".0162 \\ 99^\circ & 11' & 42".5740 \end{bmatrix}$$

A partir das direcções ajustadas, podem obter-se os 8 ângulos ajustados do quadrilátero:

$$1 = d_{11} - d_{10} = 22^{\circ} 1' 41''.4978$$

$$2 = d_{12} - d_{11} = 16^{\circ} 44' 32''.1822$$

$$3 = d_{14} - d_{13} = 57^{\circ} 8' 56''.7622$$

$$4 = d_{15} - d_{14} = 19^{\circ} 33' 15''.8437$$

$$5 = d_{17} - d_{16} = 86^{\circ} 33' 15''.2120$$

$$6 = d_{18} - d_{17} = 58^{\circ} 46' 35''.5578$$

$$7 = d_{20} - d_{19} = 15^{\circ} 6' 53''.3865$$

$$8 = d_{21} - d_{20} = 84^{\circ} 4' 49''.5578$$

Ajustamento dos ângulos:

ângulos, a	valor
1	22° 01' 42".51
2	16° 44' 31".20
3	57° 08' 57".10
4	19° 33' 14".13
5	86° 33' 13".45
6	58° 46' 35".93
7	15° 06' 52".28
8	84° 04' 50".66

tabela 4.8. Ângulos azimutais observados

Neste caso, embora as direcções sejam as observações originais não correlacionadas, os ângulos obtidos por diferença das direcções são correlacionados pois sendo $\bar{a} = J\bar{d}$, a matriz cofactor dos ângulos é dada por $Q_{\bar{a}} = JQ_{\bar{d}}J^{-1} = JJ^{-1}$ pois $Q_{\bar{d}} = I$. Este pormenor é importante na definição de um modelo estocástico correcto.

Para obter o número de equações de condição basta verificar que para definir a forma de um quadrilátero são suficientes quatro ângulos ($n_0=4$), pelo que $r = 8 - 4 = 4$:

$$f_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_8 - \pi = 0$$

$$f_2 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - \pi = 0$$

$$f_3 = a_1 + a_6 + a_7 + a_8 - \pi = 0$$

$$f_4 = \frac{\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7}{\sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8} - 1 = 0$$

Linearizando as equações anteriores, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & a_{4,7} & a_{4,8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ -f_3 \\ -f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3414 \\ 1.0502 \\ -0.7066 \\ 0.0072 \end{bmatrix}^{-1}$$

onde

$$a_{4,1} = \frac{\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7}{\sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8} \cot a_1 = 2.4716$$

$$a_{4,2} = \frac{\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7}{\sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8} \cot a_2 = -3.3244$$

$$a_{4,3} = \frac{\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7}{\sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8} \cot a_3 = 0.6457$$

$$a_{4,4} = \frac{\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7}{\sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8} \cot a_4 = -2.8156$$

$$a_{4,5} = \frac{\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7}{\sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8} \cot a_5 = 0.0602$$

$$a_{4,6} = \frac{\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7}{\sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8} \cot a_6 = -0.6062$$

$$a_{4,7} = \frac{\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7}{\sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8} \cot a_7 = 3.7025$$

$$a_{4,8} = \frac{\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7}{\sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8} \cot a_8 = 0.1037$$

$$N = \begin{bmatrix} 6.0 & -2.0 & 2.0 & -0.6557 \\ -2.0 & 6.0 & 2.0 & 0.6859 \\ 2.0 & 2.0 & 6.01 & 10.5939 \\ -0.6557 & 0.6859 & 10.5939 & 100.1021 \end{bmatrix}^{-2}, N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2773 & 0.1490 & -0.1765 & 0.0195 \\ 0.1490 & 0.2712 & -0.1703 & 0.0171 \\ -0.1765 & -0.1703 & 0.3471 & -0.0367 \\ 0.0195 & 0.3471 & -0.0367 & 0.0139 \end{bmatrix}^{-2},$$

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} 0.3414 \\ 1.0502 \\ -0.7066 \\ 0.0072 \end{bmatrix}^{-2}, \bar{v} = \begin{bmatrix} -1.0122 \\ 0.9822 \\ -0.3378 \\ 1.7137 \\ 1.7620 \\ -0.3722 \\ 1.1065 \\ -1.1022 \end{bmatrix}, \hat{a} = \begin{bmatrix} 22^\circ & 01' & 41''.4978 \\ 16^\circ & 44' & 32''.1822 \\ 57^\circ & 08' & 56''.7622 \\ 19^\circ & 33' & 15''.8437 \\ 86^\circ & 33' & 15''.2120 \\ 58^\circ & 46' & 35''.5578 \\ 15^\circ & 06' & 53''.3865 \\ 84^\circ & 04' & 49''.5578 \end{bmatrix},$$

Ajustando primeiro as direcções e calculando em seguida os ângulos ou calculando primeiro os ângulos e ajustando-os em seguida conduziu ao mesmo resultado. Note-se, uma vez mais, que do conjunto dado não podem ser obtidas as coordenadas dos vértices do quadrilátero por não ter sido definido um *datum*.

4.7. Solução sequencial

Supondo agora que as observações são processadas em dois conjuntos $\bar{\ell}_{a1}$ e $\bar{\ell}_{a2}$ (sem observações em comum), o segundo contendo uma ou mais observações mas de forma a que os parâmetros sejam comuns, os dois modelos de ajustamento geral são dados por:

$$\begin{cases} \bar{F}_1(\bar{\ell}_{a1}, \bar{x}_a) = 0 \\ \bar{F}_2(\bar{\ell}_{a2}, \bar{x}_a) = 0 \end{cases}$$

Os dois conjuntos de observações devem ser não correlacionados e a variância *a priori* por unidade de peso deve ser igual para ambos os conjuntos, isto é

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_2^{-1} \end{bmatrix}$$

O número de observações em $\bar{\ell}_{a1}$ e em $\bar{\ell}_{a2}$ é n_1 e n_2 , respectivamente, sendo o número de equações em cada modelo igual a c_1 e c_2 , respectivamente.

A forma linearizada dos dois modelos é dada por

$$\begin{cases} B_1 \bar{v}_1 + A_1 \delta \bar{x} + \bar{W}_1 = 0 \\ B_2 \bar{v}_2 + A_2 \delta \bar{x} + \bar{W}_2 = 0 \end{cases}$$

onde

$$B_1 = \left. \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{\ell}_1} \right|_{\bar{\ell}_{1b}, \bar{x}_0}, \quad B_2 = \left. \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{\ell}_2} \right|_{\bar{\ell}_{2b}, \bar{x}_0}, \quad A_1 = \left. \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{\ell}_{1b}, \bar{x}_0}, \quad A_2 = \left. \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{\ell}_{2b}, \bar{x}_0}, \quad \bar{W}_1 = \bar{F}_1(\bar{\ell}_{1b}, \bar{x}_0), \quad \bar{W}_2 = \bar{F}_2(\bar{\ell}_{2b}, \bar{x}_0).$$

A função a ser minimizada neste caso é:

$$\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \delta \bar{x}) = \bar{v}_1^T P \bar{v}_1 + \bar{v}_2^T P \bar{v}_2 - 2\bar{k}_1^T (B_1 \bar{v}_1 + A_1 \delta \bar{x} + \bar{W}_1) - 2\bar{k}_2^T (B_2 \bar{v}_2 + A_2 \delta \bar{x} + \bar{W}_2)$$

cujas derivadas parciais são:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{v}_1} \right)^T = P_1 \bar{v}_1 - B_1^T \bar{k}_1 = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{v}_2} \right)^T = P_2 \bar{v}_2 - B_2^T \bar{k}_2 = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \delta \bar{x}} \right)^T = -A_1^T \bar{k}_1 - A_2^T \bar{k}_2 = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{k}_1} \right)^T = B_1 \bar{v}_1 + A_1 \delta \bar{x} + \bar{W}_1 = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{k}_2} \right)^T = B_2 \bar{v}_2 + A_2 \delta \bar{x} + \bar{W}_2 = 0 \end{cases}$$

Das duas primeiras equações obtêm-se os resíduos:

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = P_1^{-1} B_1^T \bar{k}_1 \\ \bar{v}_2 = P_2^{-1} B_2^T \bar{k}_2 \end{cases}$$

Combinando $P_1 \bar{v}_1 - B_1^T \bar{k}_1 = 0$ e $B_1 \bar{v}_1 + A_1 \delta \bar{x} + \bar{W}_1 = 0$ obtém-se $M_1 \bar{k}_1 + A_1 \delta \bar{x} + \bar{W}_1 = 0$, onde $M_1 = B_1 P_1^{-1} B_1^T$ é uma matriz simétrica $c_1 \times c_1$. O vector dos multiplicadores de Lagrange é dado pela expressão $\bar{k}_1 = -M_1^{-1} A_1 \delta \bar{x} - M_1^{-1} \bar{W}_1$. As equações $-A_1^T \bar{k}_1 - A_2^T \bar{k}_2 = 0$ e $B_2 \bar{v}_2 + A_2 \delta \bar{x} + \bar{W}_2 = 0$, após combinação com as equações $\bar{k}_1 = -M_1^{-1} A_1 \delta \bar{x} - M_1^{-1} \bar{W}_1$ e $\bar{v}_2 = P_2^{-1} B_2^T \bar{k}_2$, permitem obter

$$\begin{cases} A_1^T M_1^{-1} A_1 \delta \bar{x} + A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 - A_2^T \bar{k}_2 = 0 \\ B_2 P_2^{-1} B_2^T \bar{k}_2 + A_2 \delta \bar{x} + \bar{W}_2 = 0 \end{cases}$$

Utilizando $M_2 = B_2 P_2^{-1} B_2^T$, as expressões anteriores têm a forma

$$\begin{bmatrix} A_1^T M_1^{-1} A_1 & A_2^T \\ A_2 & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \bar{x} \\ -\bar{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 \\ -\bar{W}_2 \end{bmatrix}$$

que mostra a forma como a matriz normal do primeiro conjunto de observações ($A_1^T M_1^{-1} A_1$) tem que ser ampliada de forma a ser possível obter a solução para os dois conjuntos. Invertendo essa matriz ampliada, obtém-se a solução para $\delta \bar{x}$ e para \bar{k}_2 .

Exemplo: utilizando a mesma rede de nivelamento do caso já estudado, considerem-se os dois conjuntos de observações $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$ e $\{\ell_5\}$, com os quais se podem definir os seguintes dois modelos, respectivamente com $n_1 = 4$, $r_1 = 4 - 3 = 1$, $c_1 = r_1 + u = 1 + 3 = 4$ (com o qual se pode obter uma solução) e $n_2 = 1$, $r_2 = 1 - 3 = -2$, $c_2 = r_2 + u = -2 + 3 = 1$:

$$\begin{cases} BM + \ell_1 + v_1 + \ell_2 + v_2 - x_2 = 0 \\ BM + \ell_3 + v_3 + \ell_4 + v_4 - x_3 = 0 \\ BM + \ell_3 + v_3 - x_2 = 0 \\ BM + \ell_3 + v_3 - \ell_2 - v_2 - x_1 = 0 \\ BM + \ell_5 + v_5 - x_3 = 0 \end{cases}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{cases} B_1 \bar{v}_1 + A_1 \bar{x} + \bar{W}_1 = 0 \\ B_2 \bar{v}_2 + A_2 \bar{x} + \bar{W}_2 = 0 \end{cases}$$

em que

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{W}_1 = \begin{bmatrix} BM + \ell_1 + \ell_2 \\ BM + \ell_3 + \ell_4 \\ BM + \ell_3 \\ BM - \ell_2 + \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.269 \\ 107.280 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = [1] = 1, \bar{v}_2 = [v_5] = v_5, A_2 = [0 \quad 0 \quad -1], \bar{W}_2 = [BM + \ell_5] = [111.243] = 111.243.$$

O primeiro conjunto de observações pode ser utilizado para obter uma solução para os parâmetros:

$$M_1 = B_1 P_1^{-1} B_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = A_1^T M_1^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$U_1 = A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.269 \\ 107.280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -1.009 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = -N_1^{-1}U_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -1.009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.268 \\ 110.263 \\ 111.272 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3}$$

O resultado é naturalmente diferente do exemplo anterior pois agora não se utilizou a totalidade da informação então disponível (os 5 desníveis); incluindo nesta solução a informação correspondente ao segundo conjunto de dados, recorrendo a

$$\begin{bmatrix} A_1^T M_1^{-1} A_1 & A_2^T \\ A_2 & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ -\bar{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 \\ -\bar{W}_2 \end{bmatrix}$$

com $M_2 = B_2 P_2^{-1} B_2^T = [1] = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ -\bar{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T M_1^{-1} A_1 & A_2^T \\ A_2 & -M_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 \\ -\bar{W}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 1.009 \\ -111.243 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 & -0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 & -0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 & -0.625 \\ -0.125 & -0.250 & -0.625 & -0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 1.009 \\ -111.243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \\ -0.010875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3 e } k_2.$$

obtendo-se a mesma solução que no caso anterior.

Pode igualmente utilizar-se um procedimento de particionamento para se obter a solução pretendida; de

$$\begin{cases} \delta \bar{x} = -Q_{11} A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 - Q_{12} \bar{W}_2 \\ \bar{k}_2 = Q_{21} A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 + Q_{22} \bar{W}_2 \end{cases}$$

onde

$$Q_{11} = (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} - (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T (M_2 + A_2 (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T)^{-1} A_2 (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1},$$

$$Q_{12} = (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T (M_2 + A_2 (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T)^{-1}$$

$$Q_{21} = Q_{12}^T$$

$$Q_{22} = -(M_2 + A_2 (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T)^{-1}$$

tem-se, por substituição de Q_{11} e Q_{12} em $\delta \bar{x} = -Q_{11} A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 - Q_{12} \bar{W}_2$ a solução sequencial para os parâmetros: representando a solução do primeiro conjunto por $\delta \bar{x}^*$ e a contribuição do segundo conjunto por $\Delta \bar{x}$, tal que $\delta \bar{x} = \delta \bar{x}^* + \Delta \bar{x}$, então:

$$\begin{cases} \delta\bar{x}^* = -N_1^{-1}U_1 = -(A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 \\ \Delta\bar{x} = -(A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T (M_2 + A_2 (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T)^{-1} (A_2 \delta\bar{x}^* + \bar{W}_2) \end{cases}$$

e, de forma idêntica

$$\bar{k}_2 = -(M_2 + A_2 (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T)^{-1} (A_2 \delta\bar{x}^* + \bar{W}_2).$$

Exemplo: como já se viu, a solução do primeiro conjunto de observações é

$$\bar{x}^* = -N_1^{-1}U_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -1.009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.268 \\ 110.263 \\ 111.272 \end{bmatrix}.$$

A contribuição do segundo conjunto de dados para a solução é:

$$\Delta\bar{x} = -(A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T (M_2 + A_2 (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T)^{-1} (A_2 \bar{x}^* + \bar{W}_2) =$$

$$-\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 107.268 \\ 110.263 \\ 111.272 \end{bmatrix} + 111.243 \right) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \left(1 + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} (-111.272 + 111.243) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{5}{3} \right)^{-1} (-0.029) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \frac{3}{8} (-0.029) = \begin{bmatrix} -0.003625 \\ -0.007250 \\ -0.018125 \\ -0.018125 \end{bmatrix}$$

de tal forma que a solução completa é dada por

$$\bar{x} = \bar{x}^* + \Delta\bar{x} = \begin{bmatrix} 107.268 \\ 110.263 \\ 111.272 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.003625 \\ -0.007250 \\ -0.018125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3}$$

Uma forma alternativa para a solução de

$$\begin{bmatrix} A_1^T M_1^{-1} A_1 & A_2^T \\ A_2 & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \bar{x} \\ -\bar{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 \\ -\bar{W}_2 \end{bmatrix}$$

consiste em utilizar a expressão

$$\delta \bar{x} = -(A_1^T M_1^{-1} A_1 + A_2^T M_2^{-1} A_2)^{-1} (A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 + A_2^T M_2^{-1} \bar{W}_2),$$

que se designa por método de adição de equações normais, uma vez que a contribuição de novas observações é adicionada de forma simples.

Exemplo: utilizando a última expressão, mais uma vez com a mesma rede de nivelamento:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= - \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -1.009 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -111.243 \end{bmatrix} \right) = \\ &= - \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 112.252 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 112.252 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 112.252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1, 2 e 3} \end{aligned}$$

Relacionando a expressão $\delta \bar{x} = -(A_1^T M_1^{-1} A_1 + A_2^T M_2^{-1} A_2)^{-1} (A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 + A_2^T M_2^{-1} \bar{W}_2)$ com Q_{11} , obtém-se:

$$\begin{aligned} Q_{\delta \bar{x}} &= Q_{11} = (A_1^T M_1^{-1} A_1 + A_2^T M_2^{-1} A_2)^{-1} = \\ &= (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} - (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T (M_2 + A_2 (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2)^{-1} A_2 (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} = \\ &= Q_{\delta \bar{x}}^* - Q_{\delta \bar{x}}^* A_2^T (M_2 + A_2 Q_{\delta \bar{x}}^* A_2^T)^{-1} A_2 Q_{\delta \bar{x}}^* = Q_{\delta \bar{x}}^* + \Delta Q_{\delta \bar{x}} \end{aligned}$$

onde $Q_{\delta \bar{x}}^*$ é a matriz cofactor do primeiro conjunto de observações e $\Delta Q_{\delta \bar{x}} = -Q_{\delta \bar{x}}^* A_2^T (M_2 + A_2 Q_{\delta \bar{x}}^* A_2^T)^{-1} A_2 Q_{\delta \bar{x}}^*$ é a contribuição do segundo conjunto de observações para a matriz cofactor do primeiro grupo de observações, podendo verificar-se que $\Delta Q_{\delta \bar{x}}$ pode ser calculado sem dispor do segundo conjunto de observações, o que é uma grande vantagem em estudos de simulação.

Atendendo a que $\bar{v}^T P \bar{v} = \bar{v}_1^T P \bar{v}_1 + \bar{v}_2^T P \bar{v}_2 = -\bar{k}_1^T \bar{W}_1 - \bar{k}_2^T \bar{W}_2$, utilizando os resultados obtidos anteriormente, tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{v}^T P \bar{v} &= \delta \bar{x}^{*T} A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 + \Delta \bar{x}^T A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 + \bar{W}_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 - \bar{k}_2^T \bar{W}_2 = \bar{v}^T P \bar{v}^* + \Delta \bar{x}^T A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 - \bar{k}_2^T \bar{W}_2 = \\ &= \bar{v}^T P \bar{v}^* + (A_2 \delta \bar{x}^* + \bar{W}_2)^T (M_2 + A_2 (A_1^T M_1^{-1} A_1)^{-1} A_2^T)^{-1} (A_2 \delta \bar{x}^* + \bar{W}_2) = \bar{v}^T P \bar{v}^* + \Delta \bar{v}^T P \bar{v}\end{aligned}$$

A variância *a posteriori* por unidade de peso é calculada de forma usual: $s_0^2 = \frac{\bar{v}^T P \bar{v}}{c_1 + c_2 - u}$.

De

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1^* + \Delta \bar{v}_1 = -P_1^{-1} B_1^T M_1^{-1} (A_1 (\delta \bar{x}^* + \Delta \bar{x}) + \bar{W}_1) = -P_1^{-1} B_1^T M_1^{-1} (A_1 \delta \bar{x}^* + \bar{W}_1) - P_1^{-1} B_1^T M_1^{-1} A_1 \Delta \bar{x},$$

tem-se que

$$\bar{v}_2 = -P_2^{-1} B_2^T T (A_2 \delta \bar{x}^* + \bar{W}_2),$$

onde $T = (M_2 + A_2 N_1^{-1} A_2^T)^{-1}$ e $N_1 = A_1^T M_1^{-1} A_1$, contribuindo o segundo conjunto de observações para a totalidade dos resíduos.

Note-se que as diversas matrizes devem ser calculadas para os mesmos parâmetros aproximados, isto é, se se obtiver a solução do primeiro sistema através de um processo iterativo, os parâmetros aproximados da última iteração têm que ser utilizados na resolução do segundo sistema (como não há observações comuns aos dois conjuntos, os processos iterativos podem ser efectuados individualmente em cada conjunto).

Ocasionalmente, pode ser desejável remover um conjunto de observações de um dado ajustamento. Considerando o caso de observações não correlacionadas, a solução obtém-se de $\delta \bar{x} = -(A_1^T M_1^{-1} A_1 + A_2^T M_2^{-1} A_2)^{-1} (A_1^T M_1^{-1} \bar{W}_1 + A_2^T M_2^{-1} \bar{W}_2)$, expressão que mostra a forma como é possível acrescentar equações normais quando um novo conjunto de observações é incluído. Quando se trata de remover observações, as partes correspondentes da matriz normal e do segundo membro têm que ser subtraídas.

4.8. Selecção convencional do *datum*

O problema de ordem zero ou problema do *datum* pode ser considerado como o resultado de uma modelação imperfeita que resulta num problema impossível: quando se utiliza o modelo $\bar{l}_{n,1} + \bar{u}_{n,1} = A_{n,u} \delta \bar{x}_{u,1}$, é necessário seleccionar parâmetros que possam ser obtidos das observações, em geral direcções, ângulos, distâncias ou desníveis. No caso das redes geodésicas, os parâmetros (desconhecidos) são normalmente altitudes e/ou coordenadas dos pontos da rede não só porque as equações de observação que relacionam observações e parâmetros são simples, mas também porque a matriz de variâncias-covariâncias dos parâmetros é obtida durante o cálculo dos próprios parâmetros e porque o resultado é facilmente visualizado. Considerem-se os seguintes dois exemplos que ilustram o problema do *datum*, o primeiro numa rede a uma dimensão e o segundo numa rede a duas dimensões. Em ambos os casos, as observações determinam a geometria da rede mas se se pretenderem as coordenadas ou altitudes dos pontos da rede, é necessário fornecer informação adicional, de forma a obter-se uma rede com constrangimento mínimo, através da fixação do *datum*.

Exemplo: foram observados os 6 desníveis $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ com $P_{6,6} = I_{6,6}$ (figura 4.21.), sendo os parâmetros as altitudes C_1, C_2, C_3 e C_4 dos 4 pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 . Podem estabelecer-se as seguintes 6 equações entre as 6 observações e os 4 parâmetros ($n_0=4, n=6, r=n-n_0=2, u=4, c=r+u=6$):

$$\begin{cases} l_1 + v_1 = -C_1 + C_2 \\ l_2 + v_2 = C_2 - C_4 \\ l_3 + v_3 = C_2 - C_3 \\ l_4 + v_4 = C_3 - C_4 \\ l_5 + v_5 = C_1 - C_3 \\ l_6 + v_6 = C_1 - C_4 \end{cases}$$

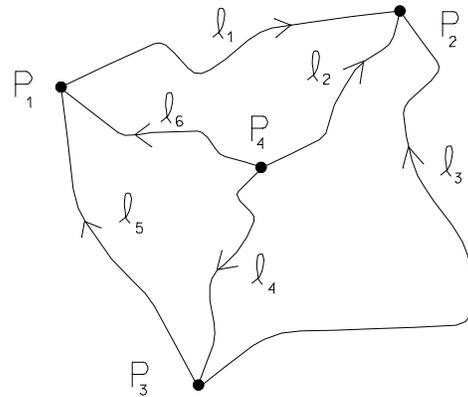


figura 4.21.: Problema do datum geodésico a 1-d

ou, na forma matricial, $\bar{l}_{6,1} + \bar{v}_{6,1} = A_{6,4}\bar{x}_{4,1}$, com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{matriz dos coeficientes dos parâmetros, } \bar{x} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \text{vector dos parâmetros}$$

A característica $C(A)$ da matriz A é igual ao número máximo de linhas ou colunas linearmente independentes, sendo igual a 3 (por exemplo, a 1ª coluna é igual à soma dos simétricos das 3 restantes colunas), isto é, existe um vector $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$ em que pelo menos um dos $\lambda_i \neq 0$ e tal que $A\bar{\lambda} = 0$. Designa-se por núcleo da aplicação $f: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida pela matriz A no subespaço $N(A) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 : A\bar{x} = \bar{0} \}$, cuja dimensão d tem o nome de nulidade ou *deficit* de característica de A , de tal forma que $d = \dim(A) - C(A) = 4 - 3 = 1$.

A matriz 4×4 das equações normais $N = (A^T P A)$, dada por

$$N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 3 e portanto é singular, não tendo inversa, pelo que é impossível estimar as altitudes a partir da equação $\bar{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P \bar{\ell}$, o que traduz o facto de qualquer translação em altitude dos 4 pontos manter os desníveis observados, não sendo no entanto possível calcular as cotas dos pontos de forma unívoca. O *deficit* de característica é eliminado definindo um *datum*, isto é, introduzindo uma quantidade independente fixando a altitude de (qualquer) um dos pontos, o que permite a inversão da matriz normal (impõe-se portanto um constrangimento mínimo para a rede).

Um *datum* com significado físico é um elemento fundamental no processo de determinação dos vectores posição ou vectores deslocamentos: para além de eliminar o *deficit* de característica da rede de monitorização, um *datum* deve fornecer uma estimativa razoável para o vector dos parâmetros e para a respectiva matriz cofactor.

Exemplo: considerando o quadrilátero da figura 4.22., se forem observados os 8 ângulos α_i ($i=1,\dots,8$), sendo as coordenadas planimétricas dos 4 pontos os parâmetros ($u=8$), a matriz A dos coeficientes das equações de observação do tipo $v_k - R_{i,j} + R_{\ell,j} = -\alpha_k$, $k=1,\dots,8$, $i, j, \ell=1,\dots,4$, $i \neq j \neq \ell$, que relacionam os 8 ângulos observados com as 8 coordenadas (x_i, y_i) , $i=1,\dots,4$ é 8×8 , tendo-se $C(A)=4$, pelo que $d = 8 - 4 = 4$ (*deficit* de característica de A), correspondendo à possibilidade de qualquer conjugação de duas translações (em X e em Y), uma rotação em torno de Z e a aplicação de um factor de escala manter os ângulos observados. O *deficit* de característica é eliminado definindo um *datum*, isto é introduzindo 4 quantidades independente, por exemplo fixando as coordenadas de dois dos pontos ou fixando as coordenadas de um dos pontos e definindo um rumo e uma distância para outro ponto, o que permite a inversão da matriz normal.

Caso sejam medidas as 6 distâncias d_{ij} ($i=1,\dots,4, j=1,\dots,4, i \neq j$) entre os pontos da rede, a matriz A dos coeficientes das equações de observação do tipo $v_{i,j} + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = d_{i,j}^2$, $i, j=1,\dots,4, i \neq j$, que relacionam as 6 distâncias observadas com as 8 coordenadas (x_i, y_i) , $i=1,\dots,4$ é 6×8 , tendo-se $C(A)=5$, pelo que $d=8-5=3$, correspondendo à possibilidade de qualquer conjugação de duas translações em X e em Y e uma rotação em torno de Z manter a configuração da rede, definindo as distâncias medidas a escala (isto é, neste caso, as próprias observações definiram o factor de escala).

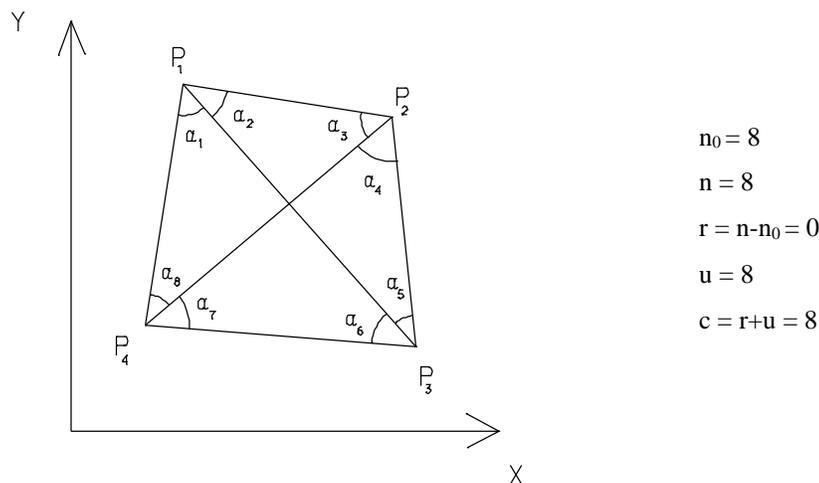


figura 4.22.: Problema do *datum* geodésico a 2-d

Na generalização para uma rede a 3 dimensões, o *deficit* de característica máximo da matriz A é igual a 7, sendo neste caso necessárias 7 quantidades de forma a definir o *datum* (este número é reduzido para 6 se a escala for obtida a partir de medições de distância e para 5 se a orientação do eixo z for obtida a partir de observações da distância zenital), permitindo então a inversão da matriz normal.

Nas redes geodésicas de 1ª ordem a nível europeu seguiu-se este procedimento quando estas foram observadas e processadas há mais de um século, definindo-se um ponto origem da rede – *datum* geodésico, no qual foram arbitradas coordenadas geodésicas (em geral iguais às coordenadas astronómicas), ondulação do geóide nula (altitude elipsoidal igual à altitude ortométrica), desvios da vertical nulos (normal ao elipsóide coincidente com a vertical do lugar) e rumo (azimute geodésico) para outro ponto da rede coincidente com o azimute astronómico, convenientemente reduzido.

Como exemplo, cite-se o caso do *datum* Lisboa, tendo sido adoptado o elipsóide de Hayford, o primitivo vértice Castelo de S. Jorge como ponto origem das coordenadas geodésicas, tendo as observações astronómicas sido aí efectuadas cerca de 1890; a orientação da rede era dada pelo azimute Lisboa-Serves e a escala da rede era dada pela base da Chamusca (decâmetro de Repsold); as observações angulares foram efectuadas entre 1863 e 1888 utilizando teodolitos Troughton e Repsold, utilizando-se para efeitos de cálculo o método das equações de condição, no caso da triangulação fundamental com um único bloco e no caso da restante 1ª ordem com vários blocos. Como outro exemplo, cite-se o caso do *datum* 73, tendo sido adoptado o elipsóide de Hayford, o vértice Melriça T.F. nº 4 como ponto origem das coordenadas geodésicas, tendo as observações astronómicas sido aí efectuadas em 1964; a orientação da rede foi obtida através de várias estações de Laplace; a escala da rede era dada através da base de ínvar de Vilar Formoso juntamente com a medição de vários lados utilizando geodímetros AGA e Electrotape e telurómetros; as observações angulares foram efectuadas nos anos 60 com teodolitos T3 e T4; foi utilizado o método da variação de coordenadas no cálculo da triangulação fundamental em bloco. A alteração do *datum* Lisboa para *datum* 73 deveu-se ao facto de o ponto origem no primeiro caso ser muito excêntrico relativamente à configuração do país, o que se traduzia numa acumulação de erros provocando distorções nas regiões mais afastadas da origem; assim, a adopção de uma origem na zona central de Portugal permitiu uma distribuição mais equilibrada das distorções (note-se que as coordenadas dos vértices comuns aos dois *data* seriam diferentes devido à alteração da origem, mesmo se tivessem sido utilizadas as mesmas observações para recalculer o transporte de coordenadas geodésicas, o que significa que a selecção do *datum* não é irrelevante no resultado final do ajustamento, isto é, uma mudança de *datum* traduz-se numa alteração das coordenadas dos pontos da rede). Todas as observações subsequentes tendo em vista a densificação da rede estão relacionadas com a rede de 1ª ordem através de observações ligando pontos novos aos já existentes. Uma vez que as coordenadas dos pontos da rede de 1ª ordem não entram no cálculo das redes seguintes (são consideradas fixas), o modelo não sofre do problema do *datum*. Quando se observa uma rede local para efeitos de análise de deformação, a precisão necessária é muito superior à da rede geodésica existente, pelo que a adopção do *datum* nacional degrada os resultados. Instalam-se por esta razão redes locais independentes, sendo o *datum* seleccionado de uma forma optimizada para essa aplicação particular. O ETRS89 é um sistema global de referência recomendado pela EUREF (European Reference Frame, subcomissão da IAG - Associação Internacional de Geodesia) estabelecido através de técnicas espaciais de observação. No simpósio da EUREF realizado em Itália em 1990 foi adoptada a seguinte resolução: "A Sub-comissão da IAG para o Referencial Geodésico Europeu (EUREF) recomenda que o sistema a ser adoptado pela EUREF seja coincidente com o ITRS na época de 1989.0 e fixado à parte estável da Placa Euro-Asiática, sendo designado por Sistema de Referência Terrestre Europeu 1989 (European Terrestrial Reference System – ETRS89)".

O estabelecimento do ETRS89 em Portugal Continental foi efectuado com base em campanhas internacionais (realizadas em 1989, 1995 e 1997), que tiveram como objectivo ligar convenientemente a rede portuguesa à rede europeia. Nos anos subsequentes, toda a Rede Geodésica de 1ª e 2ª ordens do Continente foi observada com GPS (em cada sessão foram utilizados 5 receptores de dupla frequência estacionados em 5 pilares). A primeira fase do processamento consistiu no ajustamento livre da rede fixando o vértice Melriça-TF4, de forma a detectar eventuais erros; como resultado do ajustamento da rede constrangida aos 11 pontos (fixos) da solução IBERIA95, num total de 126 pilares geodésicos (560 vectores), os valores máximos das elipses de confiança foram 5.5 cm para ambas as componentes, dentro dos valores esperados para este tipo de redes. O sistema PT-TM06/ETRS89 deverá substituir completamente os anteriormente usados, que se consideram obsoletos.

Para definir um sistema de referência (*datum*) é necessário fixar parâmetros do *datum*, em número igual ao *deficit* de característica da matriz dos coeficientes das equações de observação (isto é, elimina-se a indeterminação do sistema de equações de condição fixando alguns parâmetros). Uma condição importante na definição de um *datum* é que este não deve afectar a geometria da rede, sendo a posição relativa dos pontos definida exclusivamente a partir das observações geodésicas efectuadas, isto é, o *datum* não deve impor restrições ou constrangimentos às observações (no sentido em que se forem incluídas mais equações de constrangimento do que o mínimo indispensável, o problema de ajustamento torna-se constrangido e nesse caso as observações têm que se adaptar a esses constrangimentos, podendo acontecer, num caso limite, as observações serem de grande qualidade mas, por terem de adaptar-se a uma rede constrangida cujas estações têm as coordenadas mal calculadas (rede distorcida), virem a sofrer grandes correcções após o ajustamento). Convencionalmente tem-se:

- Rede a uma dimensão: define-se uma superfície de igual potencial como referência, fixando a altitude de um ponto da rede, no caso de linhas de nivelamento (ou o valor da gravidade, no caso de linhas de gravimetria). Na maior parte dos casos a escala da rede é obtida dos desníveis (diferenças de gravidade) observados; se a escala também for considerada como um parâmetro do *datum*, é necessário fixar um desnível entre dois pontos da rede (diferença de gravidade) para além da altitude (gravidade) de um dos pontos da rede.
- Rede a duas dimensões: define-se um sistema de coordenadas cartesiano fixando duas coordenadas de um ponto e o rumo (azimute) para um segundo ponto. Se não forem observadas distâncias, é necessário fixar uma distância entre dois pontos da rede. Neste último caso, como alternativa é possível fixar as coordenadas de dois pontos da rede.
- Rede a três dimensões: define-se um sistema de coordenadas cartesiano fixando três coordenadas de um ponto, um rumo (azimute) e dois ângulos zenitais. Sendo a escala um parâmetro do *datum*, então é necessário fixar uma distância. Como alternativa podem fixar-se as coordenadas de dois dos pontos da rede e um outro elemento adicional.

Observáveis	t_x	t_y	r_z	s
Distâncias	---	---	---	x
Ângulos azimutais	---	---	---	---
Azimutes	---	---	x	---
Posições	x	x	x	x
Diferenças de posições	---	---	x	x

tabela 4.9. Informação contida nas observações geodésicas úteis para a definição dos parâmetros do *datum* 2D: t_x e t_y definem a translação em relação ao referencial (x,y) adoptado, r_z define a rotação em relação ao eixo z e s define a escala

4.9. Equações de observação e equações de constrangimento no posicionamento

Uma equação de constrangimento define-se como aquela que relaciona parâmetros entre si (ou seja, as observações não entram nas equações de constrangimento), de tal forma que a sua presença no modelo funcional implica que os parâmetros sejam linearmente dependentes. Os constrangimentos podem ocorrer quando vários parâmetros (ou a totalidade) têm que verificar alguma relação física ou geométrica (como por exemplo os pontos de regolfo de uma albufeira serem obrigados a ter a mesma cota, pontos que definem um arco circular do traçado em planta de uma estrada serem constrangidos a pertencer a uma mesma circunferência, etc.). O seu objectivo é regularizar o sistema de equações, eliminando o respectivo *deficit* de característica.

A dependência funcional dos parâmetros obriga a ter tantos parâmetros dependentes quantas equações de constrangimento existirem. Como já foi visto, de n observações e de n_0 , número mínimo de variáveis que definem o modelo, determina-se a redundância r , podendo ser formuladas $c = r$ equações (de observação) independentes contendo apenas as n observações (isto é, não entram os parâmetros); no caso de serem incluídos u' parâmetros funcionalmente independentes, o número de equações (de condição) aumenta para $c = r + u'$, até ao máximo de n . Em geral, existindo $u > u'$ parâmetros, alguns deles serão funcionalmente dependentes, devendo definir-se $s = u - u'$ equações de constrangimento, sendo s o número de parâmetros dependentes (s tem que ser menor que u , caso contrário os constrangimentos tornam-se um conjunto inconsistente de equações). Tem-se assim que

$$c + s = r + u$$

isto é, o número de equações de condição mais o número de equações de constrangimento é igual à redundância mais o número total de parâmetros dependentes. Deve continuar a verificar-se $r \leq c \leq n$; no entanto, a limitação colocada ao número de parâmetros $0 \leq u \leq n_0$, válida para o caso de parâmetros funcionalmente independentes, deixa de ter de se verificar, ou seja, não há limite superior para o número de parâmetros.

O caso geral representa-se pelas equações:

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{c \times n} \bar{\mathbf{v}}^{n \times 1} + \mathbf{A}^{c \times u} \delta \bar{\mathbf{X}}^{u \times 1} + \bar{\mathbf{W}}^{c \times 1} = 0 \\ \mathbf{R}^{s \times u} \delta \bar{\mathbf{X}}^{u \times 1} - \bar{\mathbf{C}}^{s \times 1} = 0 \end{cases}$$

em que $C(\mathbf{B})=c$, $C(\mathbf{A})=u$, $C(\mathbf{R})=s$, onde C representa a característica de uma matriz. Existindo constrangimentos, pode acontecer que $u > c$, o que significa que $C(\mathbf{A})=c$; nesta situação, a solução por particionamento já estudada não funciona.

Nas redes com constrangimento mínimo as observações não são constrangidas pelas coordenadas consideradas fixas.

Como resumo, tem-se:

$$\text{redes} \begin{cases} \text{sem constrangimento mínimo (livres) : } d > 0 \\ \text{com constrangimento mínimo } d = 0, s = 0 \begin{cases} \text{com pontos fixos} \\ \text{sem pontos fixos} \end{cases} \\ \text{com constrangimentos (redes constrangidas) : } d = 0, s > 0 \end{cases}$$

Em geral, as redes de monitorização de deformação são redes livres, que não contém informação suficiente para serem fixadas no espaço, onde o *deficit* de característica é eliminado utilizando alguma das técnicas que vão ser introduzidas de seguida.

4.10. Definição de um *datum* através de uma base com variância nula

Um *datum* fisicamente realizado consiste nos seguintes princípios:

- 1) um referencial que se identifica com a realidade física (que se materializa) através da ligação a um conjunto de pontos convenientemente monumentalizados
- 2) a matriz de variâncias-covariâncias dos parâmetros depende de uma base com variância nula convenientemente identificada, definida como um subconjunto dos pontos da rede

Considerando uma rede geodésica representada pelo modelo $\bar{\ell}^{n \times 1} + \bar{\mathbf{v}}^{n \times 1} = \mathbf{A}^{n \times u} \bar{\mathbf{x}}^{u \times 1}$, onde a matriz \mathbf{A} tem *deficit* de característica igual a d , a forma convencional de definir o *datum* consiste em eliminar a(s) coluna(s) da matriz \mathbf{A} dos coeficientes dos parâmetros que se refere(m) ao(s) parâmetro(s) considerado(s) fixo(s) e portanto cuja variância é nula, isto é, no decorrer do processo iterativo não há alteração do valor desse(s) parâmetro(s).

Se o modelo anterior sofrer uma partição segundo este conceito, ou seja, $[\bar{x}]^T = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2]^T$, em que se supõe para simplificar a escrita que os parâmetros que se fixam ocupam as últimas d posições do vector dos parâmetros, (o que significa que as coordenadas aproximadas de \bar{x}_2 permanecem inalteradas durante o processo iterativo) :

$$\bar{\ell}^{n \times 1} + \bar{v}^{n \times 1} = A^{n \times u} \bar{x}^{u \times 1} = \begin{bmatrix} A_1^{n \times (u-d)} & A_2^{n \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(u-d) \times 1} \\ \bar{x}_2^{d \times 1} \end{bmatrix} = A_1^{n \times (u-d)} \bar{x}_1^{(u-d) \times 1} + A_2^{n \times d} \bar{x}_2^{d \times 1}$$

onde as d componentes de \bar{x}_2 definem o *datum*. As colunas da matriz A_2 , em número d , são uma combinação linear das colunas da matriz A_1 , ou seja, existe uma matriz L tal que

$$A_1^{n \times (u-d)} L^{(u-d) \times d} = A_2^{n \times d}$$

isto é,

$$A_1^{n \times (u-d)} L^{(u-d) \times d} - A_2^{n \times d} = \begin{bmatrix} A_1^{n \times (u-d)} & A_2^{n \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{(u-d) \times d} \\ -I^{d \times d} \end{bmatrix} = 0,$$

com I_d sendo a matriz identidade de dimensão d , o que é uma generalização da relação $A\bar{\lambda} = \bar{0}$. Utilizando a expressão anterior, tem-se:

$$\bar{\ell}^{n \times 1} + \bar{v}^{n \times 1} = A_1^{n \times (u-d)} \bar{x}_1^{(u-d) \times 1} + A_1^{n \times (u-d)} L^{(u-d) \times d} \bar{x}_2^{d \times 1},$$

ou

$$\bar{\ell}^{n \times 1} + \bar{v}^{n \times 1} - A_1^{n \times (u-d)} L^{(u-d) \times d} \bar{x}_2^{d \times 1} = A_1^{n \times (u-d)} \bar{x}_1^{(u-d) \times 1}$$

que é um modelo de característica completa ou regular (não singular, portanto) cuja solução é dada por:

$$\delta \bar{x}_2^{d \times 1} = \bar{0} \text{ (parâmetros fixos ao longo do ajustamento)}$$

$$Q_{\bar{x}_2} = 0 \text{ (variância zero para os parâmetros considerados fixos)}$$

$$\bar{x}_1^{(u-d) \times 1} = \left(A_1^T (u-d) \times n \quad P^{n \times n} \quad A_1^{n \times (u-d)} \right)^{-1} A_1^T (u-d) \times n \quad P^{n \times n} (\bar{\ell}^{n \times 1} - A_2 \bar{x}_2)$$

$$Q_{\bar{x}_1} = \left(A_1^T P A_1 \right)^{-1}$$

$$Q_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = 0$$

No caso de um modelo com equações lineares, considerando $\bar{x}_2 = 0$, a solução é dada por

$$\bar{x}_1^{(u-d) \times 1} = \left(A_1^T (u-d) \times n \quad P^{n \times n} \quad A_1^{n \times (u-d)} \right)^{-1} A_1^T (u-d) \times n \quad P^{n \times n} \bar{\ell}^{n \times 1};$$

No caso de um modelo com equações linearizadas, em cada iteração calcula-se o acréscimo aos parâmetros com

$$\delta \bar{x}_1^{(u-d) \times 1} = \left(A_1^T (u-d) \times n \ P^{n \times n} \ A_1^{n \times (u-d)} \right)^{-1} A_1^T (u-d) \times n \ P^{n \times n} \bar{W}^{n \times 1}, \quad \bar{W} = \ell_o - \ell_c,$$

seguido por

$$\bar{x}_1 = \delta \bar{x}_1^0 - L \bar{x}_1.$$

Fixados o(s) ponto(s) do *datum*, as matrizes cofactor $Q_{\bar{x}_1}$ e $Q_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}$ são independentes da selecção dos valores numéricos de \bar{x}_2 ; no entanto, estas matrizes dependem fortemente de que ponto(s) se tomou como *datum*. Esta abordagem tem a vantagem de conduzir a uma matriz normal de dimensão baixa, economizando tempo de cálculo mas está restringida ao caso especial da definição do *datum* por fixação de d componentes do vector \bar{x} .

Exemplo de rede 1D: considere-se a seguinte rede local de nivelamento constituída pelos pontos P_1, P_2, P_3, P_4 , de altitudes respectivamente C_1, C_2, C_3, C_4 , sendo as linhas de nivelamento aproximadamente do mesmo comprimento (figura 4.23.). As equações de observação são (modelo paramétrico):

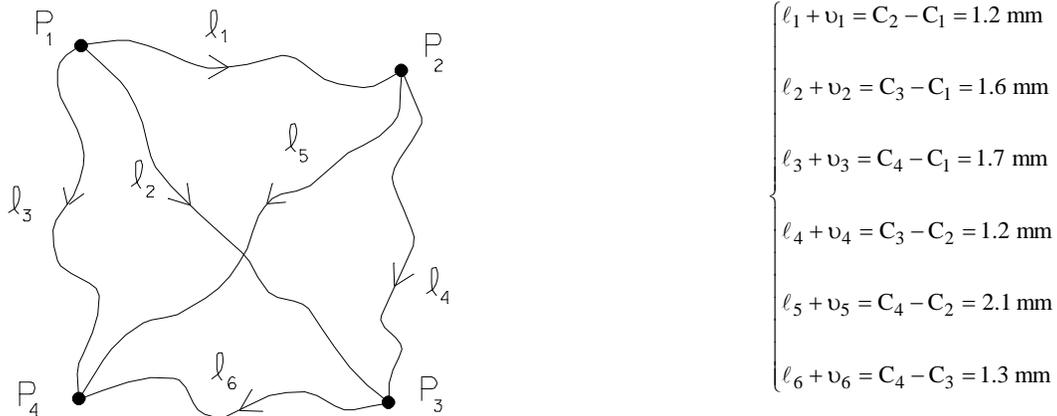


figura 4.23. Rede de nivelamento

O modelo aplicado é representado por: $\bar{\ell}_{6,1} + \bar{v}_{6,1} = A_{6,4} \bar{x}_{4,1}$, $A_{6,4} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{\ell}_{6,1} = \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.0016 \\ 0.0017 \\ 0.0012 \\ 0.0021 \\ 0.0013 \end{bmatrix}$.

Supondo que as observações são não correlacionadas e de precisão igual a ± 1 mm, $\sigma_0^2 = 1$, tem-se:

$$\Sigma_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \text{ m}^2, Q_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$P_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

sendo a matriz normal é dada por

$$N_{4,4} = A_{4,6}^T P_{6,6} A_{6,4} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 3.0000 & -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 \\ -1.0000 & 3.0000 & -1.0000 & -1.0000 \\ -1.0000 & -1.0000 & 3.0000 & -1.0000 \\ -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 & 3.0000 \end{bmatrix} \text{ que sendo singular, não é invertível (d=4-3=1).}$$

a) Mantendo a altitude do ponto P_4 fixa ao longo do ajustamento, por exemplo 101.0000 m (utilizando um valor arbitrário ou ligando a rede local à rede nacional através de nivelamento geométrico a partir de uma marca de nivelamento), este ponto é escolhido como *datum* numa rede de constrangimento mínimo. Isto traduz-se em que a 4ª coluna da matriz A , referente a x_4 , é eliminada, obtendo-se a seguinte matriz A_1 com *deficit* de característica $d=0$:

$$A^{6,4} = \begin{bmatrix} A_1^{6,3} & A_2^{6,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_{4,1} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{3,1} \\ \bar{x}_2^{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}, \quad C_4 = 101.0000 \text{ m}.$$

Para obter a estimativa do vector dos parâmetros utiliza-se a expressão $\bar{x}_1^{3,1} = (A_1^{3,6T} I_{6,6} A_1^{6,3})^{-1} A_1^{3,6T} P_{6,6} (\bar{\ell}^{6,1} - A_2^{6 \times 1} \bar{x}_2^{1,1})$ juntamente com a informação estatística seguinte, isto é:

$$\bar{x}_2 = [101.0000], \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 100.9976 \\ 100.9982 \\ 100.9991 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos } P_1, P_2 \text{ e } P_3, \quad Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.5000 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.5000 \end{bmatrix},$$

$$\bar{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.6000 \\ -0.1000 \\ 0.7000 \\ -0.3000 \\ -0.3000 \\ -0.4000 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.2500 & -0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & 0 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & -0.2500 & 0 & 0.2500 \\ -0.2500 & -0.2500 & 0.5000 & 0 & -0.2500 & -0.2500 \\ 0.2500 & -0.2500 & 0 & 0.5000 & -0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0 & -0.2500 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ 0 & 0.2500 & -0.2500 & 0.2500 & -0.2500 & 0.5000 \end{bmatrix},$$

$$\bar{l}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ 0.0015 \\ 0.0024 \\ 0.0009 \\ 0.0018 \\ 0.0009 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{obs ajust}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.2500 & 0.2500 & -0.2500 & -0.2500 & 0 \\ 0.2500 & 0.5000 & 0.2500 & 0.2500 & 0 & -0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.5000 & 0 & 0.2500 & 0.2500 \\ -0.2500 & 0.2500 & 0 & 0.5000 & 0.2500 & -0.2500 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0.2500 & 0.5000 & 0.2500 \\ 0 & -0.2500 & 0.2500 & -0.2500 & 0.2500 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

$$v^T v = 1.2 \text{ mm}^2, \quad s_0^2 = \frac{v^T v}{n - u + d} = \frac{1.2 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.4 \text{ mm}^2, \quad \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 1.5 \times 10^{-6}, \quad \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

b) Caso se considere que as observações são não correlacionadas mas de precisão diferente, uma situação mais comum, tem-se, por exemplo para a seguinte matriz de variâncias-covariâncias:

$$\Sigma_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix} \text{ m}^2,$$

$$Q_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix} \text{ m}^2$$

$$P_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08166 \end{bmatrix}$$

sendo a matriz normal é dada por

$$N_{4,4} = A_{4,6}^T P_{6,6} A_{6,4} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix} \text{ que sendo singular, não é invertível (d=4-3=1).}$$

Mantendo o ponto P_4 como *datum*, com cota igual a 101.0000 m, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = [101.0000], \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 100.9977 \\ 100.9987 \\ 100.9994 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos } P_1, P_2 \text{ e } P_3, \quad Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.2385 & 0.2133 & 0.2042 \\ 0.2133 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.2042 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix},$$

$$\bar{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1798 \\ 0.0722 \\ 0.5910 \\ -0.5480 \\ -0.8292 \\ -0.6812 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0163 & -0.0225 & -0.0252 & 0.0612 & 0.0585 & -0.0026 \\ -0.0225 & 0.0699 & -0.0342 & -0.1326 & -0.0117 & 0.1208 \\ -0.0252 & -0.0342 & 0.1615 & -0.0091 & -0.2133 & -0.2042 \\ 0.0612 & -0.1326 & -0.0091 & 0.4312 & -0.0703 & 0.1235 \\ 0.0585 & -0.0117 & -0.2133 & -0.0703 & 0.6281 & -0.2016 \\ -0.0026 & 0.1208 & -0.2042 & 0.1235 & -0.2016 & 0.8999 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\ell}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0017 \\ 0.0023 \\ 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0006 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{obs ajust}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 & -0.0612 & -0.0585 & 0.0026 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 & 0.1326 & 0.0117 & -0.1208 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 & 0.0091 & 0.2133 & 0.2042 \\ -0.0612 & 0.1326 & 0.0091 & 0.1938 & 0.0703 & -0.1235 \\ -0.0585 & 0.0117 & 0.2133 & 0.0703 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.0026 & -0.1208 & 0.2042 & -0.1235 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix}.$$

$$v^T v = 1.84 \text{ mm}^2, s_0^2 = \frac{v^T v}{n-u+d} = \frac{1.84 \text{ mm}^2}{6-4+1} = 0.61 \text{ mm}^2, \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 0.8355 \times 10^{-5}, \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

Como se poderia prever, a mudança nos pesos das observações teve consequências não só a nível dos valores obtidos para os parâmetros como para toda a informação estatística associada, em particular a relativa à matriz cofactor dos parâmetros (razão pela qual é necessário um cuidado especial na atribuição dos pesos correctos às observações).

c) De seguida, importa refrazer o cálculo mantendo os últimos pesos das observações mas alterando o ponto tomado como *datum*; considere-se assim o ponto P_1 como *datum*, ao qual se vai atribuir a cota 202.0000 m (ou qualquer outro valor definido de forma arbitrária (como por exemplo a cota obtida para P_1 no cálculo precedente, 100.9977 m) ou através de nivelamento geométrico a partir de uma marca de nivelamento da rede nacional):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = [202.0000], \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08166 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 202.0010 \\ 202.0017 \\ 202.0023 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos } P_2, P_3 \text{ e } P_4,$$

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1798 \\ 0.0722 \\ 0.5910 \\ -0.5480 \\ -0.8292 \\ -0.6812 \end{bmatrix},$$

$$Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0163 & -0.0225 & -0.0252 & 0.0612 & 0.0585 & -0.0026 \\ -0.0225 & 0.0699 & -0.0342 & -0.1326 & -0.0117 & 0.1208 \\ -0.0252 & -0.0342 & 0.1615 & -0.0091 & -0.2133 & -0.2042 \\ 0.0612 & -0.1326 & -0.0091 & 0.4312 & -0.0703 & 0.1235 \\ 0.0585 & -0.0117 & -0.2133 & -0.0703 & 0.6281 & -0.2016 \\ -0.0026 & 0.1208 & -0.2042 & 0.1235 & -0.2016 & 0.8999 \end{bmatrix}, \quad \bar{\ell}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0017 \\ 0.0023 \\ 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0006 \end{bmatrix},$$

$$Q_{\text{obs ajust}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 & -0.0612 & -0.0585 & 0.0026 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 & 0.1326 & 0.0117 & -0.1208 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 & 0.0091 & 0.2133 & 0.2042 \\ -0.0612 & 0.1326 & 0.0091 & 0.1938 & 0.0703 & -0.1235 \\ -0.0585 & 0.0117 & 0.2133 & 0.0703 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.0026 & -0.1208 & 0.2042 & -0.1235 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix}.$$

$$v^T v = 1.84 \text{ mm}^2, s_0^2 = \frac{v^T v}{n - u + d} = \frac{1.84 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.61 \text{ mm}^2, \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 0.4773 \times 10^{-5}, \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

A mudança de *datum*, para além da alteração óbvia nos parâmetros, isto é, nas cotas, reflectiu-se na matriz cofactor dos parâmetros; a restante informação estatística relativa aos resíduos, observações ajustadas e respectivas matrizes cofactor manteve-se. Caso tivesse sido tomado para cota do ponto considerado como *datum* o valor $P_1=100.9977$ (a cota obtida em b) para P_1), as cotas dos restantes pontos seriam $P_2=100.9987$, $P_3=100.9994$, $P_4=101.000$, isto é, o valor dos parâmetros não se alterava mas a matriz cofactor seria diferente! Não é portanto indiferente a escolha do *datum*, mesmo nesta situação em que não há alteração do valor das cotas, implicando a alteração do ponto origem da rede a variação da precisão das cotas.

A posição relativa dos pontos ajustados numa rede de constrangimento mínimo é invariante e forma uma estrutura rígida. Quer isto dizer que independentemente do *datum* adoptado, embora as coordenadas dos pontos da rede variem de caso para caso, as distâncias ajustadas e os ângulos ajustados não variam.

d) Os exemplos anteriores traduziram-se na fixação da cota de um único ponto como *datum* numa rede 1D, suficiente para a resolução do *deficit* de característica do sistema de equações, obtendo-se desta forma uma rede com constrangimento mínimo. Mantendo as altitudes dos pontos P_3 e P_4 fixas ao longo do ajustamento, estes pontos são escolhidos como novo *datum* numa rede constrangida (com um constrangimento superior ao estritamente necessário para eliminar o *deficit* de característica da rede. Tem-se então que as duas últimas colunas da matriz A , referentes a x_3 e a x_4 , são eliminadas, obtendo-se a seguinte matriz com *deficit* de característica $d=0$:

$$A^{6,4} = \begin{bmatrix} A_1^{6,2} & A_2^{6,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{2,1} \\ \bar{x}_2^{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 500.9994 \\ 501.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1^{2,1} = (A_1^{2,6T} P_{6,6} A_1^{6,2})^{-1} A_1^{2,6T} P_{6,6} (\bar{\ell}^{6,1} - A_2^{6,2} \bar{x}_2^{2,1}) = \begin{bmatrix} 500.9977 \\ 500.9987 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1 e 2,}$$

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.1102 & 0.0867 \\ 0.0867 & 0.1469 \end{bmatrix},$$

$$\bar{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1800 \\ 0.0792 \\ 0.5792 \\ -0.5409 \\ -0.8409 \\ -0.7000 \end{bmatrix}, Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0016 & -0.0023 & -0.0023 & 0.0060 & 0.0060 & 0 \\ -0.0023 & 0.0115 & -0.0110 & -0.0087 & -0.0087 & 0 \\ -0.0023 & -0.0110 & 0.0290 & -0.0087 & -0.0087 & 0 \\ 0.0060 & -0.0087 & -0.0087 & 0.0478 & -0.0147 & 0 \\ 0.0060 & -0.0087 & -0.0087 & -0.0147 & 0.0753 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\ell}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0017 \\ 0.0023 \\ 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0006 \end{bmatrix}, Q_{\text{obs ajust}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0235 & 0.0235 & -0.0602 & -0.0602 & 0 \\ 0.0235 & 0.1102 & 0.1102 & 0.0867 & 0.0867 & 0 \\ 0.0235 & 0.1102 & 0.1102 & 0.0867 & 0.0867 & 0 \\ -0.0602 & 0.0867 & 0.0867 & 0.1469 & 0.1469 & 0 \\ -0.0602 & 0.0867 & 0.0867 & 0.1469 & 0.1469 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v^T v = 1.86 \text{ mm}^2, s_0^2 = \frac{v^T v}{n - u + d} = \frac{1.86 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.62 \text{ mm}^2, \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 0.2571 \times 10^{-5}, \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

Neste caso, as cotas de P_3 e P_4 não podem ser escolhidas de forma arbitrária, devendo a equação de constrangimento que relaciona os dois parâmetros corresponder à realidade física que é o desnível entre ambos os pontos: caso contrário, para verificar o constrangimento os resíduos das observações tornam-se muito grandes, de forma a adaptarem-se à rede.

$$A^{6,4} = [A_1^{6,2} \quad A_2^{6,2}] = \begin{bmatrix} [-1 & 1] \\ [-1 & 0] \\ [-1 & 0] \\ [0 & -1] \\ [0 & -1] \\ [0 & 0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0 & 0] \\ [1 & 0] \\ [0 & 1] \\ [1 & 0] \\ [0 & 1] \\ [-1 & 1] \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} [\bar{x}_1^{2,1}] \\ [\bar{x}_2^{2,1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \\ [C_4] \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 510.9994 \\ 501.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1^{2,1} = (A_1^{2,6T} P_{6,6} A_1^{6,2})^{-1} A_1^{2,6T} P_{6,6} (\bar{\ell}^{6,1} - A_2^{6 \times 2} \bar{x}_2^{2,1}) = \begin{bmatrix} 507.2806 \\ 507.2003 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cotas dos pontos 1 e 2,}$$

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.1102 & 0.0867 \\ 0.0867 & 0.1469 \end{bmatrix},$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} -0.0815 \\ 3.7172 \\ -6.2823 \\ 3.7979 \\ -6.2024 \\ -10.0007 \end{bmatrix}, Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0016 & -0.0023 & -0.0023 & 0.0060 & 0.0060 & 0 \\ -0.0023 & 0.0115 & -0.0110 & -0.0087 & -0.0087 & 0 \\ -0.0023 & -0.0110 & 0.0290 & -0.0087 & -0.0087 & 0 \\ 0.0060 & -0.0087 & -0.0087 & 0.0478 & -0.0147 & 0 \\ 0.0060 & -0.0087 & -0.0087 & -0.0147 & 0.0753 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\ell}_{ajus} = \begin{bmatrix} -0.0803 \\ 3.7188 \\ -6.2806 \\ 3.7991 \\ -6.2003 \\ -9.9994 \end{bmatrix}, Q_{obs\ ajust} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0235 & 0.0235 & -0.0602 & -0.0602 & 0 \\ 0.0235 & 0.1102 & 0.1102 & 0.0867 & 0.0867 & 0 \\ 0.0235 & 0.1102 & 0.1102 & 0.0867 & 0.0867 & 0 \\ -0.0602 & 0.0867 & 0.0867 & 0.1469 & 0.1469 & 0 \\ -0.0602 & 0.0867 & 0.0867 & 0.1469 & 0.1469 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v^T v = 1096.04 \text{ mm}^2, s_0^2 = \frac{v^T v}{n - u + d} = \frac{1.86 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 548.02 \text{ mm}^2, \text{tr}(Q_{par}) = 0.2571 \times 10^{-5}, \Sigma_{par} = s_0^2 Q_{par}.$$

Exemplo: considerando a rede 2D constituída pelos pontos 1, 2, 3, 4, foram realizadas as 6 observações de ângulos azimutais indicadas na figura 4.24. (a precisão angular é igual a 3'', observações não correlacionadas). Ajuste a rede considerada.

$3\hat{4}2 = 50^\circ.3349$
$2\hat{4}1 = 38^\circ.7919$
$4\hat{1}2 = 72^\circ.7162$
$1\hat{2}4 = 68^\circ.4919$
$4\hat{2}3 = 81^\circ.7109$
$2\hat{3}4 = 47^\circ.9542$

tabela 4.10. Observações

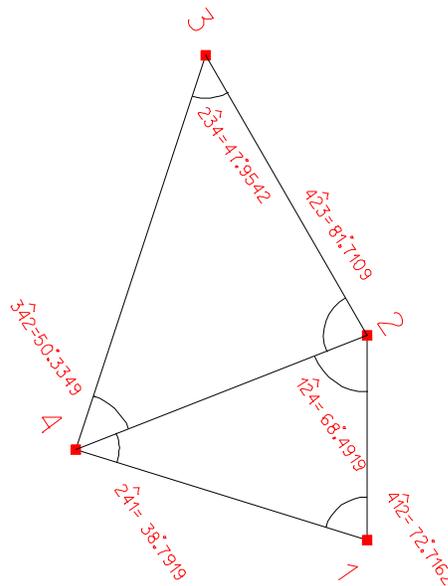


figura 4.24. Rede de triangulação

As seis equações que relacionam as observações com os parâmetros são:

$$F_1 = R_{1,2}^0 - R_{1,4}^0 - 4\hat{1}2 + v_1 = a \tan \frac{X_2^0 - X_1^0}{Y_2^0 - Y_1^0} - a \tan \frac{X_4^0 - X_1^0}{Y_4^0 - Y_1^0} - 4\hat{1}2 + v_1 = 0$$

$$F_2 = R_{2,3}^0 - R_{2,4}^0 - 4\hat{2}3 + v_2 = a \tan \frac{X_3^0 - X_2^0}{Y_3^0 - Y_2^0} - a \tan \frac{X_4^0 - X_2^0}{Y_4^0 - Y_2^0} - 4\hat{2}3 + v_2 = 0$$

$$F_3 = R_{2,4}^0 - R_{2,1}^0 - 1\hat{2}4 + v_3 = a \tan \frac{X_4^0 - X_2^0}{Y_4^0 - Y_2^0} - a \tan \frac{X_1^0 - X_2^0}{Y_1^0 - Y_2^0} - 1\hat{2}4 + v_3 = 0$$

$$F_4 = R^0_{4,1} - R^0_{4,2} - 2\hat{4}1 + v_4 = a \tan \frac{X_1^0 - X_4^0}{Y_1^0 - Y_4^0} - a \tan \frac{X_2^0 - X_4^0}{Y_2^0 - Y_4^0} - 2\hat{4}1 + v_4 = 0$$

$$F_5 = R^0_{4,2} - R^0_{4,3} - 3\hat{4}2 + 2\pi + v_5 = a \tan \frac{X_2^0 - X_4^0}{Y_2^0 - Y_4^0} - a \tan \frac{X_3^0 - X_4^0}{Y_3^0 - Y_4^0} - 3\hat{4}2 + 2\pi + v_5 = 0$$

$$F_6 = R^0_{3,4} - R^0_{3,2} - 2\hat{3}4 + v_6 = a \tan \frac{X_4^0 - X_3^0}{Y_4^0 - Y_3^0} - a \tan \frac{X_2^0 - X_3^0}{Y_2^0 - Y_3^0} - 2\hat{3}4 + v_6 = 0$$

O modelo linearizado é representado por $\bar{v}^{6,1} + A^{6,8} \delta \bar{x}^{8,1} + \bar{W}^{6,1} = 0$, podendo utilizar-se as equações de ângulo azimutal linearizado previamente apresentadas:

$$\left(\frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} - \frac{Y_C^0 - Y_A^0}{h_{0AC}^2} \right) \delta X_A + \left(\frac{X_C^0 - X_A^0}{h_{0AC}^2} - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \right) \delta Y_A - \frac{(Y_B^0 - Y_A^0)}{h_{0AB}^2} \delta X_B + \frac{(X_B^0 - X_A^0)}{h_{0AB}^2} \delta Y_B + \frac{(Y_C^0 - Y_A^0)}{h_{0AC}^2} \delta X_C - \frac{(X_C^0 - X_A^0)}{h_{0AC}^2} \delta Y_C = \theta - \theta_0 + v$$

obtendo-se

$$F_1 = \left(\frac{Y_4^0 - Y_1^0}{d_{4,1}^2} - \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{2,1}^2} \right) \delta X_1 + \left(\frac{X_2^0 - X_1^0}{d_{2,1}^2} - \frac{X_4^0 - X_1^0}{d_{4,1}^2} \right) \delta Y_1 - \frac{Y_4^0 - Y_1^0}{d_{4,1}^2} \delta X_4 + \frac{X_4^0 - X_1^0}{d_{4,1}^2} \delta Y_4 + \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{2,1}^2} \delta X_2 - \frac{M_2^0 - M_1^0}{d_{2,1}^2} \delta Y_2 = 4\hat{1}2 - 4\hat{1}2^0 + v_1$$

$$F_2 = \left(\frac{Y_4^0 - Y_2^0}{d_{4,2}^2} - \frac{Y_3^0 - Y_2^0}{d_{3,2}^2} \right) \delta X_2 + \left(\frac{X_3^0 - X_2^0}{d_{3,2}^2} - \frac{X_4^0 - X_2^0}{d_{4,2}^2} \right) \delta Y_2 - \frac{Y_4^0 - Y_2^0}{d_{4,2}^2} \delta X_4 + \frac{X_4^0 - X_2^0}{d_{4,2}^2} \delta Y_4 + \frac{Y_3^0 - Y_2^0}{d_{3,2}^2} \delta X_3 - \frac{M_3^0 - M_2^0}{d_{3,2}^2} \delta Y_3 = 4\hat{2}3 - 4\hat{2}3^0 + v_2$$

$$F_3 = \left(\frac{Y_1^0 - Y_2^0}{d_{1,2}^2} - \frac{Y_4^0 - Y_2^0}{d_{4,2}^2} \right) \delta X_2 + \left(\frac{X_4^0 - X_2^0}{d_{4,2}^2} - \frac{X_1^0 - X_2^0}{d_{1,2}^2} \right) \delta Y_2 - \frac{Y_1^0 - Y_2^0}{d_{1,2}^2} \delta X_1 + \frac{X_1^0 - X_2^0}{d_{1,2}^2} \delta Y_1 + \frac{Y_4^0 - Y_2^0}{d_{4,2}^2} \delta X_4 - \frac{M_4^0 - M_2^0}{d_{4,2}^2} \delta Y_4 = 1\hat{2}4 - 1\hat{2}4^0 + v_3$$

$$F_4 = \left(\frac{Y_2^0 - Y_4^0}{d_{2,4}^2} - \frac{Y_1^0 - Y_4^0}{d_{1,4}^2} \right) \delta X_4 + \left(\frac{X_1^0 - X_4^0}{d_{1,4}^2} - \frac{X_2^0 - X_4^0}{d_{2,4}^2} \right) \delta Y_4 - \frac{Y_2^0 - Y_4^0}{d_{2,4}^2} \delta X_2 + \frac{X_2^0 - X_4^0}{d_{2,4}^2} \delta Y_2 + \frac{Y_1^0 - Y_4^0}{d_{1,4}^2} \delta X_1 - \frac{M_1^0 - M_4^0}{d_{1,4}^2} \delta Y_1 = 2\hat{4}1 - 2\hat{4}1^0 + v_4$$

$$F_5 = \left(\frac{Y_3^0 - Y_4^0}{d_{3,4}^2} - \frac{Y_2^0 - Y_4^0}{d_{2,4}^2} \right) \delta X_4 + \left(\frac{X_2^0 - X_4^0}{d_{2,4}^2} - \frac{X_3^0 - X_4^0}{d_{3,4}^2} \right) \delta Y_4 - \frac{Y_3^0 - Y_4^0}{d_{3,4}^2} \delta X_3 + \frac{X_3^0 - X_4^0}{d_{3,4}^2} \delta Y_3 + \frac{Y_2^0 - Y_4^0}{d_{2,4}^2} \delta X_2 - \frac{M_2^0 - M_4^0}{d_{2,4}^2} \delta Y_2 = 3\hat{4}2 - 3\hat{4}2^0 + v_5$$

$$F_6 = \left(\frac{Y_2^0 - Y_3^0}{d_{2,3}^2} - \frac{Y_4^0 - Y_3^0}{d_{4,3}^2} \right) \delta X_3 + \left(\frac{X_4^0 - X_3^0}{d_{4,3}^2} - \frac{X_2^0 - X_3^0}{d_{2,3}^2} \right) \delta Y_3 - \frac{Y_2^0 - Y_3^0}{d_{2,3}^2} \delta X_2 + \frac{X_2^0 - X_3^0}{d_{2,3}^2} \delta Y_2 + \frac{Y_4^0 - Y_3^0}{d_{4,3}^2} \delta X_4 - \frac{X_4^0 - X_3^0}{d_{4,3}^2} \delta Y_4 = 2\hat{3}4 - 2\hat{3}4^0 + v_6$$

O *deficit* de característica desta rede é igual a quatro, pelo que é necessário fixar as coordenadas X e Y de dois dos pontos, correspondentes à posição, orientação e escala da figura considerada (ou, como alternativa, fixar as coordenadas X e Y de um ponto, uma distância entre dois pontos e um rumo entre dois pontos). Atribuindo valores arbitrários a (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , de tal forma que $\delta X_1=0$, $\delta Y_1=0$, $\delta X_2=0$, $\delta Y_2=0$, calculam-se as restantes coordenadas dos pontos da rede utilizando as observações efectuadas, valores que vão ser utilizados como aproximação inicial no processo iterativo, juntamente com a matriz P dos pesos das observações (o referencial utilizado é definido de forma a que a origem coincida com o ponto P₁ e o eixo Y tenha a direcção dos pontos P₁ e P₂):

$X_1=500$ m	$Y_1=500$ m
$X_2=500$ m	$Y_2=715.496$ m
$X_3=330.814$ m	$Y_3=1010.945$ m
$X_4=194.430$ m	$Y_4=595.079$ m

<p><u>iteracao = 1</u></p> $dX = \begin{bmatrix} 0.00066002855892 \\ -0.00126475754260 \\ 0.00115463753269 \\ 0.00032627415256 \end{bmatrix}$ <p> $X3 = 3.308146600285589e+002$ $Y3 = 1.010943735242458e+003$ $X4 = 1.944311546375327e+002$ $Y4 = 5.950793262741526e+002$ </p>
<p><u>iteracao = 2</u></p> $dX = 1.0e-008 * \begin{bmatrix} -0.21238315485793 \\ 0.41788393607236 \\ -0.37179050972188 \\ -0.09971870877516 \end{bmatrix}$ <p> $X3 = 3.308146600285589e+002$ $Y3 = 1.010943735242458e+003$ $X4 = 1.944311546375327e+002$ $Y4 = 5.950793262741526e+002$ </p>

Exemplo: considerando a rede 2D da figura 4.25., foram realizadas as observações de ângulos azimutais e distâncias horizontais indicadas na tabela 4.11. (a precisão linear é igual a 0.002 m e a precisão angular é igual a 3'', observações não correlacionadas). Ajuste a rede considerada.

$d_{1,2}=215.496 \text{ m}$
$d_{2,3}=340.461 \text{ m}$
$d_{3,4}=437.658 \text{ m}$
$d_{4,1}=320.020 \text{ m}$
$\hat{1}\hat{2}\hat{3}=150^{\circ}.2028$
$4\hat{1}\hat{2}=72^{\circ}.7162$

tabela 4.11. Observações

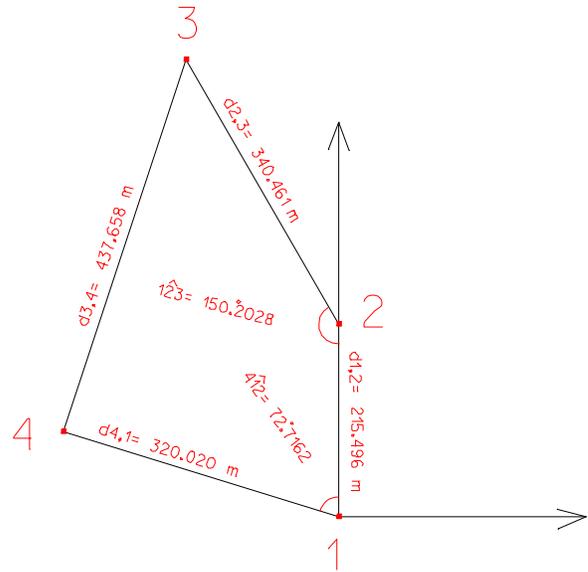


figura 4.25. Configuração da rede 2D

As seis equações que relacionam as observações com os parâmetros são:

$$F_1 = \sqrt{(X_1^0 - X_2^0)^2 + (Y_1^0 - Y_2^0)^2} - d_{1,2} + v_1 = 0$$

$$F_2 = \sqrt{(X_2^0 - X_3^0)^2 + (Y_2^0 - Y_3^0)^2} - d_{2,3} + v_2 = 0$$

$$F_3 = \sqrt{(X_3^0 - X_4^0)^2 + (Y_3^0 - Y_4^0)^2} - d_{3,4} + v_3 = 0$$

$$F_4 = \sqrt{(X_4^0 - X_1^0)^2 + (Y_4^0 - Y_1^0)^2} - d_{4,1} + v_4 = 0$$

$$F_5 = R^0_{1,2} - R^0_{1,4} - 4\hat{1}\hat{2} + v_5 = a \tan \frac{X_2^0 - X_1^0}{Y_2^0 - Y_1^0} - a \tan \frac{X_4^0 - X_1^0}{Y_4^0 - Y_1^0} - 4\hat{1}\hat{2} + v_5 = 0$$

$$F_6 = R^0_{2,3} - R^0_{2,1} - \hat{1}\hat{2}\hat{3} + v_6 = a \tan \frac{X_3^0 - X_2^0}{Y_3^0 - Y_2^0} - a \tan \frac{X_1^0 - X_2^0}{Y_1^0 - Y_2^0} - \hat{1}\hat{2}\hat{3} + v_6 = 0$$

O modelo linearizado é representado por $\vec{v}^{6,1} + A^{6,8} \delta \vec{x}^{8,1} + \vec{W}^{6,1} = 0$, podendo utilizar-se as equações de distância (horizontal) e de ângulo azimutal linearizadas previamente apresentadas:

$$\frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0} \delta X_A + \frac{Y_A^0 - Y_B^0}{s_0} \delta Y_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0} \delta X_B + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0} \delta Y_B = s - s_0 + v$$

$$\left(\frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} - \frac{Y_C^0 - Y_A^0}{h_{0AC}^2} \right) \delta X_A + \left(\frac{X_C^0 - X_A^0}{h_{0AC}^2} - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \right) \delta Y_A - \frac{(Y_B^0 - Y_A^0)}{h_{0AB}^2} \delta X_B + \frac{(X_B^0 - X_A^0)}{h_{0AB}^2} \delta Y_B + \frac{(Y_C^0 - Y_A^0)}{h_{0AC}^2} \delta X_C - \frac{(X_C^0 - X_A^0)}{h_{0AC}^2} \delta Y_C = \theta - \theta_0 + v$$

obtendo-se

$$F_1 = \frac{X_1^0 - X_2^0}{d_{1,2}^0} \delta X_1 + \frac{Y_1^0 - Y_2^0}{d_{1,2}^0} \delta Y_1 + \frac{X_2^0 - X_1^0}{d_{1,2}^0} \delta X_2 + \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{1,2}^0} \delta Y_2 = d_{1,2} - d_{1,2}^0 + v_1$$

$$F_2 = \frac{X_2^0 - X_3^0}{d_{2,3}^0} \delta X_2 + \frac{Y_2^0 - Y_3^0}{d_{2,3}^0} \delta Y_2 + \frac{X_3^0 - X_2^0}{d_{2,3}^0} \delta X_3 + \frac{Y_3^0 - Y_2^0}{d_{2,3}^0} \delta Y_3 = d_{2,3} - d_{2,3}^0 + v_2$$

$$F_3 = \frac{X_3^0 - X_4^0}{d_{3,4}^0} \delta X_3 + \frac{Y_3^0 - Y_4^0}{d_{3,4}^0} \delta Y_3 + \frac{X_4^0 - X_3^0}{d_{3,4}^0} \delta X_4 + \frac{Y_4^0 - Y_3^0}{d_{3,4}^0} \delta Y_4 = d_{3,4} - d_{3,4}^0 + v_3$$

$$F_4 = \frac{X_4^0 - X_1^0}{d_{4,1}^0} \delta X_4 + \frac{Y_4^0 - Y_1^0}{d_{4,1}^0} \delta Y_4 + \frac{X_1^0 - X_4^0}{d_{4,1}^0} \delta X_1 + \frac{Y_1^0 - Y_4^0}{d_{4,1}^0} \delta Y_1 = d_{4,1} - d_{4,1}^0 + v_2$$

$$F_5 = \left(\frac{Y_4^0 - Y_1^0}{d_{4,1}^0} - \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{2,1}^0} \right) \delta X_1 + \left(\frac{X_2^0 - X_1^0}{d_{2,1}^0} - \frac{X_4^0 - X_1^0}{d_{4,1}^0} \right) \delta Y_1 - \frac{Y_4^0 - Y_1^0}{d_{4,1}^0} \delta X_4 + \frac{X_4^0 - X_1^0}{d_{4,1}^0} \delta Y_4 + \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{2,1}^0} \delta X_2 - \frac{M_2^0 - M_1^0}{d_{2,1}^0} \delta Y_2 = 4\hat{1}2 - 4\hat{1}2^0 + v_5$$

$$F_6 = \left(\frac{Y_3^0 - Y_2^0}{d_{2,3}^0} - \frac{Y_1^0 - Y_2^0}{d_{2,1}^0} \right) \delta X_2 + \left(\frac{X_1^0 - X_2^0}{d_{2,1}^0} - \frac{X_3^0 - X_2^0}{d_{2,3}^0} \right) \delta Y_2 - \frac{Y_3^0 - Y_2^0}{d_{2,3}^0} \delta X_3 + \frac{X_3^0 - X_2^0}{d_{2,3}^0} \delta Y_3 + \frac{Y_1^0 - Y_2^0}{d_{2,1}^0} \delta X_1 - \frac{X_1^0 - X_2^0}{d_{2,1}^0} \delta Y_1 = 1\hat{2}3 - 1\hat{2}3^0 + v_6$$

Neste caso, como as observações de distância introduzem uma escala na rede, o *deficit* de característica é igual a três, pelo que é necessário fixar as coordenadas X e Y de um ponto e a coordenadas X ou Y de outro ponto (ou, como alternativa, fixar as coordenadas X e Y de um ponto e um rumo entre dois pontos). Fixar, como no caso anterior, as coordenadas X e Y de dois pontos traduz-se na introdução de um constrangimento, deixando a rede de ser de constrangimento mínimo, o que não se pretende. Atribuindo valores arbitrários a (X_1, Y_1) e X_2 , de tal forma que $\delta X_1=0$, $\delta Y_1=0$, $\delta X_2=0$, calculam-se as restantes coordenadas dos pontos da rede utilizando as observações efectuadas, valores que vão ser utilizados como aproximação inicial no processo iterativo, juntamente com a matriz P dos pesos das observações (o referencial utilizado é definido de forma a que a origem coincida com o ponto P_1 e o eixo Y tenha a direcção dos pontos P_1 e P_2):

$X_1=500$ m	$Y_1=500$ m
$X_2=500$ m	$Y_2=715.496$ m
$X_3=330.815$ m	$Y_3=1010.945$ m
$X_4=194.431$ m	$Y_4=595.080$ m

tabela 4.12. Coordenadas aproximadas

P =

1.0e+009 *

0.0003	0	0	0	0	0
0	0.0003	0	0	0	0
0	0	0.0003	0	0	0
0	0	0	0.0003	0	0
0	0	0	0	4.7272	0
0	0	0	0	0	4.7272

iteracao = 1

$$dX1 = 1.0e-003 * \begin{bmatrix} 0.02830391889760 \\ 0.29415132941760 \\ -0.32465005626872 \\ 0.50527015773244 \\ 0.35938663488790 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = 7.154960283039189e+002$$

$$X_3 = 3.308142941513294e+002$$

$$Y_3 = 1.010944675349944e+003$$

$$X_4 = 1.944305052701577e+002$$

$$Y_4 = 5.950793593866348e+002$$

(como nos dois casos anteriores parte-se de coordenadas aproximadas muito próximas das coordenadas ajustadas, o processo iterativo converge muito rapidamente).

4.11. Definição de um *datum* com constrangimentos

O modelo contendo equações de constrangimento entre os parâmetros tem a forma

$$\begin{cases} A^{n \times u} \bar{x}^{u \times 1} = \bar{l}^{n \times 1} + \bar{v}^{n \times 1} \\ R^{T \ d \times u} \bar{x}^{u \times 1} = \bar{c}^{d \times 1} = \text{constante} \end{cases}$$

conduzindo ao sistema de equações normais da forma

$$\begin{bmatrix} A^{T u \times n} P^{n \times n} A^{n \times u} & R^{u \times d} \\ R^{T d \times u} & 0^{d \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^{u \times 1} \\ \bar{k}^{d \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{T u \times n} P^{n \times n} \bar{\ell}^{n \times 1} \\ \bar{c}^{d \times 1} \end{bmatrix}$$

em que \bar{k} é o vector dos multiplicadores de Lagrange e $R^{u \times d}$ é a matriz que representa os constrangimentos. Como a matriz normal $N^{u \times u} = A^T P A$ é singular com *deficit* de característica $d = u - C(A)$, para que haja solução do sistema R^T tem que consistir em d constrangimentos linearmente independentes que não sejam combinações lineares das linhas de A (o *datum* é fixado através de R), o que algebricamente significa que o sistema das equações normais dado pela matriz $N = A^T P A$ deve ser tornado regular através de uma escolha conveniente de R^T , de forma a que a característica da

$$C \left(\begin{bmatrix} A^T P A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix} \right) = u + d.$$

A abordagem seguida no caso do *datum* com constrangimentos tem a vantagem de poder ser generalizada com facilidade, desde que os constrangimentos verifiquem a condição de que a solução seja única para o vector \bar{x} dos parâmetros da equação

$$\begin{bmatrix} A^T P A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P \bar{\ell} \\ \bar{c} \end{bmatrix},$$

obtendo-se então o sistema regular, em que $\bar{c} = \text{constante}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T P \bar{\ell} \\ \bar{c} \end{bmatrix},$$

embora a inversão da matriz

$$\begin{bmatrix} A^T P A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}$$

seja numericamente pouco eficiente, da forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1} & (N + RR^T)^{-1} R \\ \left((N + RR^T)^{-1} R \right)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P \bar{\ell} \\ \bar{c} \end{bmatrix}$$

em que $N = A^T P A$, $C(N + RR^T) = C(A) + C(R) = u$, isto é, $N + RR^T$ é regular. Nessas condições, a solução é dada por:

$$\bar{x} = (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1} A^T P \bar{\ell} + (N + RR^T)^{-1} R \bar{c}$$

$$\bar{k} = \left((N + RR^T)^{-1} R \right)^T A^T P \bar{\ell} = \bar{0}$$

$$Q_{\bar{x}} = (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1}$$

Ajustamento da rede 1D com datum com constrangimentos: mantendo o ponto P_4 como *datum*, o constrangimento

$R^T \delta \bar{x} = \bar{c}$, com $\bar{c}^{1 \times 1} = 101.0000$ (pois a altitude de P_4 considera-se fixa) tem a forma

$$R^{4,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix} \text{ m}^2,$$

$$Q_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix} \text{ m}^2$$

$$P_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08166 \end{bmatrix}$$

sendo a estimativa do vector dos parâmetros dada por

$$\bar{x}^{4,1} = \left(N^{4,4} + R^{4,1} R^{1,4T} \right)^{-1} N^{4,4} \left(N^{4,4} + R^{4,1} R^{1,4T} \right)^{-1} A^{4,6T} P^{6,6} \bar{\ell}^{6,1} + \left(N^{4,4} + R^{4,1} R^{1,4T} \right)^{-1} R^{4,1} \bar{c}^{1,1} = \begin{bmatrix} 100.9977 \\ 100.9987 \\ 100.9994 \\ 101.0000 \end{bmatrix},$$

obtendo-se a mesma estimativa que no caso da definição do *datum* de variância nula pois P_1 é em ambos os casos o único ponto do *datum*.

Tem-se ainda

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.2385 & 0.2133 & 0.2042 & 0.0000 \\ 0.2133 & 0.2719 & 0.2016 & 0.0000 \\ 0.2042 & 0.2016 & 0.3251 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

resultado idêntico ao do caso correspondente anterior. Para \bar{v} e s_0^2 também se obtêm resultados idênticos aos da solução b) do *datum* de variância nula:

$$\bar{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1798 \\ 0.0722 \\ 0.5910 \\ -0.5480 \\ -0.8292 \\ -0.6812 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0163 & -0.0225 & -0.0252 & 0.0612 & 0.0585 & -0.0026 \\ -0.0225 & 0.0699 & -0.0342 & -0.1326 & -0.0117 & 0.1208 \\ -0.0252 & -0.0342 & 0.1615 & -0.0091 & -0.2133 & -0.2042 \\ 0.0612 & -0.1326 & -0.0091 & 0.4312 & -0.0703 & 0.1235 \\ 0.0585 & -0.0117 & -0.2133 & -0.0703 & 0.6281 & -0.2016 \\ -0.0026 & 0.1208 & -0.2042 & 0.1235 & -0.2016 & 0.8999 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\ell}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0017 \\ 0.0023 \\ 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0006 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{obs ajust}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 & -0.0612 & -0.0585 & 0.0026 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 & 0.1326 & 0.0117 & -0.1208 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 & 0.0091 & 0.2133 & 0.2042 \\ -0.0612 & 0.1326 & 0.0091 & 0.1938 & 0.0703 & -0.1235 \\ -0.0585 & 0.0117 & 0.2133 & 0.0703 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.0026 & -0.1208 & 0.2042 & -0.1235 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix}.$$

$$v^T v = 1.84 \text{ mm}^2, \quad s_0^2 = \frac{v^T v}{n - u + d} = \frac{1.84 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.61 \text{ mm}^2, \quad \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 0.8355 \times 10^{-5}, \quad \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

De forma idêntica, mantendo o ponto P_1 como *datum*, o constrangimento $R^T \delta \bar{x} = \bar{c}$, com $\bar{c}^{1 \times 1} = 100.9977$ (pois a cota de P_1 considera-se fixa) tem a forma

$$R^{4,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo a estimativa do vector dos parâmetros dada por

$$\bar{x}^{4,1} = \left(N^{4,4} + R^{4,1} R^{1,4T} \right)^{-1} N^{4,4} \left(N^{4,4} + R^{4,1} R^{1,4T} \right)^{-1} A^{4,6T} P^{6,6} \bar{c}^{6,1} + \left(N^{4,4} + R^{4,1} R^{1,4T} \right)^{-1} R^{4,1} \bar{c}^{1,1} = \begin{bmatrix} 100.9977 \\ 100.9987 \\ 100.9994 \\ 101.0000 \end{bmatrix},$$

obtendo-se a mesma estimativa que no caso anterior pois P_1 é em ambos os casos o único ponto do *datum*.

Tem-se ainda

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0837 & 0.0225 & 0.0251 \\ 0.0000 & 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 \\ 0.0000 & 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 \end{bmatrix}.$$

Embora, como já foi dito, a definição de um *datum* através de constrangimentos se traduza na obtenção de matrizes de maiores dimensões relativamente ao caso da definição de um *datum* com variância nula, com eventuais dificuldades na inversão das matrizes, há neste primeiro caso uma maior versatilidade na fixação do *datum*, permitindo soluções que não se reduzem à fixação de coordenadas, como por exemplo manter a distância entre dois ou mais pontos da rede fixa, impor que a diferença de cota de dois ou mais pontos não varie, etc.

Constrangimento numa rede 2D por fixação de coordenadas de dois pontos:

Pode impor-se este tipo de constrangimento quando uma rede plana consiste apenas em observações de ângulos azimutais, de tal forma que o *deficit* de característica é igual a 4. Atribuindo coordenadas fixas a duas estações da rede, remove-se este *deficit* de característica: supondo que os pontos P e Q são escolhidos para constranger a posição, escala e rumo, as equações de constrangimento $R \bar{x} = \bar{c}$ são obtidas de

$$X_P = c_1, Y_P = c_2, X_Q = c_3, Y_Q = c_4,$$

onde c_1, c_2, c_3, c_4 representam constantes, de tal forma que

$$\delta X_P = 0, \delta Y_P = 0, \delta X_Q = 0, \delta Y_Q = 0,$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \vdots \\ \delta X_P \\ \delta Y_P \\ \delta X_Q \\ \delta Y_Q \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Constrangimento numa rede 2D por fixação de uma distância horizontal PQ:

Este tipo de constrangimento pode impor-se em rede planas consistindo numa estação fixa, num rumo e ângulos azimutais observados, sendo neste caso o *deficit* de característica igual a 1, correspondente à escala. Supondo que o elemento da rede que vai ser utilizado para completar o *datum* é a linha PQ, a equação de constrangimento é

$$(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 = s^2,$$

onde s é o valor fixo que representa o comprimento do elemento PQ, tendo-se neste caso,

$$2(X_Q - X_P)\delta X_Q - 2(X_Q - X_P)\delta X_P + 2(Y_Q - Y_P)\delta Y_Q - 2(Y_Q - Y_P)\delta Y_P = 2s ds = 0$$

$$-(X_Q - X_P)\delta X_P - (Y_Q - Y_P)\delta Y_P + (X_Q - X_P)\delta X_Q + (Y_Q - Y_P)\delta Y_Q = 0$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -(X_Q - X_P) & -(Y_Q - Y_P) & (X_Q - X_P) & (Y_Q - Y_P) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \vdots \\ \delta X_P \\ \delta Y_P \\ \delta X_Q \\ \delta Y_Q \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

Constrangimento numa rede 2D por fixação de um rumo PQ:

Esta situação acontece numa rede plana consistindo numa estação fixa com observação de ângulos azimutais e distâncias, sendo o *deficit* de característica igual a 1, correspondente a uma rotação. Supondo que a linha PQ tem que ter azimute fixo α , a equação de constrangimento correspondente é

$$(X_Q - X_P)/(Y_Q - Y_P) = \tan \alpha ,$$

obtendo-se então a equação

$$-\frac{(Y_Q - Y_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta X_P + \frac{(Y_Q - Y_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta X_Q + \frac{(X_Q - X_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta Y_P - \frac{(X_Q - X_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta Y_Q = \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = 0$$

$$-(Y_Q - Y_P) \delta X_P + (X_Q - X_P) \delta Y_P + (Y_Q - Y_P) \delta X_Q - (X_Q - X_P) \delta Y_Q = \frac{(Y_Q - Y_P)^2}{\cos^2 \alpha} d\alpha = 0$$

$$-(Y_Q - Y_P) \delta X_P + (X_Q - X_P) \delta Y_P + (Y_Q - Y_P) \delta X_Q - (X_Q - X_P) \delta Y_Q = \frac{(\sin \alpha d_{PQ})^2}{\cos^2 \alpha} d\alpha = 0$$

$$-(Y_Q - Y_P) \delta X_P + (X_Q - X_P) \delta Y_P + (Y_Q - Y_P) \delta X_Q - (X_Q - X_P) \delta Y_Q = \tan^2 \alpha d_{PQ}^2 d\alpha = 0$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -(Y_Q - Y_P) & (X_Q - X_P) & (Y_Q - Y_P) & -(X_Q - X_P) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \vdots \\ \delta X_P \\ \delta Y_P \\ \delta X_Q \\ \delta Y_Q \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

Exemplo: ajustamento da rede 2D com datum com constrangimentos: mantendo o datum através dos parâmetros $X_1 = M_1$, $X_2 = P_1$, $X_3 = M_2$, tem-se que a matriz R dos constrangimentos é dada por:

R =

1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

mantendo-se as matrizes A e W idênticas:

A =

0	-1.0000	0	1.0000	0	0	0	0
0	0	0.4958	-0.8684	-0.4958	0.8684	0	0
0	0	0	0	0.3128	0.9498	-0.3128	-0.9498
0.9550	-0.2965	0	0	0	0	-0.9550	0.2965
-0.0037	0.0030	0.0047	0	0	0	-0.0009	-0.0030
0.0047	0	-0.0072	-0.0015	0.0025	0.0015	0	0

W =

0.4960
-0.3865
-0.3203
-0.3876
-0.0006
-0.0013

sendo o vector $\delta\bar{x}$ dos acréscimos aos parâmetros dado por $\delta\bar{x} = (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1} A^T P \bar{\ell} + (N + RR^T)^{-1} R \bar{c}$, em que $\bar{\ell} = \bar{W}$ e $\bar{c} = 0$, obtendo-se convergência em duas iterações

dX =

-0.0000
0.0000
-0.0000
0.4961
-0.1860
-0.0551
0.4304
0.0793

$dX =$

```

1.0e-003 *
  0.0000
 -0.0000
 -0.0000
 -0.0649
  0.3181
 -0.2554
  0.0999
  0.0994

```

sendo a solução final dos parâmetros dada por

```

M1 = 500.000
P1 = 500.000
M2 = 500.000
P2 = 715.496
M3 = 330.814
P3 = 1010.945
M4 = 194.431
P4 = 595.079

```

igual à solução obtida com *datum* com variância zero. A matriz cofactor neste caso é:

$Q =$

```

1.0e-004 *
  0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000  0.0000  -0.0000
 -0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  -0.0000  0.0000
  0.0000  -0.0000  0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0000  0.0000  -0.0000
  0.0000  -0.0000  -0.0000  0.0368  -0.0123  0.0271  0.0055  0.0176
  0.0000  -0.0000  -0.0000  -0.0123  0.1476  0.0392  0.0211  0.0671
 -0.0000  0.0000  0.0000  0.0271  0.0392  0.0790  0.0221  0.0703
  0.0000  0.0000  0.0000  0.0055  0.0211  0.0221  0.0461  0.0200
 -0.0000  -0.0000  0.0000  0.0176  0.0671  0.0703  0.0200  0.1053

```

Particularizando o resultado anterior do *datum* com constrangimentos para o caso do *datum* com variância nula, efectuando o rearranjo dos parâmetros de forma a que os últimos d elementos de \bar{x} se refiram aos pontos do *datum* escolhido e particionando A e R^T de acordo com este procedimento, tem-se:

$$A = [A_1 \ A_2] \quad , \quad R^T = [0 \ I_d] \quad , \quad N = A^T P A = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{com } N_{ij} = A_i^T P A_j .$$

Em conformidade com

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P A & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T P \bar{\ell} \\ \bar{c} \end{bmatrix},$$

o sistema tem a forma

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 \\ N_{21} & N_{22} & I_d \\ 0 & I_d & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1^T P \bar{\ell} \\ A_2^T P \bar{\ell} \\ \bar{c} \end{bmatrix}$$

cuja solução é dada por

$$\bar{x}_2 = \bar{0}$$

$$\bar{k} = \bar{0}$$

$$\bar{x}_1 = (A_1^T P A_1)^{-1} A_1^T P \bar{\ell} - (A_1^T P A_1)^{-1} A_1^T P A_2 \bar{c}$$

$$Q_{\bar{x}_1} = (A_1^T P A_1)^{-1}$$

$$Q_{\bar{x}_2} = 0$$

$$Q_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = 0$$

Esta solução para o problema clássico do *datum*, embora muito utilizada devido à facilidade da implementação numérica e à facilidade na interpretação dos resultados, tem a desvantagem de, como já tinha sido referido, o vector dos parâmetros \bar{x} e da respectiva matriz cofactor $Q_{\bar{x}}$ dependerem inteiramente da escolha arbitrária do *datum*. Para além disso, a estimativa dos parâmetros \bar{x} é enviesada, isto é,

$$E(\bar{x}) = (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1} N \bar{x} + N (N + RR^T)^{-1} R \bar{c} \neq \bar{x}$$

$$Q_{\bar{x}} = (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1},$$

que dependem obviamente da escolha dos constrangimentos.

4.12. Invariantes

Apesar do enviesamento da estimativa \bar{x} dos parâmetros obtida atrás, existem funções de \bar{x} que são invariantes relativamente aos constrangimentos R e que portanto são estimadores não enviesados; estas funções, do tipo $\bar{f} = B\bar{x}$, devem verificar certas condições, obtidas por substituição de $\bar{x} = (N + RR^T)^{-1} N(N + RR^T)^{-1} A^T P\bar{\ell} + (N + RR^T)^{-1} R\bar{c}$ na equação anterior, de forma a definir a estimativa \bar{f} de $\bar{f} = B\bar{x}$, isto é,

$$\bar{f} = B\bar{x} = B(N + RR^T)^{-1} N(N + RR^T)^{-1} A^T P\bar{\ell} + B(N + RR^T)^{-1} R\bar{c},$$

com $E(\bar{f}) = BE(\bar{x}) = B(N + RR^T)^{-1} N(N + RR^T)^{-1} N\bar{x} + B(N + RR^T)^{-1} R\bar{c}$. Tem-se portanto que as duas condições que B deve verificar para que \bar{f} seja invariante são:

$$B(N + RR^T)^{-1} N(N + RR^T)^{-1} N = B, \quad B(N + RR^T)^{-1} R = 0.$$

Se se seleccionar B de tal forma que as suas linhas sejam combinações lineares das colunas de A, isto é, $B = GA$, então verificam-se as duas condições anteriores:

$$GAQ_{11}N = GA = B \quad \text{e} \quad GAQ_{12} = GAS(R^T S)^{-1} = 0$$

com $Q_{11}N = I_u - Q_{12}R$ e $AS=0$, sendo S uma matriz uxd de característica d.

Dois exemplos importantes de funções invariantes são os vectores das observações ajustadas e dos resíduos:

$$\begin{aligned} \bar{\ell} &= \bar{\ell} + \bar{v} = A\bar{x} = AQ_{11}A^T P\bar{\ell}, \quad E(\bar{\ell}) = AQ_{11}A^T PE(\bar{\ell}) = AQ_{11}N\bar{x} = A\bar{x}, \quad Q_{\bar{\ell}} = AQ_{11}NQ_{11}A^T = AQ_{11}A^T \\ \bar{v} &= A\bar{x} - \bar{\ell} = (AQ_{11}A^T P - I)\bar{\ell}, \quad E(\bar{v}) = (AQ_{11}A^T P - I)E(\bar{\ell}) = (AQ_{11}N - A)\bar{x} = 0, \quad Q_{\bar{v}} = (AQ_{11}A^T P - I)Q(AQ_{11}A^T P - I)^T \end{aligned}$$

sendo as respectivas matrizes cofactor independentes da selecção dos constrangimentos R. Uma vez que as observações ajustadas e os resíduos são independentes de R, então a forma quadrática $\bar{v}^T P\bar{v}$ e a estimativa da variância por unidade de peso *a posteriori* s_0^2 também são independentes de R, sendo por isso invariantes do modelo.

As posições relativas dos pontos de uma rede com constrangimento mínimo são portanto invariantes e formam uma estrutura rígida; quer isto dizer que seja qual for o *datum* escolhido numa rede livre, embora as coordenadas dos pontos da rede variem consoante o *datum*, as distâncias e os ângulos ajustados entre os pontos não variam. Em contraste com esta invariância nas observações ajustadas, repita-se, a matriz de variâncias-covariâncias das coordenadas dos pontos depende decisivamente do *datum* seleccionado.

4.13. Definição de um *datum* de norma mínima (traço mínimo)

Nos dois casos anteriormente mencionados de estabelecimento de um *datum*, a estimativa por mínimos quadrados dos parâmetros não é, em geral, não enviesada nem de variância mínima, tendo-se, para além disto, que a solução obtida varia em função do *datum* seleccionado, pondo-se a questão se haverá algum critério para a selecção de alguma das soluções $\{\bar{x}\}$. Normalmente, nesses casos, o *datum* é definido arbitrariamente, com base em considerações geométricas, de forma a distribuir o melhor possível os resíduos pelas diversas estações da rede (figura 4.26.). Esta estratégia tem a vantagem de, mantendo o *datum* nos mesmos pontos ao longo do tempo, a comparação das coordenadas dos restantes pontos da rede em diferentes épocas ser imediata, desde que existam razões para supor que os pontos tomados para *datum* são efectivamente fixos. Num caso mais geral, para efectuar a comparação dos resultados entre épocas diferentes deve ser utilizado o método das transformações de similaridade para ultrapassar o problemas dos deslocamentos relacionados com os pontos do *datum*.

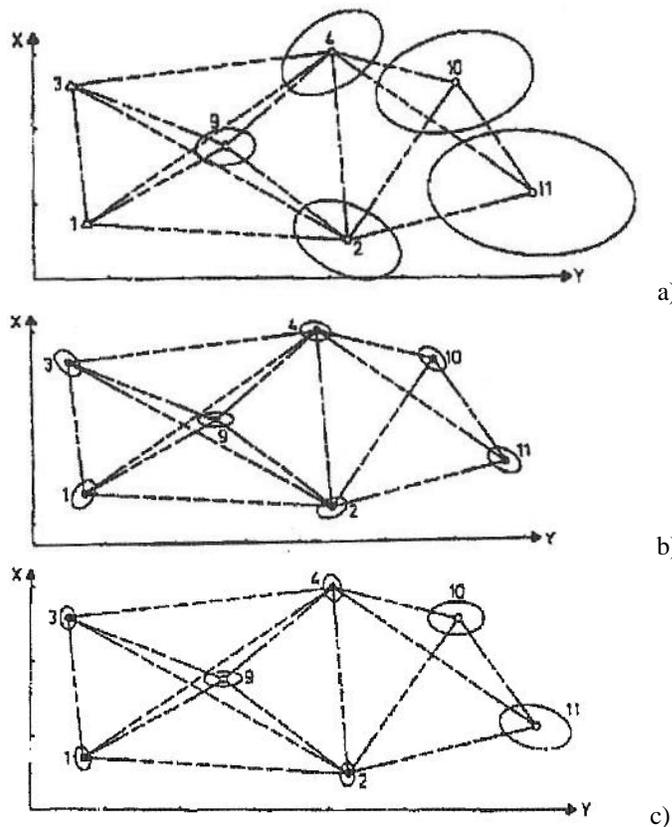


figura 4.26. Redes de constrangimento mínimo, onde se indicam as elipses de erro em cada ponto: a) *datum* nos pontos 1 e 3 (fixos); b) *datum* nos pontos 1, 2, 3, 4, 9, 10 e 11, através da minimização da totalidade do traço da matriz Q (constrangimentos internos); c) *datum* nos pontos 1, 2, 3 e 4, através da minimização parcial do traço da matriz Q (constrangimentos internos). O traço $\text{tr}(M)$ de uma matriz quadrada M é definido como a soma dos elementos da diagonal principal. Se M for uma matriz de variâncias-covariâncias, então $\text{tr}(M)$ é a soma das variâncias e pode ser interpretado como uma medida da precisão global do vector associado das variáveis aleatórias (parâmetros estimados).

Para uma rede com *deficit* de característica d , há múltiplas formas de impor constrangimentos que permitam a obtenção de uma solução, desde redes de constrangimento mínimo (redes livres) a redes constrangidas. Dentro do primeiro grupo pode considerar-se a solução particular designada por redes com constrangimentos internos em que os constrangimentos são aplicados ao centróide da rede, de tal forma que $\bar{x}_i^{\text{reduzido}} = x_i - \sum x_i / n$, n =número de pontos da rede; estes constrangimentos, definidos por $R^T \bar{x} = 0$, traduzem-se em redes onde todos (ou apenas alguns) pontos contribuem para o *datum*, isto é, as coordenadas de todos os pontos da rede variam ao longo do ajustamento (não há pontos fixos). São necessariamente redes locais, com coordenadas arbitrárias, ao contrário, por exemplo, de redes de adensamento, onde as coordenadas dos novos pontos têm que se ajustar aos pontos da rede de ordem superior (rede constrangida). Neste sentido, as redes livres são independentes dos erros das coordenadas dos pontos tomados como *datum*. Esta propriedade é importante quando se utilizam observações GPS na densificação de redes convencionais, cuja precisão é inferior. Há, no entanto, uma dificuldade em relacionar as coordenadas obtidas em épocas diferentes pois, variando o centróide da rede, o *datum* também varia ao longo do tempo.

Partindo da solução geral no caso do *datum* com constrangimentos R ,

$$\bar{x} = (N + RR^T)^{-1} N(N + RR^T) A^T P \bar{\ell} + (N + RR^T)^{-1} R \bar{c}, \quad Q_{\bar{x}} = (N + RR^T)^{-1} N(N + RR^T)^{-1},$$

pretende-se investigar se existe algum vector de $\{\bar{x}\}$ com traço mínimo da matriz cofactor associada, isto é, estabelece-se o critério

$$\text{tr}(Q_{\bar{x}}) = \text{tr}\left((N + RR^T)^{-1} N(N + RR^T)^{-1}\right) = \min, \text{ onde } N = A^T P A \text{ e } \bar{x} \text{ é um elemento de } \{\bar{x}\}.$$

Um método algébrico apropriado de obtenção de uma matriz S que conduza a $\text{tr}(Q_{\bar{x}}) = \min$ baseia-se nos valores próprios da matriz normal $uxu \ N = A^T P A$ (qualquer matriz de característica igual a d que verifique a condição $AS=0$ é uma escolha possível), dados por $(N - \lambda_i I) s_i = 0$, onde λ_i representa os valores próprios de N e s_i os vectores próprios associados a λ_i .

Uma matriz quadrada M com característica $C(M)$ possui $C(M)$ valores próprios não nulos e $C(M)$ vectores próprios linearmente independentes; se essa matriz M tem *deficit* de característica d , os respectivos vectores próprios formam uma matriz S_{uxd} que constitui um conjunto de constrangimentos para o *datum* de traço mínimo.

Constrangimentos internos:

Utiliza-se esta designação para descrever um conjunto de constrangimentos mínimos cujas equações traduzem relações funcionais entre incrementos de primeira ordem para as coordenadas das estações da rede; considere-se, para exemplificar este tipo de constrangimentos, uma rede plana consistindo apenas em observações de ângulos azimutais, de forma a que as respectivas posição, escala e orientação permanecem indefinidas, sendo o *deficit* de característica da matriz normal igual a 4.

Atribuindo a um dado ponto P da rede coordenadas (M_i, P_i) como valores iniciais para o processo iterativo de ajustamento por mínimos quadrados, então as correcções da translação $(\delta M_0, \delta P_0)$, da rotação $\delta\alpha$ e da escala $(1+\delta\lambda)$ traduzem-se em novas coordenadas para o ponto P considerado:

$$\begin{bmatrix} M_i + \delta M_i \\ P_i + \delta P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta M_0 \\ \delta P_0 \end{bmatrix} + (1 + \delta\lambda) \begin{bmatrix} 1 & \delta\alpha \\ -\delta\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \\ P_i \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \delta M_i \\ \delta P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & P_i & M_i \\ 0 & 1 & -M_i & P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta M_0 \\ \delta P_0 \\ \delta\alpha \\ \delta\lambda \end{bmatrix}.$$

Os constrangimentos internos de posição, rotação e escala são aplicados ao centróide de todas (ou a uma parte) as estações, a partir das respectivas coordenadas aproximadas. Se (M_G, P_G) forem as coordenadas do centróide dos n pontos da rede, tem-se

$$M_G = \sum_{i=1}^n M_i, \quad P_G = \sum_{i=1}^n P_i,$$

de tal forma que a equação de constrangimento posicional (translação) é dada por $\delta M_G = 0$, $\delta P_G = 0$ ou, de forma equivalente,

$$\sum_{i=1}^n \delta M_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \delta P_i = 0.$$

A equação de constrangimento rotacional é obtida a partir da imposição de que o rumo médio do centróide para cada ponto da rede permanece invariável: sendo θ_{Gi} o rumo do centróide para o ponto P, tem-se então que

$$\tan \theta_{Gi} = (M_i - M_G) / (P_i - P_G),$$

o que, após diferenciação, dá origem à expressão

$$\delta\theta_{Gi} = \left[(P_i - P_G)(\delta M_i - \delta M_G) - (M_i - M_G)(\delta P_i - \delta P_G) / d_{Gi}^2 \right],$$

onde d_{Gi} é a distância do centróide a P. Para que o rumo médio (a média dos rumos) permaneça constante, tem-se

$$\sum_{i=1}^n \delta\theta_{Gi} = 0, \text{ isto é, } \sum_{i=1}^n [(P_i - P_G)(\delta M_i - \delta M_G) - (M_i - M_G)(\delta P_i - \delta P_G)] = 0,$$

que se pode simplificar na forma

$$\sum_{i=1}^n (P_i \delta M_i - M_i \delta P_i) = 0.$$

A equação de constrangimento de escala é obtida através da imposição de que a distância média do centróide para cada ponto de rede permaneça constante, isto é,

$$d_{Gi}^2 = (M_i + M_G)^2 + (P_i + P_G)^2,$$

que após diferenciação conduz a

$$\delta d_{Gi} = [(M_i - M_G)(\delta M_i - \delta M_G) + (P_i - P_G)(\delta P_i - \delta P_G)] / d_{Gi} = 0;$$

para que a distância média permaneça constante, tem-se

$$\sum_{i=1}^n \delta d_{Gi} = 0, \text{ ou seja, } \sum_{i=1}^n (M_i - M_G)(\delta M_i - \delta M_G) + (P_i - P_G)(\delta P_i - \delta P_G) = 0,$$

que se pode simplificar na forma

$$\sum_{i=1}^n (M_i \delta M_i + P_i \delta P_i) = 0.$$

Sendo o vector solução $\bar{x} = [\delta M_1 \quad \delta P_1 \quad \delta M_2 \quad \delta P_2 \quad \dots \quad \delta M_n \quad \delta P_n]^T$, então a equação matricial dos constrangimentos internos é dada por

$$B\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ P_1 & -M_1 & P_2 & -M_2 & \dots & P_n & -M_n \\ M_1 & P_1 & M_2 & P_2 & \dots & M_n & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta P_1 \\ \delta M_2 \\ \delta P_2 \\ \dots \\ \delta M_n \\ \delta P_n \end{bmatrix}$$

ou, na extensão para três dimensões:

$$B\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & C_1 & -P_1 & 0 & C_2 & -P_2 & \dots & 0 & C_n & -P_n \\ -C_1 & 0 & M_1 & -C_2 & 0 & M_2 & \dots & -C_n & 0 & M_n \\ P_1 & -M_1 & 0 & P_2 & -M_2 & 0 & \dots & P_n & -M_n & 0 \\ M_1 & P_1 & C_1 & M_2 & P_2 & C_2 & \dots & M_n & P_n & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta P_1 \\ \delta C_1 \\ \delta M_2 \\ \delta P_2 \\ \delta C_2 \\ \dots \\ \delta M_n \\ \delta P_n \\ \delta C_n \end{bmatrix}$$

A atribuição de valores iniciais (M_i^0, P_i^0, C_i^0) a cada ponto da rede no início do processo iterativo é suficiente para a definição do *datum*, obtidos fixando quaisquer dois pontos, numa solução inicial de variância nula: as três primeiras linhas de B fornecem o constrangimento posicional, as três linhas seguintes fornecem o constrangimento rotacional e a sétima linha o constrangimento de escala. Se as observações efectuadas incluírem distâncias, a sétima linha de B não é necessária; de forma idêntica, outras linhas de B podem ser omitidas se forem incluídas outros tipos de observações, como por exemplo diferenças de cota.

Em cada época considerada o *datum* definido será diferente, não sendo possível comparar directamente os vectores deslocamento e respectivas matrizes cofactor, sendo necessário reduzir as várias épocas a um *datum* comum. É possível efectuar uma mudança de *datum* aplicando uma transformação que mantenha a geometria da rede. Para que isso aconteça, o número de parâmetros dessa transformação não pode exceder o *deficit* de característica correspondente ao *datum* e deve ser uma transformação de similaridade (subconjunto das transformações afins que englobam as rotações, translações e aplicação de um factor de escala uniforme). Uma transformação de similaridade é também chamada de transformação conforme ou isogónica. O modelo expressa a relação entre dois sistemas de coordenadas por meio de três translações (x_o, y_o, z_o) , três rotações (e_x, e_y, e_z) e um fator de escala (k) . As três translações são justificadas pela não coincidência da origem dos dois sistemas; as três rotações são necessárias para expressar o não paralelismo entre os dois sistemas de eixos e um fator de escala é requerido para uniformizar (homogeneizar) a métrica dos dois sistemas. Assim, é necessário que se tenha pontos comuns nos dois sistemas para aplicar a transformação, sendo um mínimo de três pontos requeridos para a obtenção dos sete parâmetros.

Quando na equação normal ampliada a matriz B for definida a partir dos elementos que traduzem constrangimentos internos, a respectiva matriz inversa

$$\begin{bmatrix} A^T Q_\ell^{-1} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & 0^T \end{bmatrix}$$

é regular e é tal que a matriz cofactor singular N_{11} correspondente à estimação por mínimos quadrados do valor das coordenadas tem traço mínimo comparando com todas as matrizes cofactor obtidas da aplicação de constrangimentos de outros tipos na mesma rede. A solução $\hat{\bar{x}}$ obtida desta forma tem ainda norma mínimo, ou seja, $\bar{x}^T \bar{x}$ é mínimo.

Pode mostrar-se que a matriz cofactor N_{11} é igual à pseudo-inversa de Moore-Penrose de $A^T Q_\ell^{-1} A$, caso particular da inversa generalizada M^- que satisfaz $M M^- M = M$ e $M^- M M^- = M^-$, podendo M ser não quadrada.; designando a pseudo-inversa de Moore-Penrose da matriz M por M^+ , então a solução por mínimos quadrados de traço mínimo e de norma mínima das equações de observação $A\bar{x} = B + \bar{v}$, cuja matriz cofactor é Q_ℓ^{-1} pode obter-se de

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{x}} \\ \hat{\bar{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T Q_\ell^{-1} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T Q_\ell^{-1} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou de

$$\hat{\bar{x}} = (A^T Q_\ell^{-1} A)^+ A^T Q_\ell^{-1} B.$$

A primeira hipótese fornece um algoritmo de cálculo mais eficiente pois as inversas de Moore-Penrose são difíceis de calcular no caso de existirem observações de tipos diferentes, como por exemplo distâncias inclinadas e diferenças de cotas.

Exemplo: ajustamento da rede 1D com *datum* com traço mínimo (norma mínima), contribuindo todos os pontos para o *datum*, considerado no centróide da rede

Tendo a matriz

$$N_{4,4} = A_{4,6}^T P_{6,6} A_{6,4} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix}$$

deficit de característica $d=1$, significa que um dos seus valores próprios é igual a zero; da definição de valores (λ) e vectores (\bar{v}) próprios de uma matriz: $N \bar{v} = \lambda \bar{v}$, os valores próprios são a solução da equação $\det(N - \lambda I) = 0$, isto é:

$$\lambda = 10^6 (0.0000, 0.5694, 0.9796, 2.5454),$$

sendo os vectores próprios associados (convenientemente normalizados):

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} -0.5000 & -0.1870 & -0.3048 & 0.7887 \\ -0.5000 & -0.2306 & -0.5834 & -0.5971 \\ -0.5000 & -0.4333 & 0.7377 & -0.1347 \\ -0.5000 & 0.8509 & 0.1505 & -0.0570 \end{bmatrix}.$$

Pondo

$$\bar{S}^{4,1} = \begin{bmatrix} -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \end{bmatrix}.$$

$$\text{tem-se } A^{6,4} \bar{S}^{4,1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

A estimativa do vector dos parâmetros, obtém-se de

$$\bar{x}_{4,1}^c = \left(N_{4,4} + S_{4,1} S_{1,4}^T \right)^{-1} N_{4,4} \left(N_{4,4} + S_{4,1} S_{1,4}^T \right)^{-1} A_{4,6}^T P_{6,6} \bar{l}_{6,1}, \text{ com}$$

$$\left(N_{4,4} + S_{4,1} S_{1,4}^T \right)^{-1} N_{4,4} \left(N_{4,4} + S_{4,1} S_{1,4}^T \right)^{-1} =$$

$$= \left(10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} 10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix}$$

$$\left(10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0401 & 0.0072 & -0.0129 & -0.0344 \\ 0.0072 & 0.0581 & -0.0232 & -0.0421 \\ -0.0129 & -0.0232 & 0.0892 & -0.0531 \\ -0.0344 & -0.0421 & -0.0531 & 0.1296 \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{\bar{x}}_{4,1}^c = \left(N_{4,4} + S_{4,1}^c S_{1,4}^{cT} \right)^{-1} N_{4,4} \left(N_{4,4} + S_{4,1}^c S_{1,4}^{cT} \right)^{-1} A_{4,6}^T P_{6,6} \bar{\bar{\ell}}_{6,1} = \begin{bmatrix} -1.200 \text{ mm} \\ -0.200 \text{ mm} \\ 0.400 \text{ mm} \\ 1.000 \text{ mm} \end{bmatrix}.$$

Quanto à matriz cofactor dos parâmetros $\bar{\bar{x}}^c$, tem-se

$$Q_{\bar{\bar{x}}} = \left(N + RR^T \right)^{-1} N \left(N + RR^T \right)^{-1} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0401 & 0.0072 & -0.0129 & -0.0344 \\ 0.0072 & 0.0581 & -0.0232 & -0.0421 \\ -0.0129 & -0.0232 & 0.0892 & -0.0531 \\ -0.0344 & -0.0421 & -0.0531 & 0.1296 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\text{tr}(Q_{\bar{\bar{x}}}) = 0.3170 \times 10^{-5}$$

Exemplo: ajustamento da rede 2D com *datum* de traço mínimo (norma mínima): tem-se, após a 2ª iteração:

A =

$$\begin{bmatrix} -0.0007 & -1.0000 & 0.0007 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4963 & -0.8681 & -0.4963 & 0.8681 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3123 & 0.9500 & -0.3123 & -0.9500 \\ 0.9546 & -0.2978 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9546 & 0.2978 \\ -0.0037 & 0.0030 & 0.0046 & -0.0000 & 0 & 0 & -0.0009 & -0.0030 \\ 0.0046 & -0.0000 & -0.0072 & -0.0015 & 0.0025 & 0.0015 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N =

1.0e+005 *

3.9469	-1.2334	-2.3912	-0.3203	0.5594	0.3198	-2.1151	1.2338
-1.2334	3.1433	0.6544	-2.5002	-0.0004	-0.0002	0.5793	-0.6428
-2.3912	0.6544	4.0778	-0.5817	-1.4826	0.5817	-0.2041	-0.6544
-0.3203	-2.5002	-0.5817	4.4842	0.9019	-1.9844	0.0001	0.0005
0.5594	-0.0004	-1.4826	0.9019	1.1670	-0.1598	-0.2438	-0.7417
0.3198	-0.0002	0.5817	-1.9844	-0.1598	4.2408	-0.7417	-2.2562
-2.1151	0.5793	-0.2041	0.0001	-0.2438	-0.7417	2.5631	0.1622
1.2338	-0.6428	-0.6544	0.0005	-0.7417	-2.2562	0.1622	2.8985

Val =

1.0e+005 *

Columns 1 through 6

8.7813	0	0	0	0	0
0	6.8453	0	0	0	0
0	0	4.9966	0	0	0
0	0	0	3.7670	0	0
0	0	0	0	2.1314	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 8

0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0.0000 + 0.0000i	0
0	0.0000 - 0.0000i

(os valores próprios da matriz N são os elementos da diagonal principal da matriz Val).

Vec =

Columns 1 through 6

-0.4149	0.5682	-0.1305	-0.1827	-0.0828
0.3929	0.0086	-0.4245	0.2946	-0.5126
0.4524	-0.2802	0.1841	-0.6313	-0.1841
-0.4592	-0.4242	0.5191	0.0446	-0.1471
-0.1555	0.0763	0.1264	0.4040	-0.3214
0.3631	0.5190	0.4252	0.0430	0.3928
0.1179	-0.3643	-0.1799	0.4100	0.5883
-0.2967	-0.1034	-0.5198	-0.3822	0.2669

(os vectores próprios da matriz N são as colunas da matriz Vec)

R =

-0.5205	-0.1426 + 0.0303i	-0.1426 - 0.0303i
-0.1710	-0.1236 - 0.3719i	-0.1236 + 0.3719i
-0.4736	0.1368 + 0.0175i	0.1368 - 0.0175i
-0.1710	-0.1238 - 0.3718i	-0.1238 + 0.3718i
-0.4094	0.5200	0.5200
-0.1343	0.0953 - 0.3819i	0.0953 + 0.3819i
-0.4997	-0.0190 + 0.0247i	-0.0190 - 0.0247i
-0.1046	0.2725 - 0.3900i	0.2725 + 0.3900i

dX =

1.0e-003 *

-0.1928
0.1692
0.1231
0.0504
0.0454
-0.1102
0.0242
-0.1095

$M_1 = 499.794$

$P_1 = 499.786$

$M_2 = 499.946$

$P_2 = 715.282$

$M_3 = 330.969$

$P_3 = 1010.850$

$M_4 = 194.291$

$P_4 = 595.082$

Q =

1.0e-005 *

0.0823	-0.0011	-0.0117	-0.0235	0.0033	-0.0025	-0.0738	0.0272
-0.0011	0.2000	-0.0008	-0.0263	0.0913	-0.1103	-0.0893	-0.0633
-0.0117	-0.0008	0.1633	0.0181	-0.0464	-0.0280	-0.1052	0.0108
-0.0235	-0.0263	0.0181	0.1149	0.0435	-0.0336	-0.0380	-0.0550
0.0033	0.0913	-0.0464	0.0435	0.0986	-0.0445	-0.0554	-0.0903
-0.0025	-0.1103	-0.0280	-0.0336	-0.0445	0.1634	0.0750	-0.0195
-0.0738	-0.0893	-0.1052	-0.0380	-0.0554	0.0750	0.2344	0.0523
0.0272	-0.0633	0.0108	-0.0550	-0.0903	-0.0195	0.0523	0.1379

4.15. Transformação de datum

Diversos problemas de posicionamento podem ter uma solução conveniente através de uma transformação de coordenadas, sendo conhecidas as posições de um conjunto de pontos em ambos os referenciais. Um exemplo é o seguinte problema: pretendem-se as coordenadas do ponto C mas apenas os pontos A e B, de coordenadas conhecidas, podem ser observados de C; determina-se então um ponto auxiliar D, a curta distância de C, que também é observado de C (figura 4.27.). Estaciona-se em seguida no ponto D.

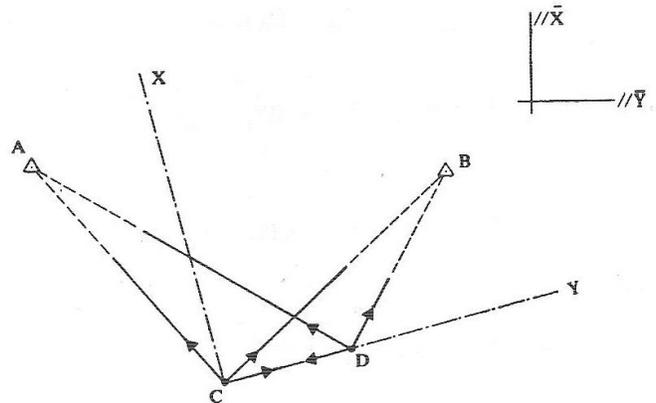
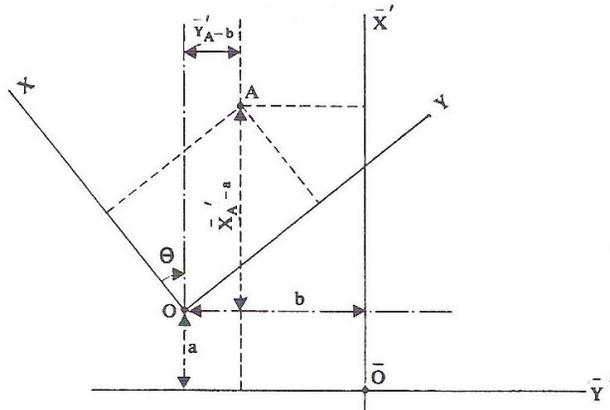


figura 4.27. Problema dos dois pontos

A solução obtém-se da forma seguinte: adopta-se um referencial local com origem em C, com eixo das ordenadas segundo a direcção CD: neste referencial, as coordenadas de C são $X_C=0$, $Y_C=0$ e as de D são $X_D=0$, $Y_D=d$, sendo d a distância CD. A partir dos ângulos ACD e ADC e da distância d calculam-se as coordenadas de A no referencial local; a partir dos ângulos BDC e BCD e da distância d calculam-se as coordenadas de B no referencial local. Obtém-se desta forma as coordenadas de A e B no referencial global (\bar{X}, \bar{Y}) e no referencial local (X, Y) ; os dois referenciais podem relacionar-se através de uma transformação de similaridade que consiste numa translação de componentes (a, b) segundo (\bar{X}, \bar{Y}) que leva à coincidência das origens dos dois referenciais, numa rotação θ e num factor de escala λ :



$$\begin{bmatrix} \bar{X} - a \\ \bar{Y} - b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ -p & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

figura 4.28. Transformação de similaridade

As quatro incógnitas a, b, P, q podem determinar-se se forem conhecidas, como é o caso, as coordenadas de dois pontos em ambos os referenciais:

$$\theta = R_{AB} - \bar{R}_{AB}$$

$$\lambda = \frac{\bar{d}_{AB}}{d_{AB}}$$

$$p = \lambda \cos \theta = \frac{(X_B - X_A)(\bar{X}_B - \bar{X}_A) + (Y_B - Y_A)(\bar{Y}_B - \bar{Y}_A)}{d_{AB}^2}$$

$$q = \lambda \sin \theta = \frac{(Y_B - Y_A)(\bar{X}_B - \bar{X}_A) + (X_B - X_A)(\bar{Y}_B - \bar{Y}_A)}{d_{AB}^2}$$

Tendo sido estabelecido um datum a partir de um conjunto de contrangimentos $R_1^T \bar{x} = 0$, pretende-se efectuar a transição para outro datum definido pelo conjunto de constrangimentos $R_2^T \bar{x} = 0$ através de uma transformação de similaridade S que evite a repetição da inversão da matriz normal de dimensão $u \times u$, à custa de d parâmetros convenientemente seleccionados que não deformem a configuração da rede.

Sendo $R_1 = B_1 S$ e $R_2 = B_2 S$, em que, por um lado, $AS = 0$ e $S^T S = I_d$ e, por outro, as matrizes B_1 e B_2 são matrizes diagonais cujos coeficientes são 0 ou 1 (com pelos menos d elementos não nulos), de tal forma que tornam nulas as linhas de S que correspondem aos 0 de B e mantêm as restantes linhas. Desta forma, consoante a forma da matriz B é obtido um constrangimento diferente, como por exemplo:

a) $B = I \Rightarrow R = S \Rightarrow$ datum traço mínimo

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \Rightarrow$ datum com variância zero

c) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, k > d \Rightarrow$ datum com norma mínima

(esta última solução minimiza a norma parcial $\|\bar{x}_k\|$ consistindo nas k incógnitas indicadas pelo bloco I_k da matriz B anterior de tal forma que a soma das correspondentes k variâncias, isto é, o traço parcial da matriz cofactor, é mínima).

É possível definir uma transformação de datum numa rede a partir de uma escolha razoável da matriz B . A estimativa dos parâmetros \bar{x}_1 associada com os constrangimentos $R_1^T \bar{x} = 0$ possui matriz cofactor $Q_{\bar{x}_1} = (N + R_1 R_1^T)^{-1} N (N + R_1 R_1^T)^{-1}$; outros constrangimentos $R_2^T \bar{x} = 0$, que conduzem ao vector de parâmetros \bar{x}_2 e à correspondente matriz cofactor $Q_{\bar{x}_2} = (N + R_2 R_2^T)^{-1} N (N + R_2 R_2^T)^{-1}$, estando estas duas soluções relacionadas pela relação $\bar{x}_2 = K_1 \bar{x}_1$, $K_1 = (N + R_1 R_1^T)^{-1} N = I - S(R_1^T S)^{-1} R_1^T$, $Q_{\bar{x}_2} = K_1 Q_{\bar{x}_1} K_1^T$.

Ajustamento da rede 1D com datum por minimização da norma parcial: se os pontos P_2 e P_3 forem escolhidos como datum, então a matriz B é da forma

$$B = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & I_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

obtendo-se

$$R_d = B_d S = (0 \ 1 \ 1 \ 0)^T$$

e o assim o constrangimento $R_d^T \bar{x} = 0$ conduz a $\hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 0$.

De

$$N_{4,4} = A_{4,6}^T P_{6,6} A_{6,4} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix}$$

tem-se então

$$Q_{\bar{x}} = (N + R_d R_d^T)^{-1} N (N + R_d R_d^T)^{-1} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0710 & 0.0178 & -0.0178 & 0.0413 \\ 0.0178 & 0.0484 & -0.0484 & 0.0133 \\ -0.0178 & -0.0484 & 0.0484 & -0.0133 \\ 0.0413 & 0.0133 & 0.0133 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr } Q_{\bar{x}} \text{ parcial} = 10^{-5} (0.0484 + 0.0484) = 0.0968 \times 10^{-5}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{4,1}^d &= Q_{\bar{x}_{4,1}^d} A^T \bar{\ell} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 \text{ mm} \\ 1.6 \text{ mm} \\ 1.7 \text{ mm} \\ 1.2 \text{ mm} \\ 2.1 \text{ mm} \\ 1.3 \text{ mm} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.375 & -0.375 & -0.250 & 0 & 0.125 & 0.125 \\ 0.125 & -0.125 & 0 & -0.250 & -0.125 & 0.125 \\ -0.125 & 0.125 & 0 & 0.250 & 0.125 & -0.125 \\ -0.125 & -0.125 & 0.250 & 0 & 0.375 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 \text{ mm} \\ 1.6 \text{ mm} \\ 1.7 \text{ mm} \\ 1.2 \text{ mm} \\ 2.1 \text{ mm} \\ 1.3 \text{ mm} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1.05 \text{ mm} \\ -0.45 \text{ mm} \\ 0.45 \text{ mm} \\ 1.35 \text{ mm} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\|\bar{x}_{4,1}^d\| = \sqrt{\bar{x}_{4,1}^d T \bar{x}_{4,1}^d} = 1.82 \text{ mm}$$

$$\|\bar{x}_{2,1}^d\|_{\text{parcial}} = \sqrt{(-0.45)^2 + 0.45^2} = 0.64 \text{ mm}$$

O resultado é compatível com os constrangimentos; a comparação com as soluções a, b e c mostra que a definição do *datum* por minimização da norma parcial, isto é, a soma dos elementos da diagonal de $Q_{\bar{x}^d}$ que se referem a x_2 e a x_3 é menor que a restantes soluções, enquanto que o traço completo excede o valor correspondente à solução anterior.

Ajustamento da rede 1D com *datum* por transformação de *datum*: se os resultados para \bar{x} e $Q_{\bar{x}}$ correspondentes a um *datum* forem conhecidos, então pode definir-se outro *datum* através de uma transformação; considere-se por exemplo a transformação da solução a para a solução c por intermédio de

$$\bar{x}^c = K_c \bar{x}^a$$

$$Q_{\bar{x}^c} = K^c Q_{\bar{x}^a} K_c^T$$

$$K_c = I - S(R_c^T S)^{-1} R_c^T$$

Os constrangimentos para o *datum* c são $S_c = R_c R_c^T = \frac{1}{2}(1 \ 1 \ 1 \ 1)$, sendo a matriz $S = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$; assim,

$$R_c^T S = \frac{4}{2} = 2$$

$$(R_c^T S)^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$K_c = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K_c \bar{\tilde{x}}^a = \begin{bmatrix} -1.125 \text{ mm} \\ -0.525 \text{ mm} \\ 0.375 \text{ mm} \\ 1.275 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

Como se viu, a definição de um *datum* pode ser obtida através da introdução de constrangimentos que, para terem significado geométrico devem ser do tipo $R^T \bar{x} = 0$, com $R=BS$, sendo B seleccionada como se indicou no parágrafo anterior e S a matriz de transformação tal que $AS=NS=0$. No caso de uma rede 1D, é necessário estabelecer um constrangimento devido ao facto de o *deficit* de característica ser igual a 1, tendo a forma $S^T(1 \ 1 \ 1 \ 1) a$, onde a é uma constante qualquer; para a solução ser numericamente estável, a matriz S deve ser normalizada, isto é, a respectiva norma (comprimento de cada linha) deve ser igual a um. O método geral de normalização é $S_n^T = (S^T S)^{-1/2} S^T \Rightarrow S_n^T S_n = I$, existindo para quaisquer matrizes quadradas regulares; no caso especial de uma rede 1D, tem-se $S_n^T = \frac{1}{\sqrt{u}}(1 \ 1 \ 1 \ 1)$, onde u é o número de elementos não nulos de S .

No caso de um *datum* 2D com *deficit* de característica $d=4$ são necessários 4 constrangimentos; sendo os parâmetros a estimar representados por $\bar{x}^T = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_p, y_p)$, \bar{x}_i e \bar{y}_i as coordenadas aproximadas e \tilde{x}_i e \tilde{y}_i as correcções às coordenadas, então

$$S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \bar{y}_1 & -\bar{x}_1 & \bar{y}_2 & -\bar{x}_2 & \dots \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sum \tilde{x}_i = 0 \\ \sum \tilde{y}_i = 0 \\ \sum (\bar{y}_i \tilde{x}_i - \bar{x}_i \tilde{y}_i) = 0 \\ \sum (\bar{x}_i \tilde{x}_i + \bar{y}_i \tilde{y}_i) = 0 \end{cases}$$

Para efectuar a normalização de S , o sistema de coordenadas sofre uma translação de forma a que a respectiva origem coincida com o centro de gravidade de rede, ou seja, $\bar{x}_i = x_i^0 - \sum x_i^0 / p$, $\bar{y}_i = y_i^0 - \sum y_i^0 / p$, em que x_i^0 e y_i^0 representam as

coordenadas no sistema original (neste procedimento as colunas s_j^T de S^T tornam-se ortogonais, isto é, $s_j^T s_k = 0$ para $j \neq k$, sendo então $S^T S$ uma matriz diagonal). Geometricamente, as duas primeiras colunas de S^T estão relacionadas com a translação em x e y ; a terceira coluna define a rotação em torno do eixo vertical e a quarta coluna ajusta a escala das observações em função das coordenadas aproximadas. Se algumas observações contiverem informação sobre o *datum*, então a(s) coluna(s) correspondente(s) de S^T é (são) omitida(s).

4.16. Medidas de precisão em redes geodésicas

Em muitos casos, a deformação a ser monitorizada por métodos geodésicos é de pequena amplitude, sendo geralmente da mesma ordem de magnitude dos erros de observação, pelo que a configuração de rede e a avaliação da precisão obtida têm um papel preponderante na análise dos resultados. Considerações de ordem prática impõem que os parâmetros do modelo de ajustamento das redes geodésicas sejam as coordenadas dos pontos, verificando-se que o vector \bar{x} assim como a correspondente matriz $\Sigma_{\bar{x}}$ de variâncias-covariâncias não são quantidades invariantes deste modelo, dependendo da selecção do *datum*, o que torna difícil comparar a precisão das posições ajustadas.

Designam-se critérios globais aqueles que dependem da totalidade dos elementos da matriz cofactor dos parâmetros, como por exemplo a precisão, a fiabilidade e o elipsóide global de confiança. Estes critérios não fornecem qualquer indicação sobre pontos particulares da rede, razão pela qual se utilizam com mais frequência critérios locais como sejam as elipses de confiança, que indicam para cada ponto da rede um domínio de confiança para a localização desse ponto, podendo planear-se a rede de forma a que todas ou algumas elipses não ultrapassem determinados limites. Uma rede diz-se homogénea se todas as elipses tiverem a mesma dimensão e diz-se homogénea e isotrópica quando para além de terem a mesma dimensão todas as elipses forem circulares (caso ideal), caso em que a precisão das coordenadas dos pontos é a mesma em todas as direcções.

A matriz $u \times u$ de variâncias-covariâncias contém informação relativa à precisão da rede, $\Sigma_{\bar{x}} = \sigma_0^2 (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1}$; numa rede com constrangimento mínimo, $\Sigma_{\bar{x}}$ tem *deficit* de característica d , isto é, $C(\Sigma_{\bar{x}}) = r = u - d$, o que quer dizer que existem d colunas redundantes nesta matriz, o que se traduz na não unicidade dos valores obtidos. Foram desenvolvidos diversos métodos para ultrapassar este problema, embora nenhum seja inteiramente satisfatório (a situação melhora quando se comparam duas matrizes de variâncias-covariâncias, existindo parâmetros relativos que são independentes do *datum*).

Um problema suplementar consiste na selecção do parâmetro σ_0^2 : no caso das variâncias das observações serem conhecidas e do modelo aplicado ser correcto, deve utilizar-se σ_0^2 . No entanto, com frequência a informação *a priori* sobre a precisão das observações é vaga e o modelo pode não ser a melhor aproximação da realidade: nesta situação é preferível utilizar-se s_0^2 , desde que o modelo tenha um número suficiente de graus de liberdade, ou seja, desde que $(n - r)/r > 0.5$.

Resumindo, há três factores que influenciam a precisão final dos parâmetros estimados:

- A selecção da instrumentação e da metodologia (número de repetições das observações) utilizadas.
- A geometria da rede, isto é, a posição relativa dos pontos da rede e a configuração das observações que ligam esses pontos, o que determina a forma da matriz A.
- A matriz P dos pesos, que contém o peso *a priori* das observações, que depende do tipo e da precisão relativa dessas observações.

Não é prático avaliar a precisão de uma rede através da análise dos elementos da matriz de variâncias-covariâncias pois o número de elementos desta matriz é normalmente elevado; esta informação deve portanto ser comprimida numa medida representativa que possa realçar a precisão da rede, embora haja uma perda de informação neste procedimento.

A abordagem fundamental para a análise da matriz de variâncias-covariâncias é a decomposição por valores próprios de $\Sigma_{\hat{x}}$. Sendo \bar{x} o vector dos parâmetros de dimensão u , \hat{x} a correspondente estimativa por mínimos quadrados e $\Sigma_{\hat{x}}$ a matriz de variâncias-covariâncias, a forma quadrática $(\bar{x} - \hat{x})^T \frac{1}{\sigma_0^2} N(\bar{x} - \hat{x})$ é a equação do hiper-elipsóide r -dimensional com centro em \bar{x} . Na hipótese de normalidade, $\hat{x} \sim N(\bar{x}, \Sigma_{\hat{x}})$ e sendo σ_0^2 conhecido, a forma quadrática anterior tem distribuição qui-quadrado com r graus de liberdade, isto é, $(\bar{x} - \hat{x})^T \frac{1}{\sigma_0^2} N(\bar{x} - \hat{x}) \sim \chi_{1-\alpha}^2(r)$. Após a selecção do nível de significância, por exemplo, $1 - \alpha = 95\%$, o correspondente valor $\chi_{1-\alpha}^2(r)$ pode ser calculado, ficando o hiper-elipsóide definido pelos seus r semi-eixos e respectivas direcções no espaço (os comprimentos destes eixos são proporcionais à raiz quadrada dos valores próprios de $\Sigma_{\hat{x}}$ e as respectivas direcções são dadas pelos vectores próprios). Partindo da equação $(\Sigma_{\hat{x}} - \lambda_i)s_i = 0$, $i \in \{1, 2, \dots, u\}$, onde λ_i é o i -ésimo valor próprio de $\Sigma_{\hat{x}}$ e s_i o vector próprio associado, como $\Sigma_{\hat{x}}$ é uma matriz definida semi-positiva, existem $C(\Sigma_{\hat{x}}) = r$ valores próprios positivos distintos e $d = u - r$ valores próprios nulos, com u vectores próprios distintos mutuamente ortogonais. A equação homogénea $(\Sigma_{\hat{x}} - \lambda_i)s_i = 0$ tem soluções não triviais se e só se $(\Sigma_{\hat{x}} - \lambda_i)$ for singular, ou seja, se o respectivo determinante for nulo, $\det(\Sigma_{\hat{x}} - \lambda_i) = 0$, ou,

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda_i & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1u} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda_i & \cdots & \sigma_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{u1} & \sigma_{u2} & \cdots & \sigma_{uu} - \lambda_i \end{bmatrix} = 0$$

cujo desenvolvimento conduz a um polinómio de ordem u em λ_i (polinómio característico), de cuja solução se obtêm os valores próprios e vectores próprios. Cada par λ_i, s_i define um eixo do hiper-elipsóide através do semi-eixo $a_i = \sqrt{c\lambda_i}$ e da direcção s_i .

Diversas medidas podem ser utilizadas para reflectir aspectos diferentes da precisão, medidas essas derivadas da expressão $\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}} = \sigma_0^2 (N + RR^T)^{-1} N (N + RR^T)^{-1}$, em que

$$Q_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1i} & \dots & Q_{1j} & \dots & Q_{1p} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2i} & \dots & Q_{2j} & \dots & Q_{2p} \\ \vdots & \vdots \\ Q_{i1} & Q_{i2} & \dots & Q_{ii} & \dots & Q_{ij} & \dots & Q_{ip} \\ \vdots & \vdots \\ Q_{j1} & Q_{j2} & \dots & Q_{ji} & \dots & Q_{jj} & \dots & Q_{jp} \\ \vdots & \vdots \\ Q_{p1} & Q_{p2} & \dots & Q_{pi} & \dots & Q_{pj} & \dots & Q_{pp} \end{bmatrix}$$

é apresentada em blocos (matrizes) de 2×2 , cada um relativo a um ponto ou a um par de pontos, em que

$$Q_{kk} = \begin{bmatrix} q_{xx}^k & q_{xy}^k \\ q_{yx}^k & q_{yy}^k \end{bmatrix} \text{ e } Q_{k\ell} = \begin{bmatrix} q_{xx}^{k\ell} & q_{xy}^{k\ell} \\ q_{yx}^{k\ell} & q_{yy}^{k\ell} \end{bmatrix}.$$

Uma medida imediata de precisão local é o desvio padrão das coordenadas; no caso de σ_0^2 conhecido, tem-se

$$\sigma_x = \sigma_0 \sqrt{q_{xx}}, \quad \sigma_y = \sigma_0 \sqrt{q_{yy}}$$

onde os cofactores q são os elementos pertinentes da matriz $\Sigma_{\hat{x}}$. Quando σ_0^2 não é conhecido, tem-se:

$$s_x = s_0 \sqrt{q_{xx}}, \quad s_y = s_0 \sqrt{q_{yy}}$$

(estes valores são frequentemente designados por erros médios quadráticos das coordenadas). Como as expressões anteriores dependem da redundância do modelo, é aconselhável utilizar intervalos de confiança, para o que é necessário conhecer a distribuição de $(\bar{x} - \hat{\bar{x}})/s_{\bar{x}}$. Admitindo uma distribuição normal para \bar{x} , tem-se que $(\bar{x} - \hat{\bar{x}}) \sim N(0, \sigma_{\bar{x}})$, donde

$$P(-C_{\alpha/2} < (\bar{x} - \hat{\bar{x}})/\sigma_{\bar{x}} < C_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

ou

$$P(\hat{\bar{x}} - \sigma_{\bar{x}} C_{\alpha/2} < \bar{x} < \hat{\bar{x}} + \sigma_{\bar{x}} C_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

No caso de se conhecer s_0^2 , como $(\bar{x} - \hat{\bar{x}}) \sim t(n-r)$, tem-se

$$P(-t_{\alpha/2} < (\bar{x} - \hat{\bar{x}}) / s_{\bar{x}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

ou

$$P(\hat{\bar{x}} - s_{\bar{x}} t_{\alpha/2} < \bar{x} < \hat{\bar{x}} + s_{\bar{x}} t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Uma forma prática de evidenciar a precisão de uma rede é utilizar elipses de erro ou de confiança, absolutas se se referirem a um ponto ou relativas se se referirem à diferença de posição entre dois pontos. Particularizando a expressão do hiper-elipsóide para a posição de um ponto P_k numa rede 2D, convenientemente multiplicada por σ_0^2 , tem-se

$$(\bar{x} - \hat{\bar{x}})^T Q_{kk} (\bar{x} - \hat{\bar{x}}) \sim \sigma_0^2 \chi_{1-\alpha}^2(2)$$

que é a equação de uma elipse cujos eixos são função dos valores e dos vectores próprios de Q_{kk} , pelo que resolvendo o sistema $(Q_{kk} - \lambda_i I) s_i = 0$ em relação a λ_i , isto é,

$$\det \begin{bmatrix} q_{xx}^k - \lambda & q_{xy}^k \\ q_{yx}^k & q_{yy}^k - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$(q_{xx}^k - \lambda)(q_{yy}^k - \lambda) - q_{xy}^k q_{yx}^k = 0$$

cujas raízes são

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(q_{xx}^k + q_{yy}^k + z) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(q_{xx}^k + q_{yy}^k - z) \end{cases}$$

com

$$z^2 = (q_{xx}^k - q_{yy}^k)^2 + 4q_{xy}^k q_{yx}^k.$$

Supondo conhecido σ_0^2 , os parâmetros da elipse de confiança são

$$\begin{cases} a = \sigma_0 \sqrt{\lambda_1 \chi_{1-\alpha}^2(2)} \\ b = \sigma_0 \sqrt{\lambda_2 \chi_{1-\alpha}^2(2)} \\ \tan 2\alpha = \frac{2q_{xy}^k}{q_{xx}^k - q_{yy}^k} \end{cases}$$

onde α é o rumo do semi-eixo maior da elipse.

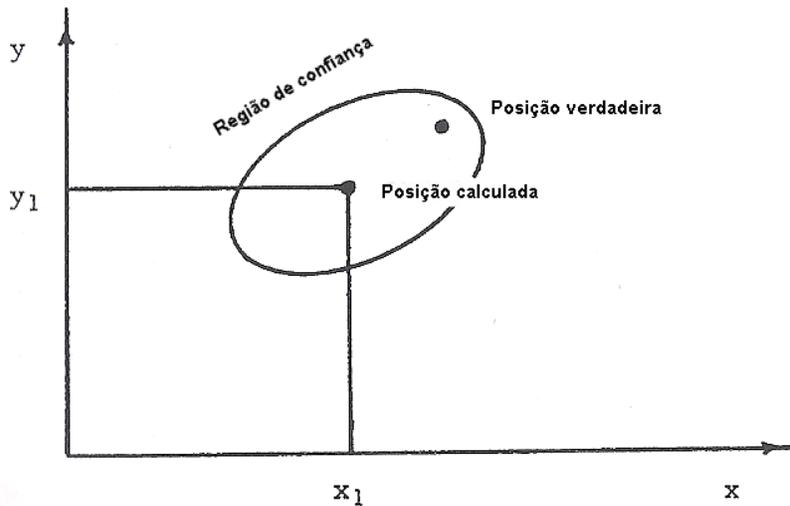


figura 4.29. Coordenadas estimadas: região de confiança

A elipse de erro é obtida da elipse de confiança substituindo o valor de $\chi_{1-\alpha}^2(2)$ pela unidade:

$$\begin{cases} a = \sigma_0 \sqrt{\lambda_1} \\ b = \sigma_0 \sqrt{\lambda_2} \\ \tan 2\alpha = \frac{2q_{xy}^k}{q_{xx}^k - q_{yy}^k} \end{cases}$$

No caso de ser utilizado s_0^2 , tem-se:

$$\begin{cases} a = s_0 \sqrt{\lambda_1} \\ b = s_0 \sqrt{\lambda_2} \\ \tan 2\alpha = \frac{2q_{xy}^k}{q_{xx}^k - q_{yy}^k} \end{cases}$$

4.17. Teste global ao modelo

O critério da hipótese nula, no caso de um teste global, é “o modelo está correcto e completo”, o que se pode exprimir por $H_0 : E(s_0^2) = \sigma_0^2$, que conduz ao teste $T : \bar{v}^T P \bar{v} / \sigma_0^2$, o qual, sob a hipótese nula, tem distribuição $\chi^2 \sim (n-u)$; após a selecção do nível de significância do teste, tipicamente igual a 5 %, o valor da distribuição χ^2 com $(n-u)$ graus de liberdade é obtido de uma tabela, sendo comparado com o valor da equação $T = \bar{v}^T P \bar{v} / \sigma_0^2$: se $T \leq \chi_{\alpha}^2(n-u)$, o teste não indica contradição entre as observações e o modelo (um teste não pode provar a validade do modelo ou que as observações são correctas). No caso $T > \chi_{\alpha}^2(n-u)$ é necessário investigar a razão pela qual o modelo ou as observações estão errados, desde os modelos funcional (como por exemplo os parâmetros de calibração do aparelho ou o modelo de refacção) e estocástico (como por exemplo as variâncias *a priori* ou as covariâncias), as observações (como por exemplo erros de centragem, pontos instáveis, má identificação dos pontos) ou os cálculos.

Os sistemas de observação geodésica são, em geral, de materialização permanente pois destinam-se a ser observados repetidamente. Dada a elevada precisão exigida, devem ter um planeamento cuidadoso, sendo os deslocamentos determinados a partir das grandezas observadas (ângulos e, por vezes, distâncias). Este planeamento consiste na selecção de um rede de referência, de vértices auxiliares, de equipamento e de métodos operativos para a medição das grandezas necessárias. Desta forma, pretende-se determinar com o menor custo possível os deslocamentos para um conjunto de pontos objecto, com um erro igual ou inferior à tolerância fixada previamente. Os critérios usados para o planeamento são a) a exactidão e a precisão, b) a robustez e c) a economia, podendo estas propriedades quantificadas a partir quer da matriz A de configuração de primeira ordem (constituída pelas derivadas parciais das grandezas observadas relativamente às coordenadas dos vértices) quer pela matriz Σ de configuração de segunda ordem (postulada em função do equipamento de medição a utilizar e dos métodos operativos previstos). A medição das observáveis é afectada por erros de observação que têm origens diversas, como sejam o equipamento utilizado, o método operativo, as condições atmosféricas, a competência do operador, etc. A relação entre o valor exacto μ da observável e o respectivo valor y medido pede exprimir-se como:

$$y = \mu + \theta_I + \theta_E + \delta$$

onde θ_I representa os erros instrumentais, como por exemplo erros de calibração, θ_E representa os erros de origem ambiental, como por exemplo a refacção horizontal e vertical e δ representa os erros aleatórios.

A exactidão e precisão de uma rede estão associadas à distribuição do vector dos erros dos deslocamentos. A exactidão é quantificada pelo efeito do parâmetro de localização θ na norma do vector dos erros:

$$\|\varepsilon\| = \left\| C^{-1} A^T \Sigma^{-1} \theta \right\|$$

de tal forma que sob a hipótese nula ($\theta=0$) a rede é exacta. A precisão é descrita pela matriz de variância dos erros:

$$V(\varepsilon) = \omega^2 C^{-1}$$

em que sob a hipótese nula $\omega=1$.

A robustez é a propriedade que caracteriza a resistência de uma rede ao efeito de erros sistemáticos ou grosseiros isolados; numa rede robusta estes erros irão afectar muito mais o vector dos resíduos do que o vector dos deslocamentos. A robustez é quantificada através dos números de redundância local, elementos da diagonal da matriz U , que assumem valores entre 0 e 1; uma rede robusta deve ter números de redundância local homogêneos e próximos de 0.

A economia é a propriedade que caracteriza o custo da instalação e medição da rede. Uma rede económica é aquela que atinge níveis aceitáveis de exactidão, precisão e robustez ao custo mínimo. Pretendendo-se um aumento na exactidão, precisão e robustez, é necessário utilizar equipamento mais caro, operadores mais qualificados, processos operativos mais complexos e observações mais redundantes, à custa da economia da rede.

O método utilizado na configuração de redes consiste na selecção de uma configuração inicial que é melhorada iterativamente; muitas vezes, os constrangimentos na localização das estações e as limitações dos aparelhos disponíveis não permitem grandes melhoramentos em relação à configuração inicial.

O procedimento tendo em vista a análise da estabilidade designa-se por teste de congruência, cujo objectivo é detectar se o conjunto de pontos de referência da rede permaneceu estável. Este teste é baseado no teste F de Fisher que requer o cálculo de $\hat{\sigma}_{0i}^2$, variância por grupo, obtida para cada combinação da época inicial com as restantes épocas.

4.18. Comparação de duas campanhas

Cada campanha é ajustada de forma independente, sendo o vector deslocamento \vec{d} entre as duas épocas, a respectiva matriz cofactor Q_d e a variância *a posteriori* conjunta $\hat{\sigma}_0^2$ dados por:

$$\vec{d} = \hat{x}_2 - \hat{x}_1$$

$$Q_d = Q_{\hat{x}_2} + Q_{\hat{x}_1}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = (df_1 \hat{\sigma}_{01}^2 + df_2 \hat{\sigma}_{02}^2) / df, \quad df = df_1 + df_2$$

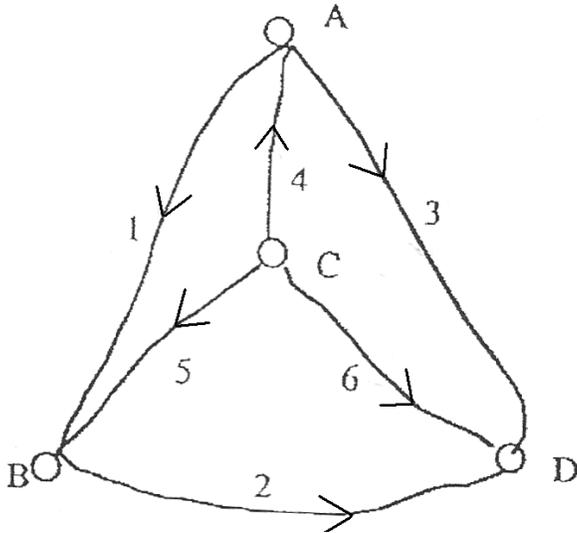
onde os índices 1 e 2 se referem às campanhas 1 e 2, respectivamente, aceitando-se o teste estatístico cuja hipótese nula é

$$H_0: \hat{\sigma}_{01}^2 = \hat{\sigma}_{02}^2 \text{ com nível de significância } \alpha \text{ se:}$$

$$\left[F\left(\frac{\alpha}{2}, df_2, df_1\right) \right]^{-1} < \frac{\hat{\sigma}_{01}^2}{\hat{\sigma}_{02}^2} < F\left(\frac{\alpha}{2}, df_2, df_1\right)$$

A rejeição do teste pode ser causada por inadequada atribuição dos pesos das observações.

Exemplo: a figura 4.30. representa uma rede de nivelamento observada em 2 campanhas, sendo as observações indicadas na tabela 4.11.:



linha	Época 1	Época 2	pesos
1	45.2	46.9	1
2	265.8	265.6	2
3	310.3	312.2	1
4	-26.2	-24.1	2
5	70.8	70.7	2
6	336.5	336.1	2

tabela 4.11. desníveis observados em mm

Tomando o ponto A como origem do datum, com cota igual a 0.50000 m, no ajustamento das duas épocas de observação, obtém-se:

Época 1:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.500000000000000 \\ 0.544794285714286 \\ 0.473920000000000 \\ 0.810465714285714 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$Q_{\vec{x}_1} = \begin{bmatrix} 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.371428571428571 & 0.200000000000000 & 0.228571428571429 \\ 0.000000000000000 & 0.200000000000000 & 0.300000000000000 & 0.200000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.228571428571429 & 0.200000000000000 & 0.371428571428571 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_{01}^2 = 1.345714285714171e - 7 \text{ m}^{-2} = 1.345714285714171e - 1 \text{ mm}^{-2}$$

Se o datum da rede de nivelamento for tomado no ponto D, com cota 0.810465714285714 m (podia ser um valor qualquer mas neste caso a cota do ponto A venha igual a 0.5 m) tem-se:

Época 1:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.500000000000000 \\ 0.544794285714285 \\ 0.473920000000000 \\ 0.810465714285714 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$Q_{\vec{x}_1} = \begin{bmatrix} 0.371428571428571 & 0.142857142857143 & 0.171428571428571 & 0.000000000000000 \\ 0.142857142857143 & 0.285714285714286 & 0.142857142857143 & 0.000000000000000 \\ 0.171428571428571 & 0.142857142857143 & 0.271428571428571 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_{01}^2 = 1.345714285714171e-07 \text{ m}^{-2} = 1.345714285714171e-01 \text{ mm}^{-2}$$

Época 2:

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.498265714285714 \\ 0.544965714285714 \\ 0.474265714285714 \\ 0.810465714285714 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$Q_{\vec{x}_2} = \begin{bmatrix} 0.371428571428571 & 0.142857142857143 & 0.171428571428571 & 0.000000000000000 \\ 0.142857142857143 & 0.285714285714286 & 0.142857142857143 & 0.000000000000000 \\ 0.171428571428571 & 0.142857142857143 & 0.271428571428571 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_{02}^2 = 4.999999999999999e-8 \text{ m}^{-2} = 4.999999999999999e-2 \text{ mm}^{-2}$$

Neste caso, $0.065 < 1.0024145778226606343580138908113 < 15.439$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -0.001734285714286 \\ 0.000171428571429 \\ 0.000345714285714 \\ 0.000000000000000 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$Q_{\vec{d}} = \begin{bmatrix} 0.742857142857142 & 0.285714285714286 & 0.342857142857142 & 0.000000000000000 \\ 0.285714285714286 & 0.571428571428572 & 0.285714285714286 & 0.000000000000000 \\ 0.342857142857142 & 0.285714285714286 & 0.542857142857142 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 & 0.000000000000000 \end{bmatrix}$$

4.19. Exemplo

Na rede sobre o plano da figura 4.31., de que se conhecem as coordenadas aproximadas de todos os pontos, foram efectuadas observações de direcção azimutal e de comprimento em duas épocas distintas, tendo-se obtido os valores listados em anexo. Admitindo que o desvio padrão *a priori* das direcções azimutais é igual a 0.3 mgon e que o desvio padrão *a priori* das distâncias é igual a 0.3 mm, efectue o ajustamento da rede utilizando as observações relativas à primeira época de observação com vista a estimar o desvio padrão *a posteriori* das direcções azimutais observadas. A partir da compensação de todas as observações, verifique a validade deste ajustamento. Repita o procedimento para a segunda época de observação e determine o eventual deslocamento da estrutura.

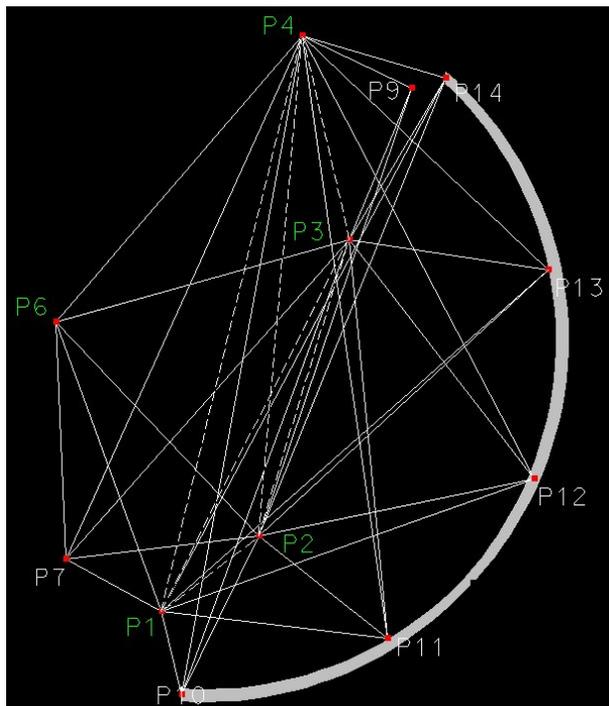


figura 4.31. Rede 2D instalada na barragem de Montsalvens: pontos de referência=P₁, P₂, P₃, P₄, P₆, P₇, P₉ (pilares; a verde indicam-se os pontos estacionados); pontos objecto= P₁₀, P₁₁, P₁₂, P₁₃, P₁₄ (no paramento da barragem); as observações de direcção estão representadas a cheio (49) e as observações de distância estão representadas a tracejado (6)

Os conceitos de variância e de peso estão relacionados, podendo ambos ser considerados como medidas de precisão. A necessidade da introdução dos pesos das observações no processo de ajustamento surge devido ao frequente desconhecimento do valor absoluto dos elementos da matriz de variâncias-covariâncias das observações; se o sistema de equações normais contiver observações de tipos diferentes, introduzem-se pesos através da expressão $p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^2 = \dots = p_n\sigma_n^2 = p_i\sigma_i^2 = \sigma_0^2$, onde p_i é o peso correspondente à variância σ_i^2 e σ_0^2 é a variância por unidade de peso *a priori* (arbitrário). Multiplicando as equações de observação pela raiz quadrada do respectivo peso, as grandezas de observação (2º membro) ficam sem dimensão,

ficando os termos independentes das novas equações com a mesma variância $(\sqrt{p_i})^2 \sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \sigma_i^2 = \sigma_0^2$. Os pesos a atribuir às observações de direcção azimutal, de distância e de rumo baseiam-se na determinação prévia das variâncias das diferentes observações; os pesos das direcções azimutais determinam-se efectuando um ajustamento livre da rede, na qual apenas entram as observações de direcção, de cujos resíduos v_i se tira $\sigma_{\text{direcções}}^2 = \frac{\sum v_i^2}{n-i}$, sendo n o número de observações de direcção e i o número de incógnitas (parâmetros); neste ajustamento, para o problema não ser impossível devem considerar-se dois pontos fixos (ou fixa-se um ponto e junta-se uma equação de distância e outra de rumo); no que diz respeito aos pesos das distâncias, os construtores de distanciómetros fornecem os parâmetros a e b conforme o tipo de aparelho e com os quais a variância de uma distância s se calcula através da expressão $\sigma_{\text{distância}}^2 = a^2 + b^2 s^2$, dependendo portanto da própria distância. Usando os valores calculados para as variâncias das observações, calculam-se os pesos respectivos e efectua-se o ajustamento da rede utilizando todas as observações efectuadas. Após a realização dos cálculos pode-se estimar a variância por unidade de peso a *posteriori* através da expressão $s_0^2 = \frac{\sum p_i v_i^2}{n-i} = \frac{\sigma_0^2}{n-i} \frac{\sum p_i v_i^2}{\sigma_0^2}$, em que $\frac{\sum p_i v_i^2}{\sigma_0^2}$ tem distribuição χ^2 com $n-i$ graus de liberdade e portanto $\frac{s_0^2}{\sigma_0^2}$ tem distribuição $\frac{\chi_{n-i}^2}{n-i}$, o que permite efectuar um teste de comparação de variâncias da unidade de peso *a priori* e *a posteriori* e concluir da validade ou não dos pesos utilizados.

O cálculo do(s) ajustamento(s) da rede é efectuado utilizando o programa `rede_2d_v2.m` que estabelece as equações de observação, resolve o sistema de equações normais e calcula os resíduos e a variância da unidade de peso, assim como as coordenadas ajustadas.

Considerando o valor $\sigma_0^2 = 1$ e utilizando apenas as observações de direcção azimutal (*deficit* de característica=4), efectuou-se o ajustamento fixando os pontos P_1 e P_4 , tomando para precisão *a priori* das observações o valor 0.3 mgon (valor que consta no manual do aparelho utilizado), resultando o valor $s_0^2 = 16.0233$ para a variância *a posteriori*, com a correspondente rejeição no teste da razão das variâncias (utiliza-se o teste estatístico da razão das variâncias $y = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} \times (\text{n}^\circ \text{ graus de liberdade})$, em que as hipóteses alternativas são $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, rejeitando-se H_0 se $y > \chi_{1-\alpha}^2$ (nº graus de liberdade), considerando o nível de significância do teste $\alpha = 0.05$), indicando que os dois valores não são estatisticamente semelhantes.

Neste caso, o número de graus de liberdade é dado por $n - (i + ne) = 49 - (10 * 2 + 5) = 24$, onde n indica o número de observações de direcção azimutal, i indica o número de parâmetros (dos 12 pontos foram fixados 2) e ne indica o número de pontos estacionados, pois no caso de existirem observações de direcção azimutal em cada estação há uma incógnita suplementar que é o R_0 nessa estação.

As causas mais prováveis que podem conduzir à rejeição do teste são:

- presença de erros sistemáticos nas observações
- matriz de variância-covariâncias das observações incorrecta
- modelo matemático inadequado

Trata-se então de ir degradando a precisão *a priori* das observações até se obter a aceitação no teste da razão das variâncias, o que acontece para o valor 1.0 mgon (a que corresponde $s_0^2 = 1.4421$), indicando ser esta a precisão efectiva das observações de direcção azimutal (note-se que para este procedimento é irrelevante quais os dois pontos que são tomados como *datum*).

De seguida efectua-se o ajustamento da rede considerando a totalidade das observações (*deficit* de característica=3), tomando agora um ponto e um rumo fixos. Os pesos a atribuir às distâncias obtém-se da relação

$$P_{\text{distância}} \sigma_{\text{distância}}^2 = \sigma_0^2 \Rightarrow P_{\text{distância}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\text{distância}}^2} = \frac{1}{a^2 + (b \times 10^{-6} \times \text{comprimento})^2} = \frac{1}{0.0003^2} = 3333.3333, \text{ com } b=0 \text{ neste}$$

caso, tendo-se que o número de graus de liberdade neste caso é dado por $n - (i + ne) = 49 + 6 - (11 * 2 - 1 + 5) = 29$ (dos 24 parâmetros, fixando um ponto e um rumo, sobram $24 - 3 = 21$).

A partir do valor da variância *a posteriori* para a variância da unidade de peso, $s_0^2 = 2.301$, pode obter-se uma estimativa para a variância média das direcções azimutais no caso deste ajustamento: de $P_{\text{direcções}} s_{\text{direcções}}^2 = s_0^2$, tem-se:

$$s_{\text{direcções}}^2 = \frac{s_0^2}{P_{\text{direcções}}} = \frac{2.301}{(1'')^{-2}} = 2.30 (1'')^2.$$

A validade do ajustamento efectuado é verificada através do teste da razão de variâncias $y = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} \times (\text{n}^\circ \text{ graus liberdade})$,

em que as hipóteses alternativas são $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, rejeitando-se H_0 se $y > \chi_{1-\alpha}^2 (\text{n}^\circ \text{ graus liberdade})$:

$$25 \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} = 25 \frac{2.264}{(1.727)^2} = 25 \times 0.759 = 18.977 < \chi_{25}^2 = 37.652,$$

pelo que se aceita o ajustamento constrangido efectuado.

P ₁	100.1030	100.0110
P ₂	111.6010	109.0030
P ₃	122.1810	144.0130
P ₄	116.6920	168.0140
P ₆	87.6610	134.1990
P ₇	88.8550	106.2100
P ₉	129.5510	161.8670
P ₁₀	102.4480	90.1670
P ₁₁	126.6760	96.8140
P ₁₂	143.9770	115.7720
P ₁₃	145.6870	140.4290
P ₁₄	133.6100	163.0790

tabela 4.13. Coordenadas aproximadas dos vértices da rede (m)

P1	P2	0.00000
P1	P12	20.29698
P1	P11	49.87515
P1	P10	127.36456
P1	P7	274.31913
P1	P6	320.03257
P1	P4	357.48467
P1	P9	370.53894
P1	P3	371.85831
P1	P14	373.34232
P1	P13	396.07187
P2	P1	0.00000
P2	P7	34.47395
P2	P6	93.87969
P2	P4	147.73200
P2	P3	160.93590
P2	P9	163.09130
P2	P14	166.85981
P2	P13	194.83639
P2	P12	229.13432
P2	P11	285.53857
P2	P10	371.04924
P3	P1	0.00000
P3	P7	16.39492
P3	P6	52.76034
P3	P4	156.08095
P3	P9	195.31749
P3	P14	204.77238
P3	P13	280.02676
P3	P12	328.54962
P3	P11	364.34953
P3	P2	389.07668
P3	P10	392.75631
P4	P1	0.00000
P4	P7	11.70847
P4	P6	29.93088
P4	P14	302.83602
P4	P9	313.15495
P4	P13	333.18105
P4	P12	354.12588
P4	P3	370.45360
P4	P11	375.89797
P4	P2	390.24610
P4	P10	396.28848
P6	P1	0.00000
P6	P7	19.50571
P6	P4	267.38348
P6	P3	304.58672
P6	P2	373.84725

tabela 4.14. Observações de direcção azimutal (gon) correspondentes à primeira época

P1	P2	14.5967
P1	P3	49.2302
P1	P4	69.9973
P2	P3	36.5734
P2	P4	59.2302
P3	P4	24.6209

tabela 4.15. Observações de distância horizontal (m) correspondentes à primeira época

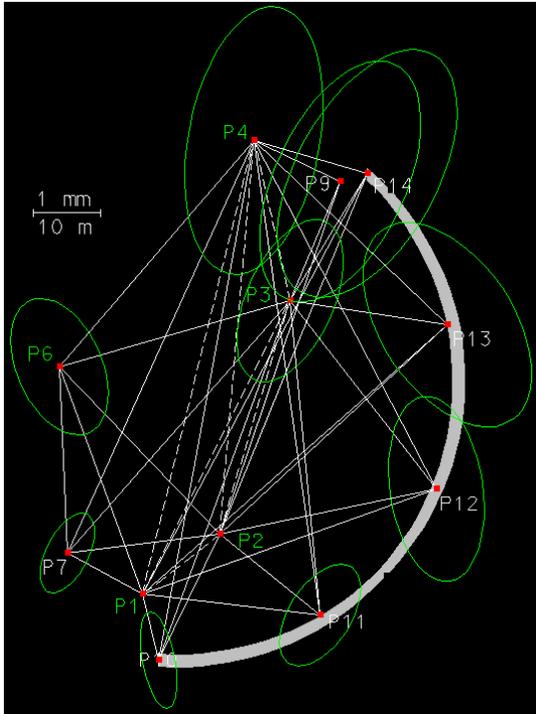


figura 4.32a. Época 1: ajustamento só com direcções azimutais (*deficit* de característica=4): datum com variância nula nos pontos P1 e P2 (elipses a verde)

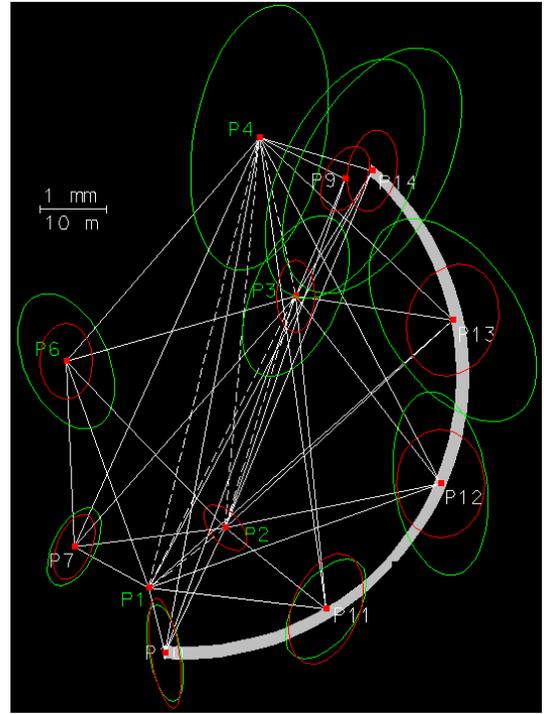


figura 4.32b. Época 1: ajustamento só com direcções azimutais (*deficit* de característica=4): datum com variância nula nos pontos P1 e P4 (elipses a encarnado)

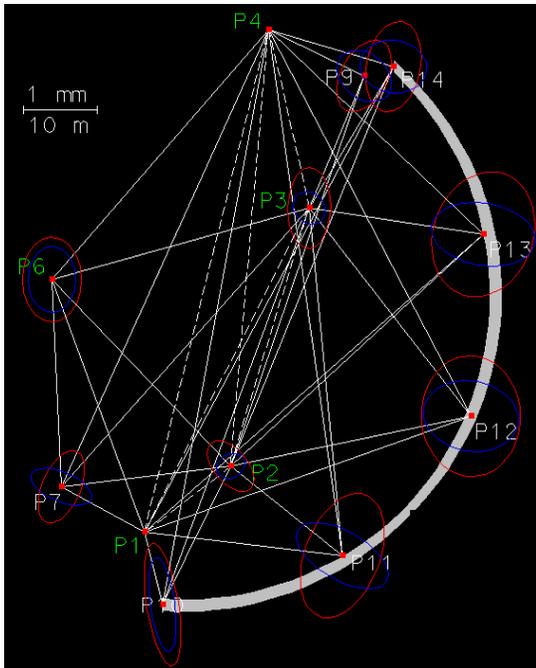


figura 4.32c. Época 1: ajustamento com direcções azimutais e com distâncias horizontais (*deficit* de característica=3): datum com variância nula nos pontos P₁ e P₄, fixando-se apenas a coordenada X deste último ponto (elipses a azul escuro)

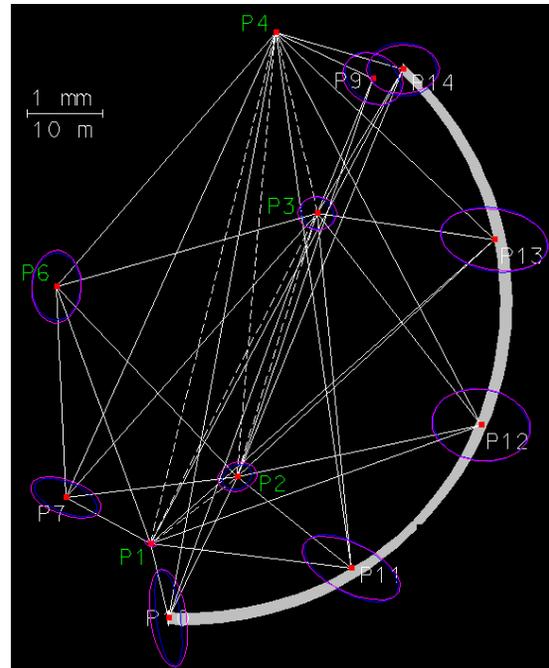


figura 4.32d. Época 1: ajustamento com direcções azimutais e com distâncias horizontais (*deficit* de característica=3): datum com constrangimentos, fixando-se o ponto P₁ e o rumo P₁-P₄ (elipses a roxo)

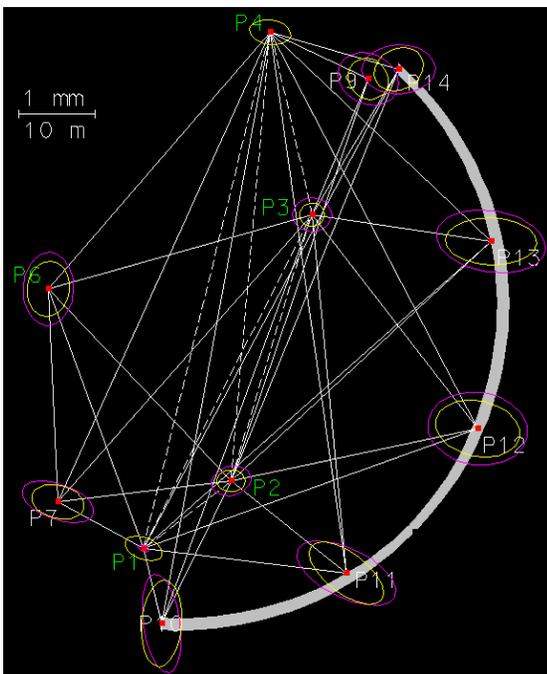


figura 4.32e. Época 1: ajustamento com direcções azimutais e com distâncias horizontais (*deficit* de característica=3): datum com traço mínimo da matriz cofactor dos parâmetros (elipses a amarelo)

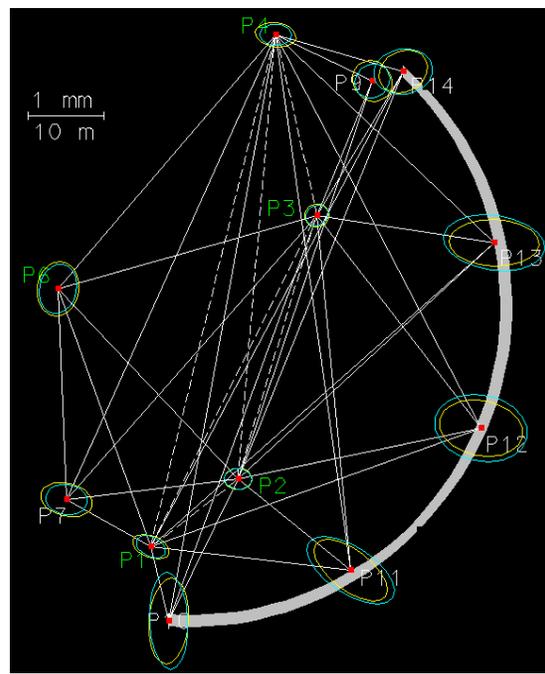


figura 4.32f. Época 1: ajustamento com direcções azimutais e com distâncias horizontais (*deficit* de característica=3): datum com minimização parcial do traço da matriz cofactor dos parâmetros (elipses a azul claro); todos os pontos de referência foram considerados na minimização parcial

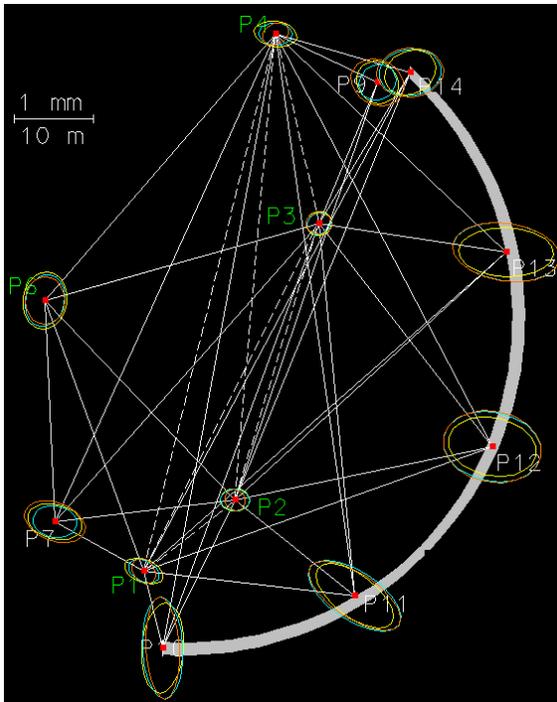


figura 4.32g. Época 1: ajustamento com direcções azimutais e com distâncias horizontais (*deficit* de característica=3): datum com minimização parcial do traço da matriz cofactor dos parâmetros (elipses a cor de laranja); todos os pontos estacionados foram considerados na minimização parcial

Repetindo um processamento análogo para a época 2, considerando primeiro apenas as observações de direcção azimutal e considerando um datum com variância nula nos pontos P₁ e P₄, a aceitação do teste de razão de variâncias só acontece quando a variância dessas observações é degradada de 0.3 mgon para 2.2 mgon, a que corresponde uma variância *a posteriori* igual a $s_0^2 = 1.4015$. Na figura 4.30a. estão desenhadas a verde as elipses de erro associadas ao processamento anterior e a encarnado as elipses de erro associadas ao mesmo processamento correspondente à época 1, sendo patente que a precisão inferior das observações da 2ª época se traduz em elipses de maiores dimensões; nessa mesma figura estão indicados a azul os vectores deslocamento obtidos por diferença entre as coordenadas ajustadas obtidas nas duas épocas, podendo observar-se que os vectores correspondentes aos pontos objecto no coroamento da barragem P₁₁, P₁₂, P₁₃ e P₁₄ são significativos pois ultrapassam a elipse de erro. Pode ainda verificar-se que o ponto P₃, embora sendo um ponto de referência, parece ter tido um deslocamento acentuado, não devendo por isso ser incluído nalgum *datum*.

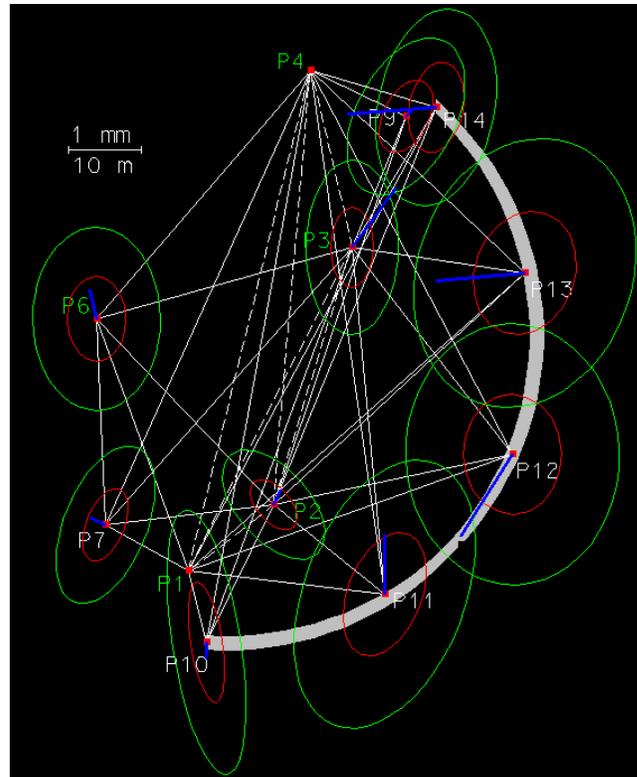


figura 4.33a. Época 2: ajustamento só com direcções azimutais (*deficit* de característica=4): datum com variância nula nos pontos P1 e P4 (elipses a verde); a encarnado indicam-se as elipses equivalentes correspondentes à época 1 (figura 4.29b); a azul indicam-se os vectores deslocamento entre as duas épocas

4.20. Observação geodésica de barragens

As barragens dividem-se, quanto ao material utilizado na sua construção, em dois tipos principais: barragens de enrocamento e barragens de betão. No primeiro caso obtêm-se diques, podendo o elemento impermeável ser constituído por um núcleo central de argila ou uma membrana de asfalto. Quanto à geometria, as barragens são divididas de acordo com o respectivo mecanismo de estabilidade, em barragens em arc, em arco-gravidade e por gravidade. As primeiras tiram partido da propriedade das estruturas em arco resistirem com facilidade a cargas uniformemente distribuídas sobre o seu dorso (figura 4.34), transmitindo-as para as respectivas ombreiras, embora para isso sejam necessárias condições de construção especiais: margens altas constituídas por rocha resistente e fundo do rio igualmente em rocha resistente (a relação entre a largura do rio no local e a altura da barragem não pode ultrapassar um factor igual a 3 ou 4). As barragens por gravidade são aquelas em que o equilíbrio estático da construção, sob a acção das forças induzidas pela carga hidrostática, é realizado pelo peso da própria estrutura, sendo a resultante transmitida através da base ao leito do rio (figura 4.35.).

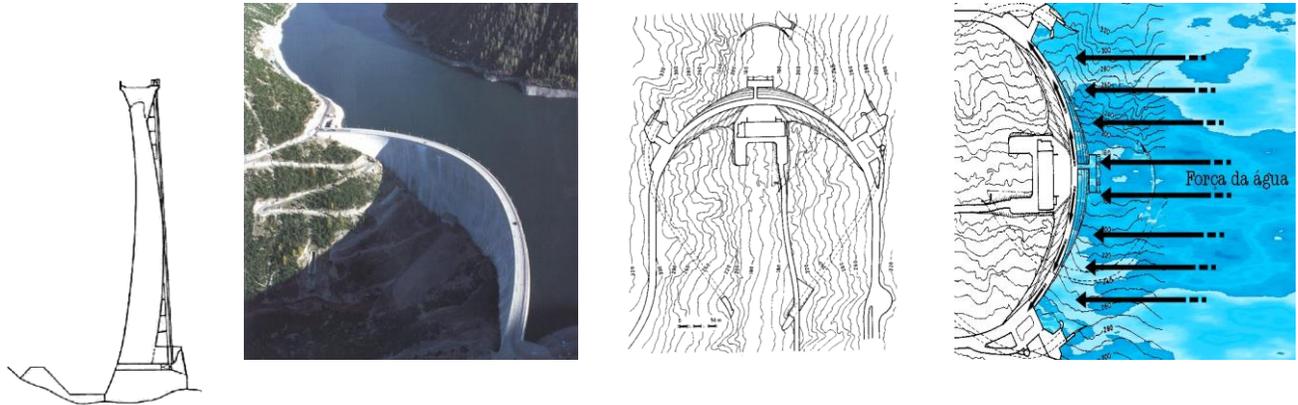


figura 4.34 Barragem em arco: as forças induzidas pela carga hidrostática são transferidas para as margens e fundo do rio

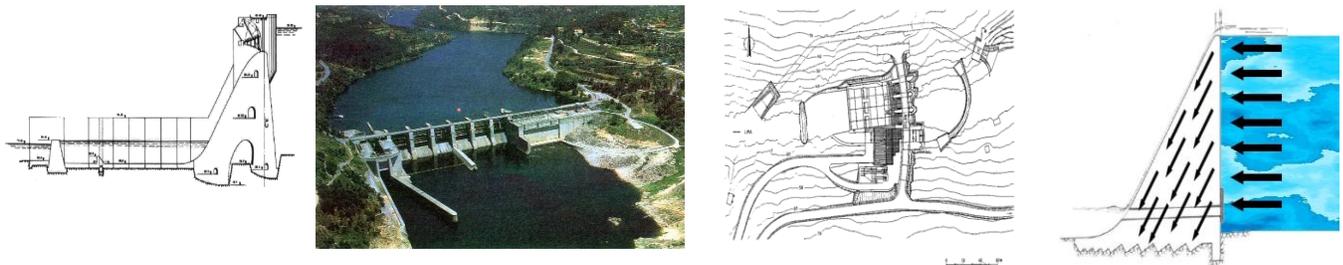


figura 4.35. Barragem por gravidade

As barragens em arco-gravidade, planimetricamente, tem a forma de arco mas funcionam num misto de barragens em arco e por gravidade, sendo as respectivas secções transversais mais espessas que as barragens em arco mas mais esbeltas do que as barragens de gravidade, sendo menos exigentes no que diz respeito ao substracto da sua construção.

De acordo com o International Committee on Large Dams (ICOLD), uma barragem é considerada de grandes dimensões quando ultrapassa 15 m de altura; as barragens cuja altura varia entre 5 e 15 m de altura e cujo reservatório tem um volume que ultrapassa 3 milhões de m^3 também são consideradas de grandes dimensões. Em Portugal existem 191 grandes barragens, 40% das quais são de betão ou de aterro e 60% são barragens de enrocamento.

As barragens de grandes dimensões são estruturas que necessitam de um rigoroso trabalho de monitorização ao longo da sua vida útil de forma a detectar e prevenir eventuais roturas, que poderiam ter consequências desastrosas. Este controlo baseia-se na análise do comportamento estrutural, a partir da observação de um conjunto de variáveis que descrevem a relação entre as acções que incidem sobre as obras – força da gravidade, temperatura, carga hidrostática, etc. – e a resposta estrutural correspondente – deslocamentos, deformações, tensões, etc. -, tendo em atenção as propriedades dos materiais usados na sua construção (betão, aterro de enrocamento, etc.). A análise a efectuar consiste na observação e processamento de um conjunto

discreto representativo de pontos da estrutura. Os métodos geodésicos para a observação de barragens podem basear-se em redes planimétricas (redes bidimensionais, utilizando triangulação e/ou trilateração para a detecção das componentes horizontais dos deslocamentos) e altimétricas (linhas e redes de nivelamento geométrico e/ou trigonométrico para a determinação da componente vertical dos deslocamentos) locais ou em redes tridimensionais para a determinação simultânea das componentes verticais e horizontais dos deslocamentos. Alguns inconvenientes dos métodos geodésicos estão relacionados com a necessidade de condições atmosféricas favoráveis, a utilização de pessoal especializado e com a duração das campanhas de observação e complexidade do processamento dos dados.

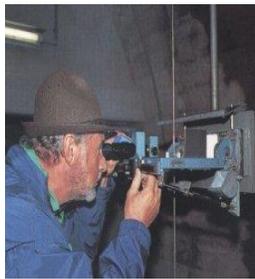
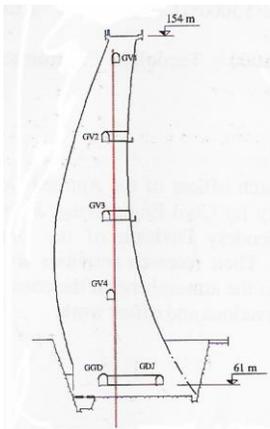


figura 4.36. Fio de prumo

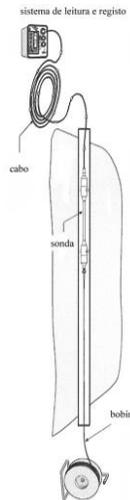


figura 4.37. Inclinómetro

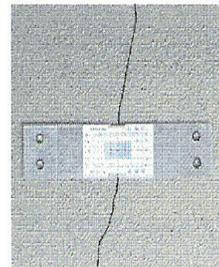


figura 4.38. Fissurómetro

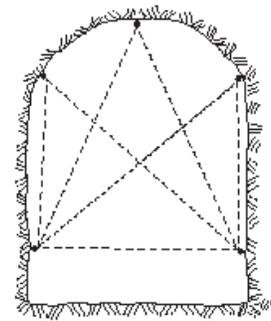


figura 4.39. Extensómetro

Alternativamente, podem ser utilizados equipamentos fixos como fios de prumo (figura 4.36.) e varas de fundação, nas barragens de betão, inclinómetros (figura 4.37.), nas barragens de aterro ou fissurómetros (figura 4.38.). Os inclinómetros medem o ângulo de inclinação relativamente à vertical, sendo instalados em furos que atravessam a zona a monitorizar; o ângulo medido devido ao movimento da estrutura é convertido em desvios laterais; os extensómetros detectam variações em distância entre pontos (figura 4.39), variações essas associadas a tensões estruturais. A grande vantagem dos métodos geodésicos consiste em permitir o controlo global dos deslocamentos de toda a estrutura, da fundação e do terreno envolvente, ao invés dos outros métodos, mais localizados.

A maior limitação à precisão dos resultados obtidos com os métodos geodésicos é devida à refração atmosférica e à sua variação durante os períodos de observação (figura 4.40.). O seu efeito consiste na introdução de curvatura e torsão na trajetória das ondas electromagnéticas e variação da sua velocidade de propagação e tem como consequência um desvio, por vezes muito significativo, nos valores das grandezas observáveis (direções verticais e azimutais e distâncias) que pode degradar acentuadamente os resultados.



figura 4.40. O vapor de água resultante da descarga da barragem afecta o percurso óptico entre os pontos estação e visado

Os pontos da rede de monitorização podem classificar-se em pontos objecto (aqueles cujo deslocamento é uma variável de controlo), pontos de referência (aqueles que se destinam a constituir o quadro de referência e cuja posição pode ser considerada fixa ao longo do tempo ou cujos deslocamentos podem ser determinados por outros métodos) e pontos auxiliares (aqueles que se destinam a reforçar a configuração geométrica do sistema).

Nas barragens de betão, as tolerâncias impostas para os erros (1 mm em planimetria e 0.2 mm em altimetria) obrigam a utilizar uma combinação de linhas ou redes de nivelamento geométrico de precisão com redes horizontais para a determinação para a determinação das componentes vertical e horizontais dos deslocamentos. A medição de ângulos azimutais é em geral preferida à medição de distâncias devido ao menor custo do equipamento e maior rapidez de operação; o recurso a poligonais tridimensionais de precisão no interior das galerias de visita permite obter resultados de grande precisão. Em barragens de aterro, as tolerâncias maiores (1 a 2 mm em planimetria e altimetria) permitem o recurso a redes tridimensionais (direcções verticais, ângulos azimutais e distâncias) para a determinação simultânea das componentes horizontais e verticais dos deslocamentos.

O equipamento de medição utilizado em barragens de betão consiste em níveis automáticos com micrómetro óptico e miras de apoio inferior ou superior com fios de invar, teodolitos electrónicos com resolução de 1 dmgon e compensação automática do desvio do eixo principal relativo à vertical, distanciómetros de precisão, com uma equação de erro instrumental da ordem de $0.2 \text{ mm} + 0.2 \text{ ppm}$. Como as antenas do sistema GPS não podem ser estacionadas na maioria dos pontos objectos das barragens e atendendo à forma dos vales onde se encontram construídas as barragens, que limita a possibilidade de recepção dos sinais dos satélites, não são geralmente utilizados equipamentos GPS na monitorização de barragens. Nas barragens de aterro são utilizados níveis automáticos numéricos e miras com escala de código de barras, em invar, distanciómetros com uma equação de erro instrumental da ordem de $1 \text{ mm} + 1 \text{ ppm}$. Os distanciómetros topográficos não têm demonstrado um comportamento satisfatório para este tipo de aplicações (a necessidade de aferição frequente torna a sua utilização onerosa), sendo o recurso a distanciómetros de precisão aconselhável. O registo dos parâmetros atmosféricos (temperatura, pressão e humidade) é indispensável para a correcção das distâncias.

Como exemplo da utilização do método geodésico para a monitorização de uma barragem de betão, veja-se o caso da barragem de Montsalvens, na Suíça, observada pela primeira vez em 1921. O princípio consistiu na selecção de uma base fixa a partir da qual foram determinadas as posições por intersecção directa de pontos no paramento da barragem; este dispositivo desenvolveu-se e foi melhorando ao longo dos anos, graças a experiências efectuadas sobre o carácter e a extensão dos movimentos da barragem e do terreno circundante. Um terceiro pilar colocado aproximadamente a meio da base inicial permitiu verificar e melhorar a determinação da posição dos pontos objecto; paralelamente, as observações sucessivas revelaram que, embora cravados na rocha, os pilares de observação, sob influência da pressão da bacia de enchimento, sofreram deslocamentos que tinham que ser tomados em consideração. Para poder determinar estes deslocamentos da rede de monitorização, foi necessário incluir um sistema secundário situado no exterior da zona de pressão, compreendendo pilares de controlo fixados na rocha.

As diferenças nas direcções entre os pilares e as marcas cravadas no coroamento da barragem observadas entre duas épocas consecutivas permitem calcular as componentes dos deslocamentos perpendicularmente à direcção visada. Estando as bases iniciais fixas, os valores obtidos para os deslocamentos dos pontos objecto têm um carácter absoluto. As primeiras observações foram efectuadas durante a construção da barragem; foi assim possível determinar as deformações espaciais da barragem durante o primeiro enchimento, o que tem um interesse essencial para o construtor. Numa primeira fase compreendendo alguns anos consecutivos, repetiram-se as séries de observações para o estudo da deformação da estrutura em função das variações do nível da albufeira até se ter constatado que a barragem tinha adquirido o seu estado definitivo de elasticidade. A partir daí, as observações efectuadas a título de controlo puderam ser longamente espaçadas. Para a obtenção de resultados rigorosos, estas direcções devem estar relacionadas com direcções para pontos afastados de forma que o erro da orientação devido a eventuais movimentos dos pilares seja negligenciável relativamente a erros de observação. Apenas um teodolito de precisão, um T3, pôde ser utilizado, conjuntamente com um sistema de centragem forçada (figura 4.41.). As marcas materializando os pontos objecto no paramento da barragem devem prestar-se a observações planimétricas e altimétricas e devem poder resistir às intempéries, evitando desta forma a respectiva substituição. A precisão de uma direcção medida (2 séries) pode considerar-se igual a $\pm 0''.5$ (sexagesimais), o que corresponde a um valor linear de ± 0.24 mm para uma visada de 100 m de comprimento. A alta precisão dos ângulos verticais (as variações altimétricas podem ser determinadas aproximadamente com precisão das variações planimétricas) é muito importante pois a maior parte dos pontos objecto não pôde ser nivelada directamente. Para as medições efectuadas com o T3, apenas devem ser utilizados pilares de betão cravados na rocha, em geral com uma secção de 50 cm por 50 cm e uma altura de 1.20 m; para a centragem ser rigorosa, o eixo da peça onde encaixa a rótula de centragem do teodolito deve estar rigorosamente vertical.

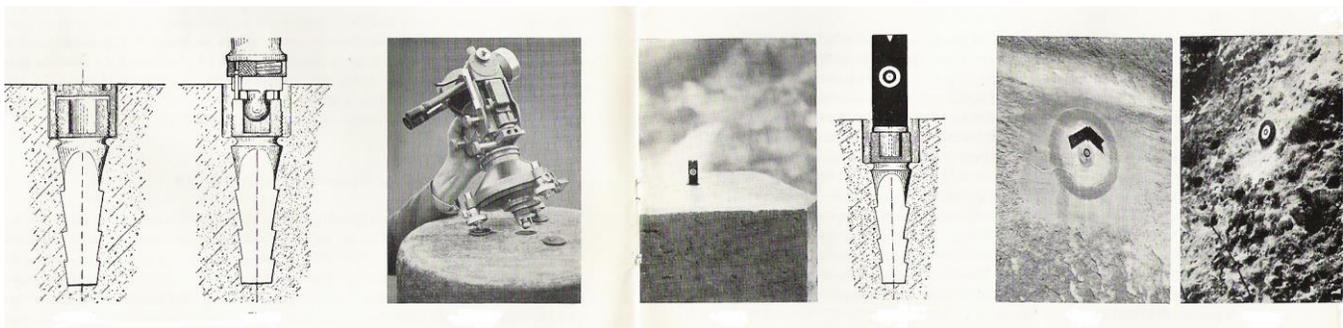


figura 4.41. Centragem forçada nos pilares de observação para aparelho (T3) e alvos e pontos objecto na barragem

Foi utilizado o método dos giros do horizonte e de cada pilar foram observados, em cada giro, as marcas de referência, restantes pilares e o conjunto dos pontos objecto. A referenciação dos pilares compreendeu os pontos a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p situados nas encostas estáveis a jusante e a montante da barragem, se possível fora da zona submetida à pressão exercida pela massa de água. Estes pontos serviram para a orientação rigorosa das séries de observações (figura 4.42.).

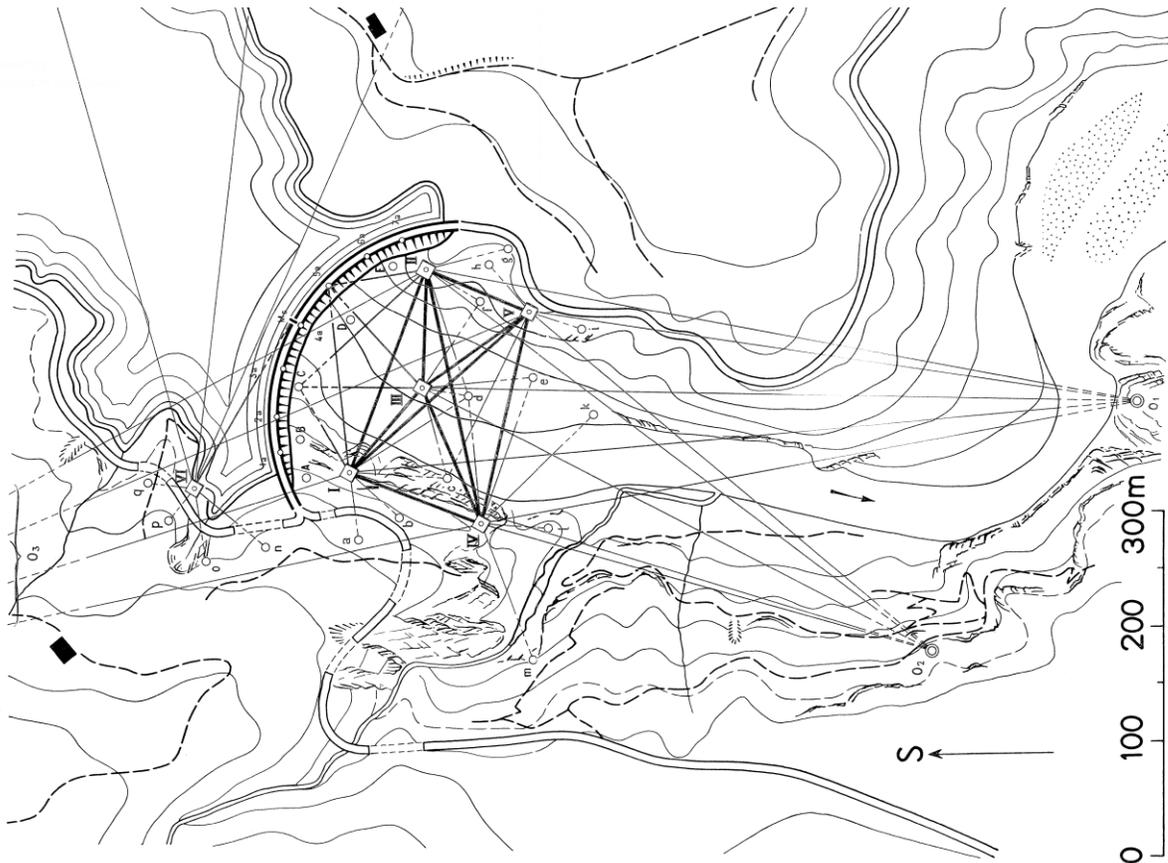


figura 4.42. Plano de observações para a aplicação do método geodésico de monitorização da barragem

Os pontos objecto no paramento da barragem estão dispostos em faixas horizontais e verticais (figuras 4.43. e 4.44.); a distância entre estes pontos é seleccionada em função do número de blocos utilizados na construção e da respectiva distribuição, não devendo ser muito grande para que a as linhas de deformação da barragem não apresentem descontinuidades (figuras 4.45. e 4.46.).

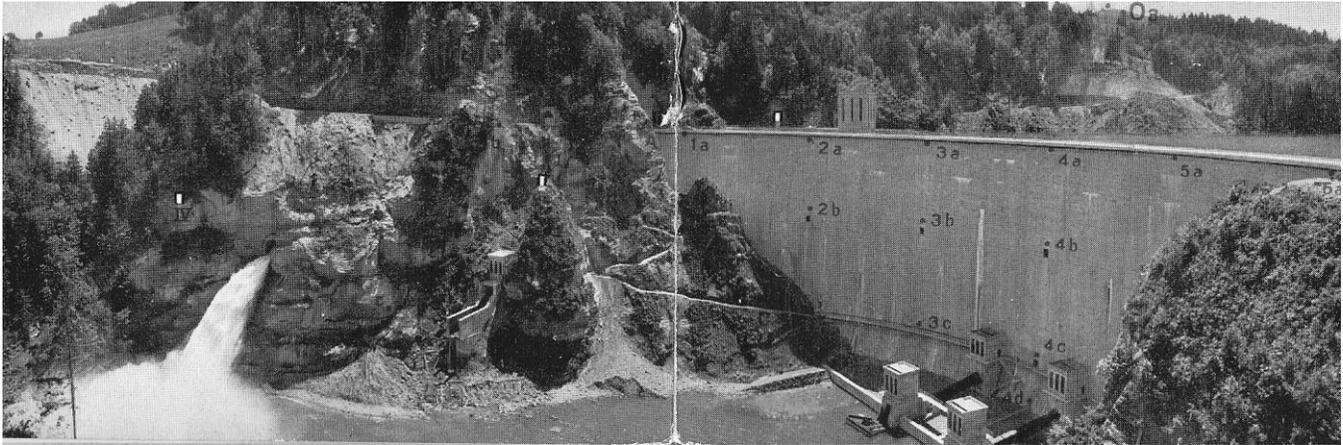


figura 4.43. Localização dos pontos objecto no paramento da barragem

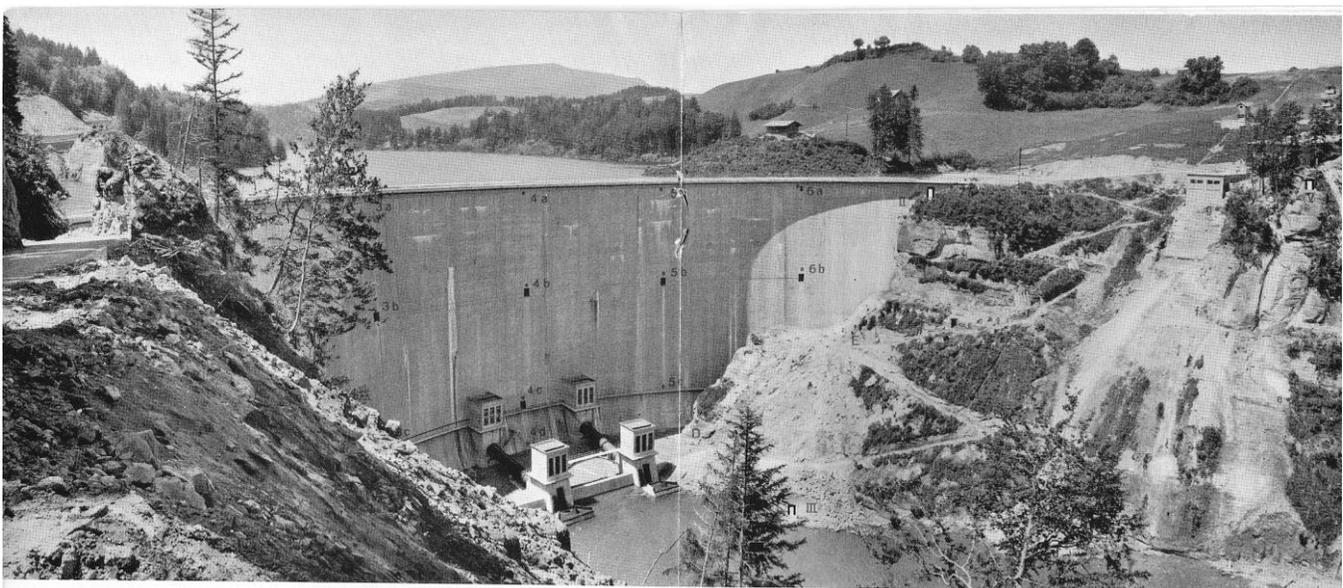


figura 4.44. Localização dos pontos objecto no paramento da barragem

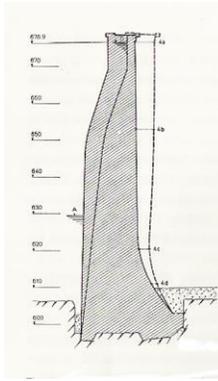


figura 4.45. Deformação horizontal do perfil da barragem entre as épocas A e D

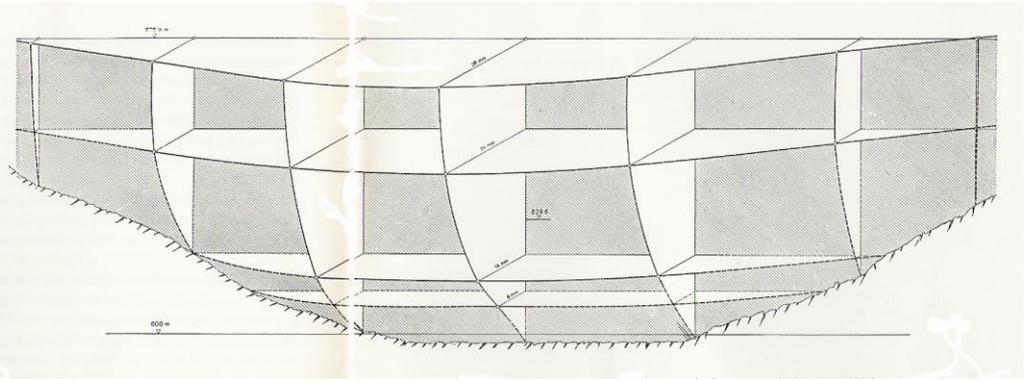


figura 4.46. Deformação da barragem entre a época inicial A (cota da bacia=629.6 m) e a época D (cota da bacia=676.9 m)

As leituras angulares devem ser efectuadas durante as primeiras horas da manhã e ao final da tarde, de modo a evitar os períodos em que os gradientes térmicos do ar são mais acentuados. A localização dos pilares deve ser determinada em conjunto com um técnico de geotecnia pois o terreno onde esses pontos vão ser instalados deve ser sólido e estável. Em torno dos pilares deve existir uma manilha de fibrocimento para o proteger da incidência directa dos raios solares.

As variações altimétricas dos pontos da barragem são em geral tão pequenas que apenas são detectadas através de nivelamento geométrico de precisão. As marcas de nivelamento utilizadas devem estar fora da zona de pressão, daí que também apenas com nivelamento de precisão é possível reduzir a acumulação de erros que se verifica em distâncias grandes. A parte da barragem mais facilmente acessível ao nivelamento é o respectivo coroamento.

4.21. Observação geodésica de túneis

Os túneis são utilizados nas ligações rodoviárias e ferroviárias de forma a ultrapassar montanhas ou massas de água, mantendo um gradiente vertical aceitável. As redes de apoio são estabelecidas à superfície de forma a ligar as extremidades do túnel, através de poligonais ou redes de triangulação, permitindo a realização do projecto (figura 4.47.). No caso de túneis longos, podem ser escavados poços intermédios para fornecer acesso a materiais, ventilação e verificação do alinhamento do eixo.

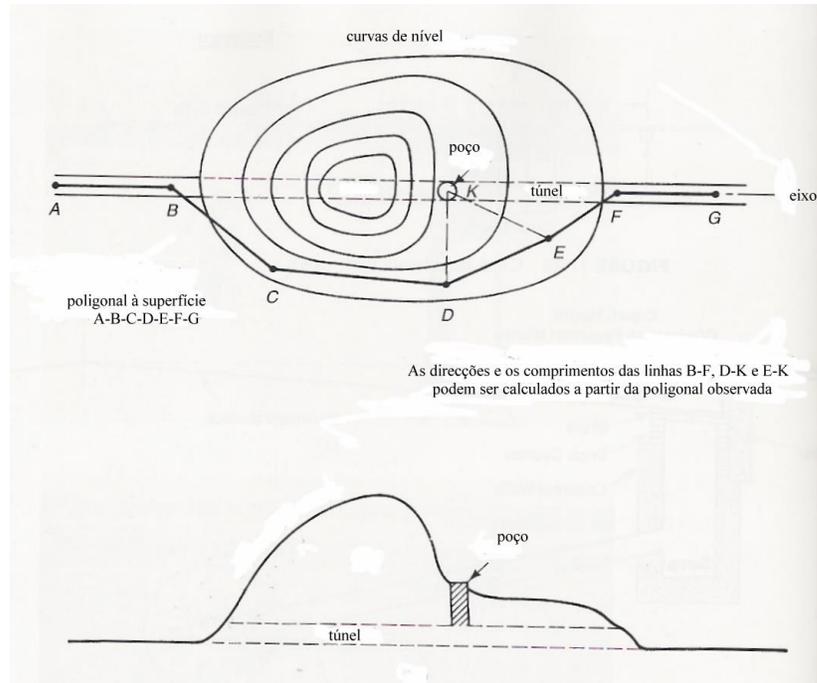


figura 4.47. Planta e perfil de um túnel

Geralmente o eixo é materializado no topo da galeria ou nas paredes laterais, como se indica na figura 4.48., sendo necessária uma vigilância constante para evitar erros na respectiva localização

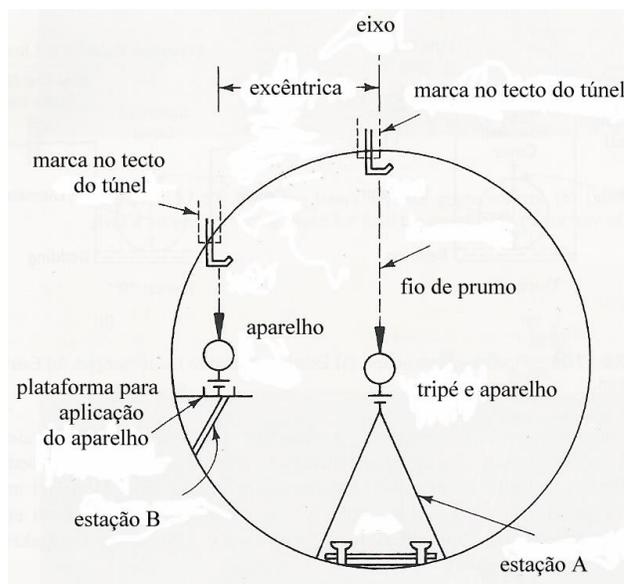


figura 4.48. O eixo do túnel é normalmente materializado no topo da galeria (estação A); quando isso não é possível, pode materializar-se uma estação na parede da galeria (estação B)

Os dois túneis ferroviários com 7.6 m de diâmetro, encontram-se a uma distância de 15 m de um túnel central de serviço, com 4.8 m de diâmetro, utilizado em situações de emergência e para manutenção (figura 4.51.); a intervalos de 375 m, existem ligações entre os 3 túneis para compensação das ondas de pressão geradas pelo movimento dos comboios. O túnel central foi escavado com um avanço entre 2 a 7 km relativamente aos túneis restantes.

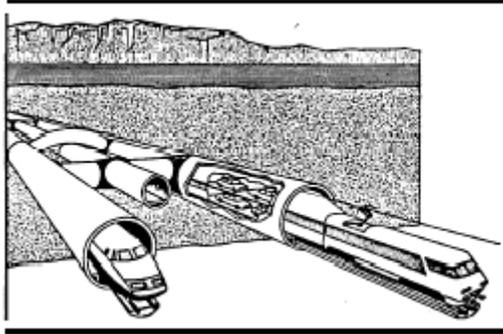


figura 4.51. Representação esquemática dos túneis sob o canal da Mancha

A influência da refração horizontal na observação de poligonais é mostrada com os resultados de duas campanhas efectuadas no lado inglês; a primeira, observada em Março de 1989, pretendeu verificar 6 km do túnel, conforme se pode verificar na figura 4.52.; os pontos C_1 , C_2 e F são pilares de betão que pertencem à rede estabelecida entre Inglaterra e França especificamente para este trabalho; os pontos $A2/1$ e $A2/2$ são pilares no poço, enquanto que os restantes pontos estão materializados na parede do túnel.

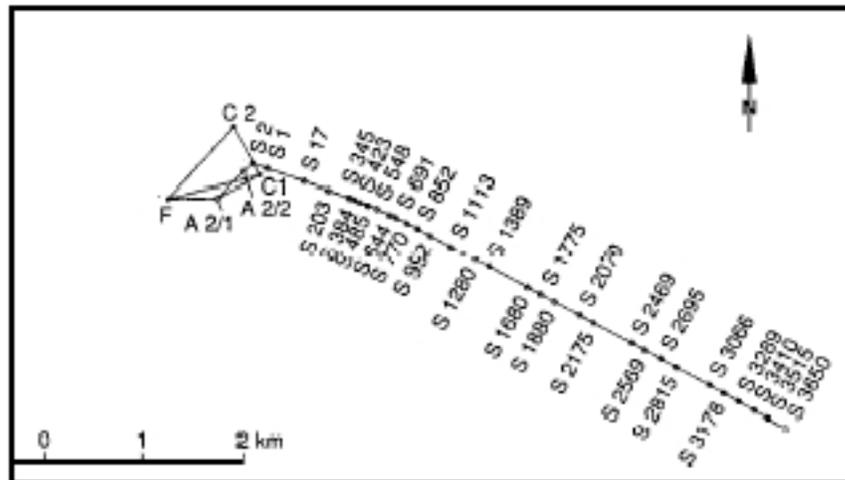


figura 4.52. Verificação de uma poligonal

As paredes do túnel estão preenchidas por diversas condutas e cabos, o que dificultou os trabalhos topográficos. Foram incorporadas na parede do túnel conjuntos de 3 ranhuras para serem utilizadas como centragem forçada para as bases dos instrumentos utilizados nas observações. A posição alternada destes dispositivos dos lados direito e esquerdo do túnel deu origem a uma poligonal em zig-zag, tendo sido utilizado um Wild T2002 em combinação com o distanciómetro Wild DI2000.

Para a determinação dos rumos utilizou-se o giroscópio Gyromat, com o procedimento seguinte: efectuaram-se observações recíprocas do rumo entre cada dois pontos da poligonal, medindo o rumo duas vezes em cada estação, de tal forma que o ângulo de refração se obtinha como está indicada na figura 4.53.:

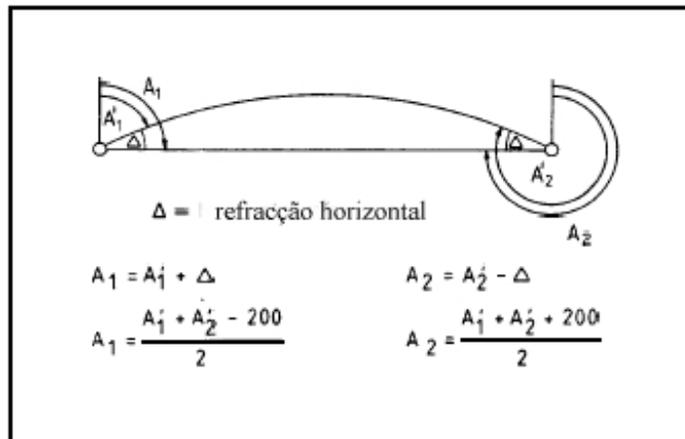


figura 4.53. Observações recíprocas do rumo com giroscópio

A tabela 4.16. indica os rumos de cada visada após o ajustamento da poligonal, com e sem a inclusão das observações dos rumos determinados com o giroscópio. As diferenças entre os rumos obtidos a partir do transporte das observações angulares e através do giroscópio estão indicadas na coluna (3), enquanto que a última coluna mostra o desvio angular entre as duas poligonais. As diferenças entre as duas poligonais verificam-se sobretudo na parte inicial do túnel, entre os km 1.0 e o km 3.5, onde se observa uma curva pronunciada para a direita.

From	To	Bearing after with GYROMAT (1)	adjustment without GYROMAT (2)	Diff. (1)-(2) [mgon] (3)	Length of Traverse [km] (4)	Swing [mm] (5)
A2/1	A2/2 *	49.4450	49.4457	-0.7	0.372	3
A2/2	MTS2 *	56.5071	56.5080	-0.9	0.499	4
MTS2	MTS1 *	122.8067	122.8074	-0.7	0.655	6
MTS1	17	119.8158	119.8155	+0.3	1.042	4
17	203	121.4786	121.4774	+1.2	1.302	3
203	345	120.8653	120.8631	+2.2	1.516	10
345	384 *	128.1011	128.0979	+3.2	1.575	12
384	423	119.5116	119.5079	+3.7	1.634	16
423	485	127.8503	127.8461	+4.2	1.728	22
485	548	123.1891	123.1844	+4.7	1.822	29
548	644	128.8531	128.8478	+5.3	1.967	41
644	691	124.4496	124.4437	+5.9	2.038	48
691	770 *	131.4425	131.4360	+6.5	2.158	60
770	852	128.4224	128.4145	+7.9	2.280	75
852	952	133.2877	133.2783	+9.4	2.431	97
952	1113	130.6273	130.6165	+10.8	2.673	138
1113	1280 *	132.7052	132.6930	+12.2	2.924	187
1280	1389 *	130.0523	130.0395	+12.8	3.088	220
1389	1680 *	132.2658	132.2527	+13.1	3.526	310
1680	1775 *	129.8136	129.8003	+13.3	3.669	340
1775	1880 *	133.3176	133.3037	+13.9	3.827	374
1880	2070 *	130.7208	130.7062	+14.6	4.113	440
2070	2175 *	133.3090	133.2939	+15.1	4.271	477
2175	2469 *	131.0435	131.0287	+14.8	4.713	580
2469	2569 *	133.3729	133.3580	+14.9	4.863	615
2569	2695 *	130.2317	130.2162	+15.5	5.052	661
2695	2815 *	133.0986	133.0822	+16.4	5.232	708
2815	3066 *	130.9558	130.9387	+17.1	5.609	809
3066	3178 *	133.2237	133.2060	+17.7	5.777	856
3178	3289 *	130.1029	130.0851	+17.8	5.944	903
3289	3410 *	131.6857	131.6682	+17.5	6.126	953
3410	3515	131.6927	131.6749	+17.8	6.284	988
3515	3650 *	131.6781	131.6605	+17.6	6.487	1052

* traverse line with gyro-measurements

tabela 4.16. Rumos de cada visada após o ajustamento da poligonal

A segunda campanha foi efectuada entre Dezembro/1989 e Janeiro/1990, quando não estavam a decorrer outros trabalhos no túnel, permitindo que a poligonal fosse observada ao longo do eixo do túnel. Para o efeito foram colocadas peças de centragem forçada na base de betão do túnel, obtendo-se os valores da tabela 4.17.:

From	To	Bearing after adjustment with GYROMAT (1)	Bearing after adjustment without GYROMAT (2)	Diff. (1)-(2) [mgon] (3)	Length of Traverse [km] (4)	Swing [mm] (5)
A2T	A2H	50.9911	50.9911	0	0.496	0.2
A2H	ENT *	120.4663	120.4664	-0.1	0.762	0.3
ENT	T5 *	120.7411	120.7411	0	1.031	0.3
T5	171	120.4814	120.4812	0.2	1.255	0.5
171	296	121.4060	121.4056	0.4	1.443	1.7
296	436	123.5396	123.5390	0.6	1.654	3.8
436	568 *	125.7719	125.7711	0.8	1.855	6.5
568	709	127.6997	127.6987	1.0	2.066	9.8
709	859	130.1423	130.1411	1.2	2.292	14.1
859	1018	131.6562	131.6548	1.4	2.531	19.2
1018	1294 *	131.6672	131.6657	1.6	2.946	29.3
1294	1548	131.6636	131.6618	1.8	3.328	39.9
1548	1827	131.6631	131.6605	2.6	3.748	52.8
1827	1982	131.6358	131.6336	2.3	3.901	61.1
1982	2095 *	131.6327	131.6302	2.5	4.151	67.7
2095	2234	131.6988	131.6963	2.5	4.360	75.8
2234	2369	131.5948	131.5923	2.5	4.563	83.8
2369	2498	131.6456	131.6432	2.4	4.756	91.2
2498	2622 *	131.6204	131.6179	2.5	4.943	98.5
2622	2868	131.6293	131.6268	2.5	5.312	113.0
2868	3121	131.6624	131.6599	2.5	5.693	128.2
3121	3270 *	131.6767	131.6741	2.6	5.916	137.2
3270	3410	131.6813	131.6788	2.5	6.127	145.4
3410	3682	131.6758	131.6734	2.4	6.536	160.8
3682	3850	131.6875	131.6852	2.3	6.787	169.9
3850	4036 *	131.6758	131.6737	2.1	7.068	179.0
4036	4297	131.6532	131.6514	1.8	7.461	189.9
4297	4441 *	129.5053	129.5038	1.5	7.677	195.0
4441	4584	126.1020	126.1006	1.4	7.893	199.7
4584	4728	127.2179	127.2165	1.4	8.109	204.4
4728	4868 *	130.6272	130.6259	1.3	8.319	208.6
4868	5008	133.9648	133.9635	1.3	8.530	212.9
5008	5139	137.1472	137.1458	1.4	8.727	217.1
5139	5279	136.4768	136.4754	1.4	8.938	221.7
5279	5419 *	133.1197	133.1182	1.5	9.148	226.6
5419	5546	131.6845	131.6829	1.6	9.339	231.1
5546	5722	131.6909	131.6894	1.5	9.412	237.6
5722	5857	131.6809	131.6793	1.6	9.615	242.9
5857	5994 *	132.5372	132.5355	1.7	9.821	248.4
5994	6136	134.6789	134.6769	2.0	10.035	254.9
6136	6268 *	136.8510	136.8488	2.2	10.234	261.7
6268	6412	139.0447	139.0422	2.5	10.447	270.0
6412	6558 *	141.3381	141.3354	2.7	10.670	279.4
6558	6705	143.7011	143.6979	3.2	10.890	290.3
6705	6846 *	145.9892	145.9856	3.6	11.103	302.0
6846	6985	147.6905	147.6865	4.0	11.312	314.8
6985	7187 *	147.8379	147.8336	4.3	11.615	334.9
7187	7392	147.8528	147.8482	4.6	11.924	356.5
7392	7574 *	147.8278	147.8230	4.8	12.198	376.6
7574	7725	147.8456	147.8406	5.0	12.425	393.9
7725	7903 *	147.8596	147.8542	5.4	12.692	416.6
7903	8050	147.8313	147.8250	6.3	12.913	437.9
8050	8222 *	147.8339	147.8270	6.9	13.172	465.9
8222	8396	147.8538	147.8466	7.2	13.433	495.0
8396	8544 *	147.8352	147.8278	7.4	13.656	520.7

* traverse line with gyro-measurements

tabela 4.17. Rumos de cada visada após o ajustamento da poligonal

As diferenças entre os rumos obtidos por transporte das observações angulares e os rumos obtidos a partir da utilização de giroscópios no caso da tabela 4.21. são cerca de oito vezes inferiores ao caso anterior, devendo-se este facto à influência da refração horizontal, cuja influência é muito mais reduzida na parte central da galeria do que junto às respectivas paredes.

4.22. Observação geodésica de pontes

Os elementos fundamentais de uma ponte são a subestrutura e a superestrutura. Esta última é constituída, basicamente, pelo tabuleiro, enquanto que a primeira é formada pelos apoios nas margens e pelos pilares (figura 4.54.):

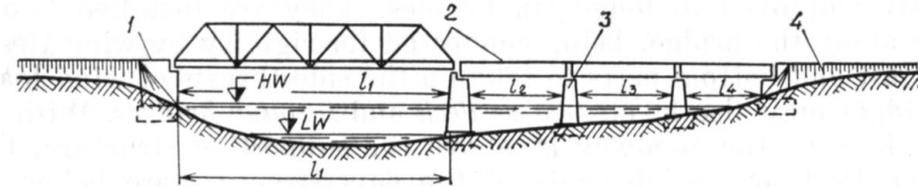


figura 4.54. Elementos fundamentais de uma ponte

De acordo com a carga que podem suportar, as pontes dividem-se em 4 tipos principais:

- ponte de vigas: este tipo de ponte é constituído por uma sucessão de pilares, que formam vãos curtos, unidos através de vigas (figura 4. 55.); sob o efeito da carga, o tabuleiro sofre uma curvatura e transfere apenas a componente vertical da força aplicada para os apoios.

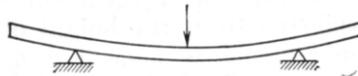


figura 4.55. Ponte de vigas

- ponte em arco: este tipo de ponte é utilizado para ultrapassar vãos mais longos, quando não é possível construir pilares intermédios e quando existe um substrato rochoso sólido (figura 4.56.); a carga comprime o arco, que dobra, transmitindo aos apoios laterais as componentes vertical e horizontal da força aplicada.

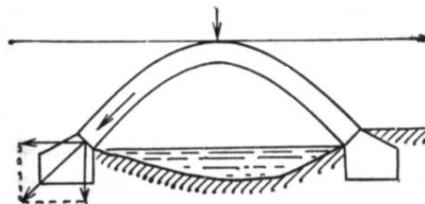


figura 4.56. Ponte em arco

- ponte em armação: neste tipo de ponte, a subestrutura e a superestrutura estão integradas numa estrutura rígida, que transfere a carga do tabuleiro para os suportes (figura 4.57.):

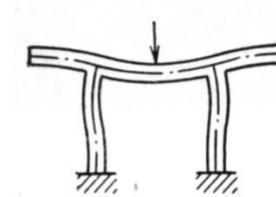


figura 4.57. Ponte em armação

- ponte suspensa: este tipo de ponte é utilizado quando se pretende ultrapassar vãos muito longos (figura 4.58.); o tabuleiro está suspenso pelos cabos verticais, que por sua vez estão presos num cabo que, firmemente preso nas duas extremidades, passa por cima dos pilares, formando um arco.

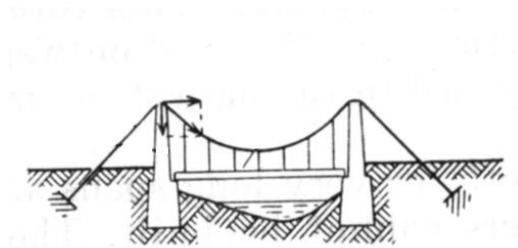


figura 4.58. Ponte suspensa

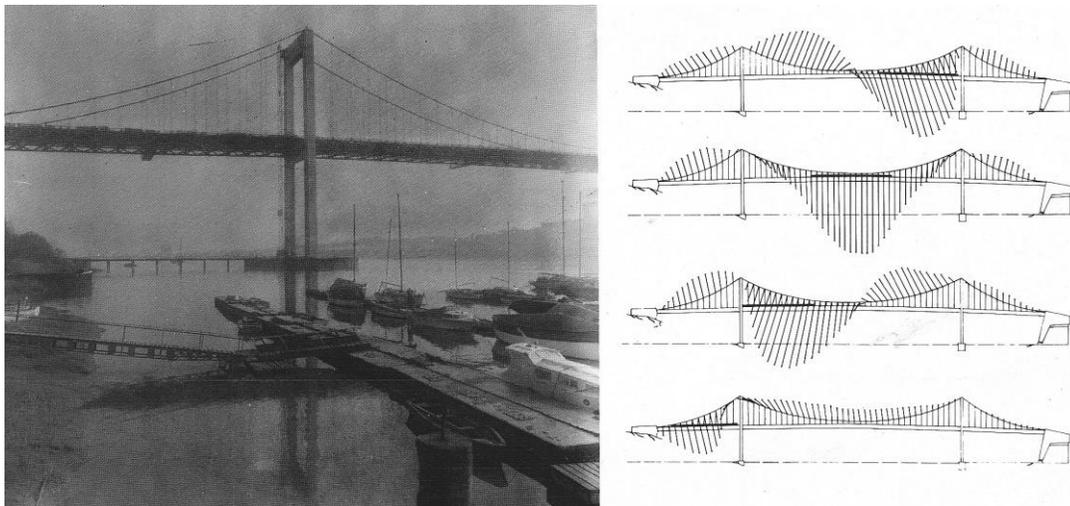


figura 4.59. Ensaio de carga numa ponte, indicando-se a deformação do cabo suspenso em função da posição da carga

A principal regulamentação no caso da monitorização de pontes é a norma DIN 1076, de Novembro de 1999 que, por exemplo, exige que:

- após a conclusão da obra, devem ser efectuadas vistorias que incluem a fixação de marcas na estrutura e a observação da posição relativa desses pontos
- o abatimento e a rotação das fundações estruturais deve ser verificado de seis em seis anos
- no caso de serem detectadas alterações geométricas na estrutura durante as vistorias regulares, é necessário efectuar comparações com as observações originais para a determinação de deslocamentos horizontais e verticais

Os testes referidos são normalmente efectuados através de nivelamento geométrico, o que implica a existência de marcas de nivelamento na vizinhança da ponte em questão; o abatimento é testado relativamente a essas marcas de nivelamento, a rotação é testada por diferença de cotas entre marcas nos vários pilares e o gradiente do tabuleiro é testado por determinação das cotas das cavilhas ao longo da superestrutura. Este método tem algumas desvantagens, como sejam a manutenção das marcas na estrutura ao longo do tempo ou a necessidade da interrupção do tráfego durante a realização das observações.

Como alternativa, pode utilizar-se um método para a determinação da deformação da estrutura por comparação da forma entre duas épocas distintas em vez da determinação do movimento de pontos isolados.

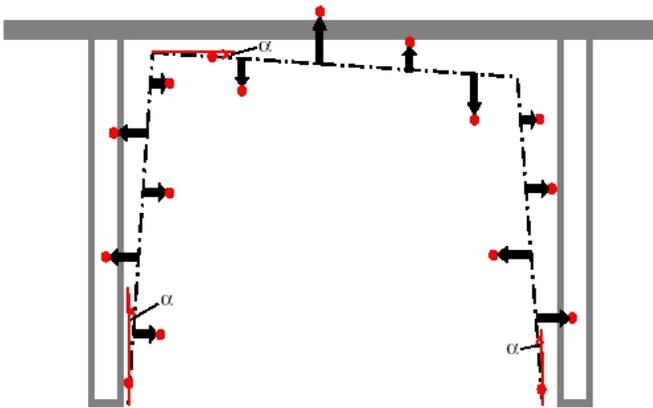


figura 4.60. Determinação da deformação por comparação da forma

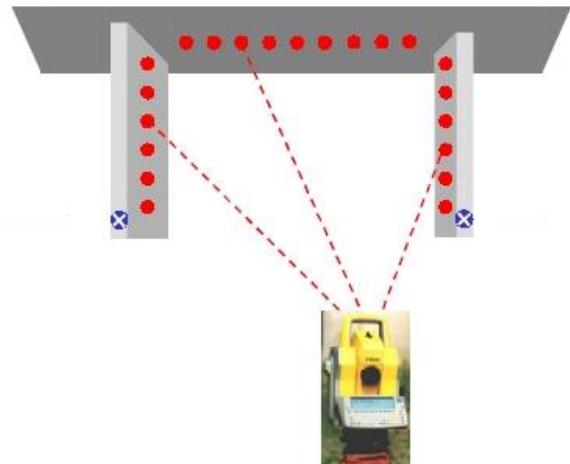


figura 4.61. Observação de perfis com estação total

Para o efeito, utiliza-se uma estação total para a observação de perfis, o que tem vantagens quanto ao tempo de observação e também por não ser necessário interromper o tráfego na ponte.

A ponte sobre o “Klosterweg” está localizada entre as cidades de Karlsruhe e Stuttgart, no sudoeste da Alemanha, na autoestrada A8. A ponte, de betão pré-esforçado, tem um comprimento de 260 m e uma largura de 35 m, com 6 faixas de rodagem. O plano vertical da ponte (e o comprimento das sete vigas), a secção transversal de um pilar e uma perspectiva da ponte estão ilustrados nas figuras 4.62. e 4.63.:

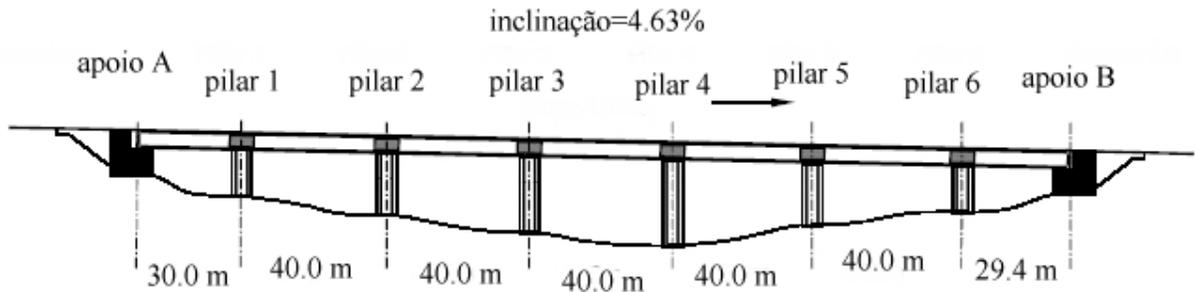


figura 4.62.

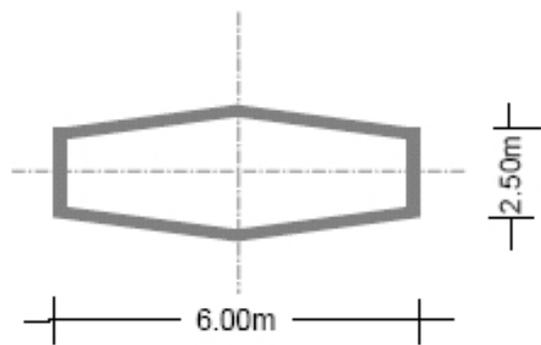
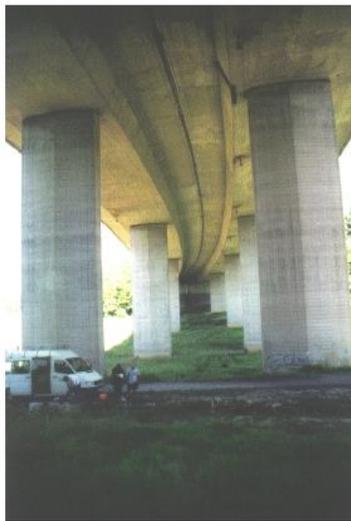


figura 4.63.

A tabela 4.18. consta da norma DIN 1076 e indica, para cada tipo de deformação, o respectivo procedimento a seguir:

Nº	Deformação	Procedimento
1	Deslocamento dos pilares e dos apoios	Utilizar marcas na estrutura, estacionamento livre e testes estatísticos do movimento dos pontos
2	Inclinação dos pilares	Utilizar estações livres, efectuar perfis com estação total para comparação da forma
3	Deformação da superestrutura	Utilizar estações livres, efectuar perfis com estação total para comparação da forma

Tabela 4.18.

Bibliografia:

Desenho técnico. Luis Veiga da Cunha. FCG

GPS Satellite Surveying, Alfred Leick, John Wiley & Sons

Observations and Least Squares, Edward Mikhail, University Press of America

Control Surveys in Civil Engineering, M. A. R. Cooper, Collins Professional and Technical Books

Adjustment Computations, Paul Wolf, Charles, Guilani, Wiley Series in Surveying and Boundary Control

Concepts of Network and Deformation Analysis, W.F. Caspary, Monograph 11, School of Surveying, Univ. New South Wales, Kensington, Australia

The Geodetic Surveying Methods in the Monitoring of Large Dams in Portugal, J. Casaca, M. J. Henriques

Monitoring Displacements at Large Dams by Means of Precision Traverses, M. J. Henriques, J. Casaca

Exercícios:

1. Tendo sido medidas as distâncias $\ell_A = 360.50 \pm 0.05$ m, $\ell_B = 250.10 \pm 0.05$ m, $\ell_C = 223.50 \pm 0.05$ m do ponto P para os pontos A, B, C de coordenadas conhecidas, obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas (X,Y) do ponto P, supondo $(X_A, Y_A) = (300, 300)$, $(X_B, Y_B) = (600, 250)$, $(X_C, Y_C) = (800, 400)$.

2. O posicionamento do ponto P é obtido a partir dos pontos A e B, em que se mediram os 3 ângulos azimutais $\alpha = 60^\circ 00' 20'' \pm 10''$, $\beta = 45^\circ 00' 20'' \pm 10''$, $\gamma = 75^\circ 00' 06'' \pm 10''$ e a distância $BP = 272.713 \pm 0.02$ m. Obtenha as coordenadas ajustadas por mínimos quadrados do ponto P, supondo $(X_A, Y_A) = (300, 300)$, $(X_B, Y_B) = (600, 250)$.

3. Utilizou-se uma estação total para observar 4 pontos no eixo de um troço de uma estrada que em planta é representada por uma tangente com o objectivo de determinar a cota y_A e o desenvolvimento L da curva parabólica vertical que estabelece a ligação entre dois trainéis de declives $d_1 = 3\%$ e $d_2 = -4\%$, no sentido crescente da quilometragem. O ponto de transição A correspondente ao início da curva vertical, à quilometragem 165.1 m, é inacessível. As observações efectuadas estão indicadas na tabela seguinte, sendo as distâncias contadas desde o ponto de transição inicial, ao longo do eixo. O desvio padrão das distâncias (e portanto da quilometragem) e das cotas é igual a ± 0.005 m.

Ponto	Quilometragem (m)	Distâncias (m)	Cotas (m)
1	180.000	14.900	33.010
2	200.010	34.910	33.300
3	239.960	74.860	32.900
4	260.010	94.910	32.300

Resolução:

1. Para a resolução deste problema vai utilizar-se o modelo paramétrico (ou das equações de observação): tem-se $n_0=2$, $n=3$, $r=1$, $u=2$, $c=2+1=3$, onde cada uma das 3 equações contém apenas uma das 3 observações (esse sistema verifica-se com os parâmetros e observações ajustados), da forma:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(\hat{X}-X_A)^2 + (\hat{Y}-Y_A)^2} - \hat{\ell}_A \\ \sqrt{(\hat{X}-X_B)^2 + (\hat{Y}-Y_B)^2} - \hat{\ell}_B \\ \sqrt{(\hat{X}-X_C)^2 + (\hat{Y}-Y_C)^2} - \hat{\ell}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_A & 0 & 0 \\ 0 & w_B & 0 \\ 0 & 0 & w_C \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial X} = \frac{\hat{X}-X_A}{\sqrt{(\hat{X}-X_A)^2 + (\hat{Y}-Y_A)^2}}, \quad a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial Y} = \frac{\hat{Y}-Y_A}{\sqrt{(\hat{X}-X_A)^2 + (\hat{Y}-Y_A)^2}}$$

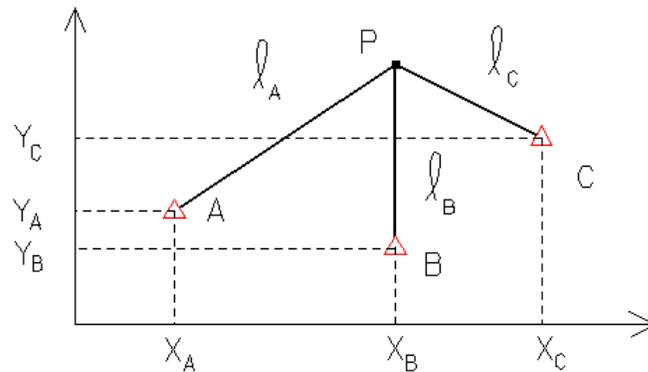
$$a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial X} = \frac{\hat{X}-X_B}{\sqrt{(\hat{X}-X_B)^2 + (\hat{Y}-Y_B)^2}}, \quad a_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial Y} = \frac{\hat{Y}-Y_B}{\sqrt{(\hat{X}-X_B)^2 + (\hat{Y}-Y_B)^2}}$$

$$a_{31} = \frac{\partial F_3}{\partial X} = \frac{\hat{X}-X_C}{\sqrt{(\hat{X}-X_C)^2 + (\hat{Y}-Y_C)^2}}, \quad a_{32} = \frac{\partial F_3}{\partial Y} = \frac{\hat{Y}-Y_C}{\sqrt{(\hat{X}-X_C)^2 + (\hat{Y}-Y_C)^2}}$$

Sendo (X_0, Y_0) um valor aproximado de (\hat{X}, \hat{Y}) , estimativa pretendida para as coordenadas de P, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \frac{X_0 - X_A}{\ell_0^A} & \frac{Y_0 - Y_A}{\ell_0^A} \\ \frac{X_0 - X_B}{\ell_0^B} & \frac{Y_0 - Y_B}{\ell_0^B} \\ \frac{X_0 - X_C}{\ell_0^C} & \frac{Y_0 - Y_C}{\ell_0^C} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \sqrt{(X_0 - X_A)^2 + (Y_0 - Y_A)^2} - \ell_A \\ \sqrt{(X_0 - X_B)^2 + (Y_0 - Y_B)^2} - \ell_B \\ \sqrt{(X_0 - X_C)^2 + (Y_0 - Y_C)^2} - \ell_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_0^A - \ell_A \\ \ell_0^B - \ell_B \\ \ell_0^C - \ell_C \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{0.05^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{0.05^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{0.05^2} \end{bmatrix}$$

(os elementos da matriz P são expressos na mesma unidade dos elementos da matriz W).



Supondo $(X_0, Y_0) = (599.85, 500.02)$, tem-se:

$$\ell_0^A = 360.441, \ell_0^B = 250.020, \ell_0^C = 223.750$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.83190 & 0.55493 \\ -0.00060 & 1.00000 \\ -0.89453 & 0.44702 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} -0.059 \\ -0.080 \\ 0.250 \end{bmatrix}$$

O sistema de equações normais é dado por:

$$\begin{bmatrix} 0.83190 & -0.00060 & -0.89453 \\ 0.55493 & 1.00000 & 0.44702 \end{bmatrix} 400\sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.83190 & 0.55493 \\ -0.00060 & 1.00000 \\ -0.89453 & 0.44702 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.83190 & -0.00060 & -0.89453 \\ 0.55493 & 1.00000 & 0.44702 \end{bmatrix} 400\sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.059 \\ -0.080 \\ 0.250 \end{bmatrix}$$

cuja solução é dada por

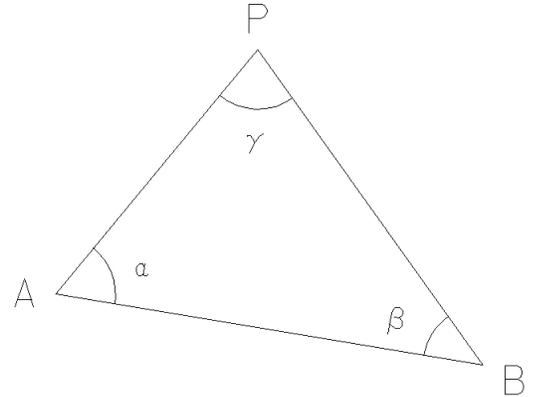
$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67126 & -0.02724 \\ -0.02724 & 0.66434 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.27223 \\ 0.00074 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.183 \\ -0.060 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} \hat{X} = 599.85 + 0.183 = 600.033 \\ \hat{Y} = 500.02 - 0.060 = 499.960 \end{cases}$$

Estes valores vão então substituir a 1ª aproximação (X_0, Y_0) de (\hat{X}, \hat{Y}) , repetindo-se o processo de ajustamento até que os acréscimos à aproximação considerada sejam inferiores à tolerância pré-definida.

2. Para a resolução deste problema vai utilizar-se o modelo condicional (ou das equações de condição): tem-se $n_0=2$, $n=4$, $r=2$, $u=0$, $c=2+0=2$, onde se ajustam as observações que posteriormente podem ser utilizadas para o cálculo das coordenadas de P, por exemplo por irradiação a partir de A ou de B. As duas equações são da forma:

$$\bar{F}(\bar{\ell}) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} - 180^\circ \\ \frac{\hat{\ell}}{\sin \hat{\alpha}} - \frac{d_{AB}}{\sin \hat{\gamma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\alpha^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\ell^2} \end{bmatrix}$$



$$b_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = 1, \quad b_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial \beta} = 1, \quad b_{13} = \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = 1, \quad b_{14} = \frac{\partial F_1}{\partial \ell} = 0$$

$$b_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = -\ell \operatorname{cosec} \alpha \cot \alpha, \quad b_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial \beta} = 0, \quad b_{23} = \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} = d_{AB} \operatorname{cosec} \gamma \cot \gamma, \quad b_{24} = \frac{\partial F_2}{\partial \ell} = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -0.001449 & 0 & 0.000672 & 1.1546 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ \\ \frac{\ell}{\sin \alpha} - \frac{d_{AB}}{\sin \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46'' \\ -0.0239 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$P = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{10^2} \text{ ''}^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10^2} \text{ ''}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10^2} \text{ ''}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.02^2} \text{ m}^{-2} \end{bmatrix}$$

$$BP^{-1}B^T = 100\sigma_0^{-2} \begin{bmatrix} 3 & -0.000776 \\ -0.000776 & 0.000008 \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T\right)^{-1} = 0.01\sigma_0^2 \begin{bmatrix} 0.34205 & 33.6819 \\ 33.6819 & 130166 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T \left(\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \mathbf{W} = 0.01\sigma_0^2 \begin{bmatrix} -9.794 \\ -16.538 \\ -19.668 \\ -5374.9 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} -9.79'' \\ -16.54'' \\ -19.67'' \\ -0.0215 \text{ m} \end{bmatrix}$$

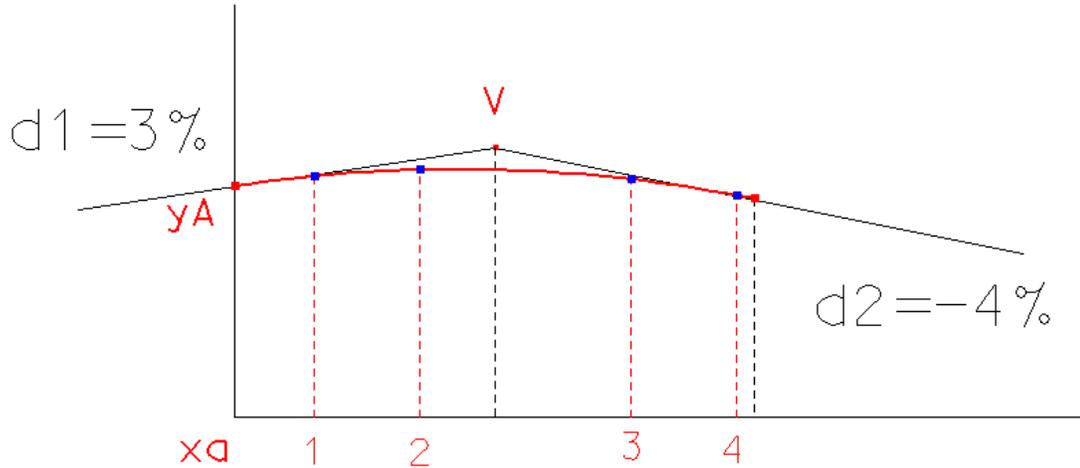
As observações corrigidas são portanto

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 60^\circ 00' 10.21'' \\ \hat{\beta} = 45^\circ 00' 03.46'' \\ \hat{\gamma} = 74^\circ 59' 46.33'' \\ \hat{\ell} = 448.308 \text{ m} \end{cases}$$

Caso seja necessário, utilizam-se estas estimativas como valor aproximado das observações e repete-se o processo.

3. Para a resolução deste problema vai utilizar-se o modelo geral de ajustamento. A forma da parábola fica definida pelos parâmetros y_A e L ; para cada ponto $i=1,2,3,4$ é necessário especificar um parâmetro (distância d_i) para localizar esse ponto sobre a parábola, o que totaliza 6 como número mínimo de variáveis independentes necessárias para resolver univocamente o modelo matemático ($n_0=6$). Sendo $n=8$, $r=n-n_0=2$; de $u=2$, devem ser estabelecidas $c=2+2=4$ equações que relacionam as observações e os parâmetros, obtidas da equação da parábola

$$y = \frac{d_2 - d_1}{200L} x^2 + \frac{d_1}{100} x + y_A :$$



$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{\ell}) = \begin{bmatrix} 200\hat{L}y_1 - (d_2 - d_1)x_1^2 - 2Ld_1x_1 - 200Ly_A \\ 200\hat{L}y_2 - (d_2 - d_1)x_2^2 - 2Ld_1x_2 - 200Ly_A \\ 200\hat{L}y_3 - (d_2 - d_1)x_3^2 - 2Ld_1x_3 - 200Ly_A \\ 200\hat{L}y_4 - (d_2 - d_1)x_4^2 - 2Ld_1x_4 - 200Ly_A \end{bmatrix}, \vec{\ell} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ y_2 \\ x_2 \\ y_3 \\ x_3 \\ y_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} y_A \\ L \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -200L_0 & 200y_1 - 2d_1x_1 - 200y_A^0 \\ -200L_0 & 200y_2 - 2d_1x_2 - 200y_A^0 \\ -200L_0 & 200y_3 - 2d_1x_3 - 200y_A^0 \\ -200L_0 & 200y_4 - 2d_1x_4 - 200y_A^0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 200L_0 & -2(d_2 - d_1)x_1 - 2L_0d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200L_0 & -2(d_2 - d_1)x_2 - 2L_0d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200L_0 & -2(d_2 - d_1)x_3 - 2L_0d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200L_0 & -2(d_2 - d_1)x_4 - 2L_0d_1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 200L_0y_1 - (d_2 - d_1)x_1^2 - 2L_0d_1x_1 - 200L_0y_A^0 \\ 200L_0y_2 - (d_2 - d_1)x_2^2 - 2L_0d_1x_2 - 200L_0y_A^0 \\ 200L_0y_3 - (d_2 - d_1)x_3^2 - 2L_0d_1x_3 - 200L_0y_A^0 \\ 200L_0y_4 - (d_2 - d_1)x_4^2 - 2L_0d_1x_4 - 200L_0y_A^0 \end{bmatrix}$$

onde L_0 e y_A^0 são valores aproximados dos parâmetros. Considerando $L_0 = 98$ m e $y_A^0 = 33$ m, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} -196 & -0.874 \\ -196 & -1.4946 \\ -196 & -4.6916 \\ -196 & -7.0946 \end{bmatrix} \text{m}$$

$$B = \begin{bmatrix} 196 & -3.794 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 196 & -0.9926 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 196 & 4.6004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 196 & 7.4074 \end{bmatrix} \text{m}$$

$$W = \begin{bmatrix} -70.111 \\ -61.161 \\ -67.495 \\ -64.717 \end{bmatrix} \text{m}^2$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{0.005^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{0.005^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{0.005^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{0.005^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{0.005^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{0.005^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{0.005^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{0.005^2} \end{bmatrix} \text{m}^2$$

$$BP^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 0.96076 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96042 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.96093 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.96177 \end{bmatrix} \sigma_0^{-2} \text{m}^4$$

$$\left(\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.04084 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.04121 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.04066 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.03975 \end{bmatrix} \sigma_0^2 \text{m}^{-4}$$

$$\mathbf{A}^T \left(\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -204.005 & -204.076 & -203.969 & -203.791 \\ -0.90970 & -1.55619 & -4.88236 & -7.37659 \end{bmatrix} \sigma_0^2 \text{m}^{-3}$$

$$\mathbf{A}^T \left(\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 159904.9 & 2886.07 \\ 2886.07 & 78.3610 \end{bmatrix} \sigma_0^2 \text{m}^{-2}$$

$$\left(\mathbf{A}^T \left(\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \mathbf{A}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000018653 & -0.00068701 \\ -0.00068701 & 0.0380642 \end{bmatrix} \sigma_0^{-2} \text{m}^2$$

$$\mathbf{A}^T \left(\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} -53740.39 \\ -965.888 \end{bmatrix} \sigma_0^2 \text{m}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.3389 \\ 0.1544 \end{bmatrix} \text{m}$$

donde $y_A^0 = 33.0.339 = 32.661\text{m}$, $L_0 = 98 + 0.154 = 98.154\text{ m}$. Calculando as observações ajustadas a partir do cálculo dos resíduos, obtêm-se novos valores para y_A^0 , L_0 e d_i , repetindo-se o processo até se atingir a precisão desejada.