Modelação Numérica 2024

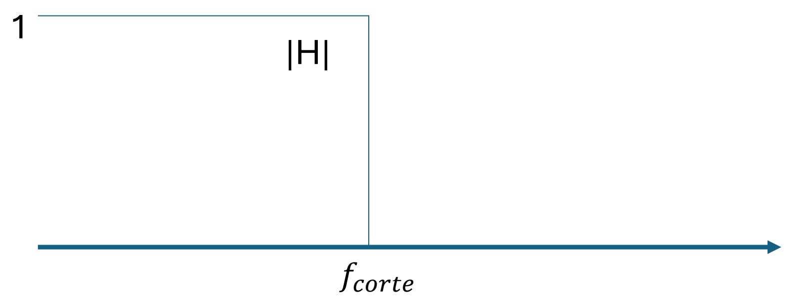
Exame 1

1. A série temporal x (n termos), é convoluída com a série h (m termos, m<n), designada por filtro, dando origem à série y, com o mesmo comprimento da série original. Admita que ambas as séries são amostradas com $\Delta t = 5s$.
   a) Como calcularia a função de transferência do filtro h? Escreva o código correspondente.
   b) Se se tratasse de um filtro passa-baixo, que tipo de função de transferência deveria ter? Esquematize.
   c) Qual será o espetro de amplitude da série y?

a) A função de transferência é a transformada de Fourier do filtro.

```
H=np.fft.fft(h)
```

b) |H| seria próximo de 1 para frequências abaixo da frequência de corte e próximo de zero para valores acima dessa frequência. No caso de um filtro ideal seria:



c) De acordo como o teorema da convolução: Y=HX, logo |Y|=|HX|

2. Um conjunto de N sensores (N=5) é utilizado para localizar uma fonte sonora, fornecendo cada sensor uma estimativa do tempo de propagação do som desde a fonte, através do ar (c=360 m/s).

a) Escreva uma função de custo que poderia ser utilizada para calcular uma solução ótima para o problema proposto, incluindo a inicialização de todos os parâmetros relevantes.

b) Se os sensores se encontrarem distribuídos ao longo de uma linha reta, será possível determinar a posição sem ambiguidade? Justifique, uses um esquema.

a)

```
def custo(V):
#tE: tempos observados, xE: localização das estações
```

```
#x,y,z localização do fonte
    x,y,z=V
    c=360
    t=np.sqrt((x-xE)**2+(y-yE)**2+(z-zE)**2)/c
    cost=np.mean((t-tE)**2)
    return cost
```

b) Se os sensores estiverem em linha reta a solução será afetada por ambiguidade pois a função de custo não distinguirá posições da fonte que se encontrem à mesma distância da reta, i.e. sobre circunferências perpendiculares à reta.

3. A equação de dispersão linear a 1 dimensão escreve-se (U, K constantes):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -U\frac{\partial C}{\partial x} + K\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

a) Discretize a equação utilizando diferenças centradas no tempo e no espaço, num método explícito de segunda ordem no espaço e no tempo.

b) Mostre que quando se representa o termo difusivo (segunda derivada) de forma implícita, a solução exige a solução de um sistema de equações lineares.

a)

$$\boldsymbol{\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n-1\prime}}{2\Delta t} = -U\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} + K\frac{C_{i-1}^n + C_{i-1}^n - 2C_i^n}{\Delta x^2}}$$

$$\boldsymbol{d}$$

Dá origem à recursão explícita:

$$\boldsymbol{C_i^{n+1} = C_i^{n-1} - U\Delta t\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} + K2\Delta t\frac{C_{i-1}^n + C_{i-1}^n - 2C_i^n}{\Delta x^2}}$$

b)

$$\boldsymbol{\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n-1}}{2\Delta t} = -U\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} + K\frac{C_{i-1}^{n+1} + C_{i-1}^{n+1} - 2C_i^{n+1}}{\Delta x^2}}$$

Dá origem ao sistema de equações:

$$\boldsymbol{-\frac{K}{\Delta x^2}C_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{2K}{\Delta x^2} + \frac{1}{2\Delta t}\right)C_i^{n+1} - \frac{K}{\Delta x^2}C_{i+1}^{n+1} = \frac{C_i^{n-1}}{2\Delta t} - U\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x}}$$

Da forma:

$$\boldsymbol{M\vec{C}^{n+1} = \vec{b}}$$