

SÉRIE II

Problemas de radiação solar

SÉRIE II

PROBLEMAS DE RADIAÇÃO SOLAR

1. Para a cidade de Lisboa (38 N, 9 W):
 - a) Qual a altura solar máxima para a cidade de Lisboa?
 - b) Qual a gama de azimutes para o pôr-do-sol em Lisboa?
2. Determine a latitude do Trópico de Caranguejo, sabendo que é o paralelo que limita a região em que, pelo menos uma vez por ano, o sol passa pelo zénite.
3. Determine a latitude do círculo polar ártico, sabendo que é o paralelo que limita a região em que, pelo menos uma vez por ano, há uma noite com 24h.
4. Eratóstenes determinou o raio da Terra notando que em Alexandria no dia do solstício de verão, ao meio-dia, a sombra de uma vara era maior do que em Assuã, 800 km a sul da cidade. Determine o comprimento da sombra de uma vara com 1.5 m em Alexandria (latitude: 31°N) ao meio-dia do solstício de verão.
5. Para o dia 13 de janeiro determinar para Lisboa (38 N, 9 W):
 - a) A declinação.
 - b) A excentricidade da órbita.
 - c) A hora (solar) do ocaso.
 - d) A hora local do ocaso
 - e) A altura solar às 14h30.
 - f) O azimute solar à mesma hora.
 - g) O ângulo de incidência da irradiância solar numa parede vertical orientada a sul às 14h30.
 - h) A hora (solar) do ocaso para a parede.
 - i) A irradiação diária total que incide na parede (desprezando o efeito da atmosfera).
 - j) Comparar com a irradiação diária total para o mesmo dia numa superfície horizontal
6. Na cidade do Cairo (30 N) no dia 4 de setembro, às 11h00, um piranómetro na horizontal mede 830 W/m² e um pireliómetro mede DNI = 700 W/m².
 - a) Determinar elevação e azimute solar a essa hora.
 - b) Determinar a irradiância difusa.
 - c) Considerando que as componentes difusa e refletida da irradiância solar são isotrópicas, estimar a irradiância global que atinge uma superfície orientada a sul com uma inclinação de 60°. [albedo do solo 0.40]

7. Na cidade do Oslo (60 N) no dia 4 de setembro, às 13h00, temos $DNI = 200 \text{ W/m}^2$. Considere uma superfície orientada a sul com inclinação de 60° .
- Determinar o ângulo de incidência da irradiância direta na superfície inclinada.
 - Determinar a irradiância refletida que atinge a superfície inclinada considerando que a reflexão no solo é especular.
8. Considere uma superfície com inclinação de 30° orientada a sudeste, em Lisboa.
- Determine a duração do dia de 13 maio.
 - Para as 10h30, calcular a altura e o azimute solar
 - Determine o ângulo de incidência na superfície às 10h30.
9. Em Maracaibo (10 N, 71 W), na Venezuela, às 15h00 (hora solar) do dia 28 de fevereiro, um piranômetro registou $GHI = 650 \text{ W/m}^2$.
- Qual a elevação solar?
 - Usando o modelo de decomposição de Reindl, estime a irradiância difusa e a irradiância direta.
10. A Estação de Investigação Polar Halley, na Antártica, com coordenadas (-75.58 S, -26.73 W) encontra-se numa planície gelada.
- Determinar a duração em dias da noite de inverno.
 - Qual o ângulo de incidência numa superfície vertical orientada a norte no dia do equinócio às 8:00, hora solar.
 - Considerando que a refletividade da neve é 0.9, determinar a irradiância direta e refletida que chega à essa superfície vertical a essa hora se a irradiância DNI é 300 W/m^2 .
 - Calcular a irradiação extraterrestre que chegaria a uma superfície horizontal ao longo do dia do equinócio
11. Para o dia 15 de março em Xangai, China (31 N, 121 E).
- Determinar a radiação extraterrestre entre as 10h e as 11h.
 - Estimar a irradiância global às 10h30, sabendo que a irradiação global diária nesse dia foi 5400 Wh/m^2 .
 - Estimar a irradiância difusa e direta a essa hora.
12. Qual é a temperatura de emissão da Lua? (albedo = 0.12)
13. Sem a cobertura de neve e gelo da Gronelândia e Antártica, o albedo terrestre seria de 27%. Determine o efeito que isso teria na temperatura da superfície terrestre, mantendo o equilíbrio radiativo da atmosfera.
14. O efeito da erupção do vulcão Pinatubo em 1992 na temperatura média do planeta foi estimado num arrefecimento de $0.5 \text{ }^\circ\text{C}$ durante os 2 anos seguintes à erupção. Determine a variação do albedo médio do planeta devido à erupção.

RESOLUÇÕES

1. Para a cidade de Lisboa (38 N, 9 W):

a) Qual a altura solar máxima para a cidade de Lisboa?

A altura máxima ocorre ao meio-dia ($\omega = 0$) no dia do solstício de verão, quando a declinação é

$$\delta = 23.45^\circ.$$

Nesse caso, temos

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

$$\sin \alpha = \sin 23.45 \sin 38 + \cos 23.45 \cos 38 \cos 0$$

$$\sin \alpha = \sin 23.45 \sin 38 + \cos 23.45 \cos 38 = 0.96$$

logo a altura máxima é

$$\alpha = \arcsin 0.96 = 75^\circ.$$

b) Qual a gama de azimutes para o pôr-do-sol em Lisboa?

O azimute solar para o pôr do sol é máximo no solstício de verão ($\delta = 23.45^\circ$) e mínimo no solstício de inverno ($\delta = -23.45^\circ$). No pôr do sol a altura solar é nula ($\alpha = 0$)

Nesse caso temos

$$\cos \psi = \frac{\sin \alpha \sin \phi - \sin \delta}{\cos \alpha \cos \phi} = -\frac{\sin \delta}{\cos \phi}$$

e, portanto, temos:

$$\text{solstício de verão: } \psi = \arccos\left(-\frac{\sin 23.45}{\cos 38}\right) = 120^\circ$$

$$\text{solstício de inverno: } \psi = \arccos\left(\frac{\sin 23.45}{\cos 38}\right) = 59.7^\circ$$

pelo que podemos dizer que em Lisboa o azimute do pôr do sol varia **entre 60 e 120°**.

- 2. Determine a latitude do Trópico de Caranguejo, sabendo que é o paralelo que limita a região em que, pelo menos uma vez por ano, o sol passa pelo zênite.**

No Trópico de Caranguejo o sol passa pelo zênite no dia do solstício ($\delta = 23.45^\circ$) ao meio-dia ($\omega = 0$).

Temos então

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

$$\sin 90 = \sin 23.45 \sin \phi + \cos 23.45 \cos \phi \cos 0$$

$$1 = \sin 23.45 \sin \phi + \cos 23.45 \cos \phi$$

e portanto, pelo teorema de Pitágoras ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), resulta diretamente $\phi = 23.45^\circ$.

- 3. Determine a latitude do círculo polar ártico, sabendo que é o paralelo que limita a região em que, pelo menos uma vez por ano, há uma noite com 24h.**

No hemisfério norte, a noite mais longa ocorre no solstício de inverno ($\delta = -23.45^\circ$). No círculo polar ártico, nesse dia o nascer do sol ($\alpha = 0$) “acontece” ao meio-dia ($\omega = 0$).

Então,

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

$$\sin 0 = \sin(-23.45) \sin \phi + \cos(-23.45) \cos \phi \cos 0$$

$$0 = \sin(-23.45) \sin \phi + \cos(-23.45) \cos \phi$$

$$\tan \phi = -\frac{1}{\tan(-23.45)} = \frac{1}{\tan(23.45)} = 2.3$$

e, portanto, a latitude do círculo polar ártico é $\phi = \text{atan } 2.3 = 66.5^\circ$.

4. Eratóstenes determinou o raio da Terra notando que em Alexandria no dia do solstício de verão, ao meio-dia, a sombra de uma vara era maior do que em Assuã, 800 km a sul da cidade. Determine o comprimento da sombra de uma vara com 1.5 m em Alexandria (latitude: 31°N) ao meio-dia do solstício de verão.

Em Alexandria, ao meio-dia ($\omega = 0$) do solstício de verão ($\delta = 23.45^\circ$) a altura solar é dada por

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

$$\sin \alpha = \sin 23.45 \sin 31 + \cos 23.45 \cos 31 \cos 0$$

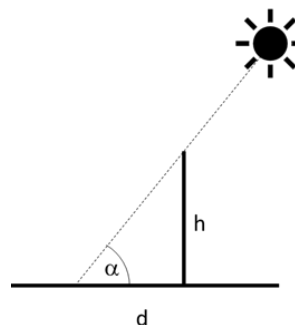
$$\sin \alpha = \sin 23.45 \sin 31 + \cos 23.45 \cos 31 = 0.99$$

$$\alpha = \arcsin 0.99 = 82.45^\circ$$

O comprimento da sombra de uma vara vertical pode ser calculado a partir da altura solar considerando a figura:

$$\tan \alpha = \frac{h}{d}$$

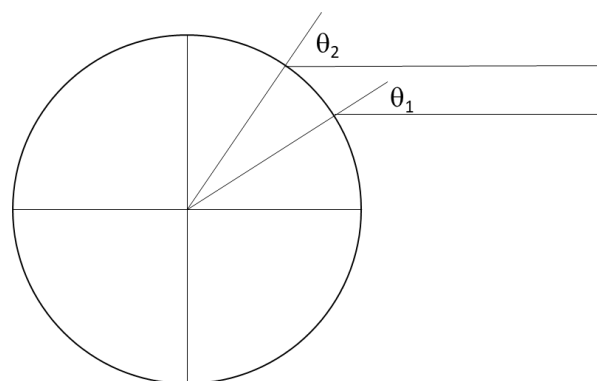
$$d = \frac{h}{\tan \alpha} = \frac{1.5}{7.5} = \mathbf{0.2 \text{ m}}$$



Embora não seja perguntado, o raio da Terra R pode ser determinado notando que, como sugerido pela figura, a distância entre os dois pontos 1 e 2 (800 km) está relacionado com a circunferência através da equação:

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{360} = \frac{800}{2\pi R}$$

$$R = \frac{800 \times 360}{2\pi (\theta_2 - \theta_1)} = \frac{800 \times 360}{2\pi (7.55 - 0.55)} = \mathbf{6548 \text{ km}}$$



em que θ está indicado em graus e se considerou que a latitude de Assuã é 24°N .

O raio da Terra é 6371 km, o que representa um erro na estimativa da ordem de 2.8%!

5. Para o dia 13 de janeiro determinar para Lisboa (38 N, 9 W):

a) A declinação.

O dia 13 de janeiro corresponde ao dia juliano 13. Logo, a declinação é dada por

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(13 + 284)\right) = -21.6^\circ$$

b) A excentricidade da órbita.

A excentricidade da órbita é

$$E_0 = 1 + 0.033 \cos\left(\frac{2\pi d}{365}\right)$$

$$E_0 = 1 + 0.033 \cos\left(\frac{2\pi \times 13}{365}\right) = 1.032$$

c) A hora (solar) do ocaso.

A hora solar da aurora/ocaso pode ser determinada a partir do ângulo horário que é dada por

$$\omega_s = \arccos(-\tan \phi \tan \delta)$$

$$\omega_s = \arccos(-\tan 38 \tan(-21.6)) = 72^\circ$$

Relembrando que o ângulo horário pode ser convertido na hora do dia h através da expressão

$$\omega = 15(12 - h)$$

a hora solar da aurora/ocaso é

$$h = 12 \pm \frac{\omega_s}{15}$$

$$h = 12 + \frac{72}{15} = 16.8 = \mathbf{16h48}$$

(e a hora da aurora é $7.2 = 7h12$.)

d) A hora local do ocaso

A hora local pode ser determinada a partir da hora solar através de

$$Hora\ local = Hora\ solar - EOT + \frac{LSM - LONG}{15}$$

em que LSM é a longitude do meridiano, LONG é a longitude do local. Para o caso de Lisboa, o meridiano relevante é Greenwich, LSM = 0, e LONG = -9 (porque está a oeste do meridiano; se fosse a leste seria positivo!).

EOT é a equação do tempo que se pode aproximar por

$$\begin{aligned} EOT(mins) &= -7.655 \sin\left(\frac{360}{365}d\right) + 9.873 \sin\left(2\frac{360}{365}d + 205.7\right) = \\ &= -7.655 \sin\left(\frac{360}{365}13\right) + 9.873 \sin\left(2\frac{360}{365}13 + 205.7\right) = -9.40\ mins \end{aligned}$$

Podemos então calcular:

$$Hora\ local = 17h07 - (-9.40\ mins) + \frac{0 + 9}{15} horas$$

$$Hora\ local = 17h07 + 9.4\ mins + 36\ mins = \mathbf{17h52}$$

e) A altura solar às 14h30.

Hora solar 14h30 corresponde a

$$\omega = 15 (12 - h)$$

$$\omega = 15 (12 - 14.5)$$

$$\omega = -15 \times 2.5 = -37.5^\circ$$

A altura solar pode então ser determinada por

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

$$\sin \alpha = \sin(-21.6) \sin 38 + \cos(-21.6) \cos 38 \cos(-37.5) = 0.35$$

$$\alpha = \arcsin 0.35 = \mathbf{20.7^\circ}$$

f) O azimute solar à mesma hora.

O azimute solar pode ser determinado usando

$$\cos \psi = \frac{\sin \alpha \sin \phi - \sin \delta}{\cos \alpha \cos \phi}$$

$$\cos \psi = \frac{\sin 20.7 \sin 38 - \sin(-21.6)}{\cos 20.7 \cos 38} = 0.80$$

donde $\psi = \arccos 0.80 = 37.3^\circ$.

Notar que esta equação não tem informação explícita sobre a hora do dia, e, portanto, o azimute determinado corresponde a duas posições do sol, uma da parte da manhã e outra da parte da tarde. Relembrando que o azimute é definido como zero para sul e positivo para nascente, como o problema se refere à parte da tarde, o azimute às 14h30 é -37.3° .

Em alternativa podíamos também usar

$$\sin \psi = \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos \alpha}$$

$$\sin \psi = \frac{\cos(-21.6) \sin(-37.5)}{\cos 20.7} = -0.61$$

de onde resulta $\psi = \arcsin 0.61 = -37.3^\circ$

Neste caso a solução encontrada já vem com o sinal adequado. O inconveniente é que precisamos de calcular separadamente o ângulo horário.

g) O ângulo de incidência da irradiância solar numa parede vertical orientada a sul às 14h30.

Para uma parede vertical ($\beta = 90$) orientada a sul, o ângulo de incidência é dado por

$$\cos \theta = \sin \delta \sin(\phi - \beta) + \cos \delta \cos(\phi - \beta) \cos \omega$$

$$\cos \theta = \sin(-21.6) \sin(38 - 90) + \cos(-21.6) \cos(38 - 90) \cos(-37.5) = 0.74$$

e, portanto, o ângulo de incidência (medido relativamente à normal à superfície, neste caso horizontal) é

$$\theta = \arccos 0.74 = 42^\circ.$$

Notar que neste caso o ângulo de incidência na parede vertical não é o complementar da altura solar porque o azimute solar é diferente de zero e por isso não é normal à parede.

h) A hora (solar) do ocaso para a parede.

A hora do ocaso para a parede pode ser determinada por

$$\omega'_s = \min\{\arccos(-\tan \phi \tan \delta), \arccos(-\tan(\phi - \beta) \tan \delta)\}$$

$$\omega'_s = \min\{\arccos(-\tan 38 \tan(-21.6)), \arccos(-\tan(38 - 90) \tan(-21.6))\}$$

$$\omega'_s = \min\{72.0^\circ, 120.4^\circ\}$$

a que corresponde a hora

$$h = 12 + \frac{72}{15} = 16.8 = 16h48$$

Para perceber o efeito da parede, e embora não seja perguntado, podemos repetir o exercício para seis meses mais tarde. Neste caso a declinação passa a ser $\delta = 21.6^\circ$ e por isso

$$\omega'_s = \min\{108.0^\circ, 59.6^\circ\}$$

E, portanto, o ocaso ocorre às 19h12 enquanto a parede deixa de ver o sol às 16h.

i) A irradiação diária total que incide na parede (desprezando o efeito da atmosfera).

A irradiação diária total incidente na parede para esse dia pode ser determinada por

$$H_0 = \frac{24}{\pi} I_{sc} E_0 \left(\frac{\pi}{180} \omega'_s \sin \delta \sin(\phi - \beta) + \cos \delta \cos(\phi - \beta) \sin \omega'_s \right)$$

$$H_0 = \frac{24}{\pi} I_{sc} E_0 \left(\frac{\pi}{180} 72 \sin(-21.6) \sin(38 - 90) + \cos(-21.6) \cos(38 - 90) \sin 72.0 \right) =$$

$$H_0 = \frac{24}{\pi} 1367 \times 1.03 \times 0.91 = \mathbf{9775 \text{ Wh/m}^2}$$

em que se considerou $I_{sc} = 1367 \text{ W/m}^2$.

j) Comparar com a irradiação diária total para o mesmo dia numa superfície horizontal

Para uma superfície horizontal temos naturalmente

$$H_0 = \frac{24}{\pi} I_{sc} E_0 \left(\frac{\pi}{180} \omega'_s \sin \delta \sin(\phi) + \cos \delta \cos(\phi) \sin \omega'_s \right)$$

$$H_0 = \frac{24}{\pi} I_{sc} E_0 \left(\frac{\pi}{180} 72 \sin(-21.6) \sin(38) + \cos(-21.6) \cos(38) \sin 72.0 \right) =$$

$$H_0 = \frac{24}{\pi} 1367 \times 1.03 \times 0.41 = \mathbf{4432 \text{ Wh/m}^2}$$

Podemos notar que a irradiação na superfície horizontal é menos de metade do que a irradiação na superfície vertical porque o ângulo de incidência é muito mais favorável neste último caso (reparar que a altura solar máxima durante o dia foi de apenas 20°).

Um outro ponto importante: é comum definir uma **hora-de-sol** como 1 kWh/m² que corresponde à irradiação que chega ao solo, considerando o efeito da atmosfera, num dia de céu limpo para uma latitude moderada. Assim, podíamos dizer que (se não houvesse absorção e dispersão de radiação solar na atmosfera) nesse dia em Lisboa teríamos cerca de 4.5 horas-de-sol numa superfície horizontal mas quase 10 horas-de-sol na parede vertical. Claro que considerando o efeito da atmosfera, mesmo num dia de céu limpo, a irradiação total diária seria francamente inferior.

6. Na cidade do Cairo (30 N) no dia 4 de setembro, às 11h00, um piranómetro na horizontal mede 830 W/m² e um pireliómetro mede DNI = 700 W/m².

a) Determinar elevação e azimute solar a essa hora.

Para determinar a elevação ou altura solar precisamos de começar por determinar a declinação para o dia 4 de setembro:

jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago	set	d
31	28	31	30	31	30	31	31	4	247

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(247 + 284)\right) = 18.7^\circ$$

As 11h00 corresponde ao ângulo horário

$$\omega = 15 (12 - h)$$

$$\omega = 15 (12 - 11) = 15^\circ$$

Podemos então determinar a altura solar

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

$$\sin \alpha = \sin 18.7 \sin 30 + \cos 18.7 \cos 30 \cos 15 = 0.95$$

$$\alpha = \arcsin 0.95 = \mathbf{72.3^\circ}$$

E o azimute solar

$$\sin \psi = \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos \alpha}$$

$$\sin \psi = \frac{\cos 18.7 \sin 15}{\cos 72.3} = 0.80$$

$$\psi = \arcsin 0.80 = 53^\circ$$

b) Determinar a irradiância difusa.

A irradiância global na horizontal (I , muitas vezes também denominada GHI, de *Global horizontal irradiance*) é a soma da irradiância direta segundo o plano de incidência (I_b , em que o b se refere a *beam*, para distinguir de difusa, muitas vezes expressa como DNI, de *Direct normal irradiance*) mais a irradiância difusa (I_d , muitas vezes descrita como DHI, de *Diffuse horizontal irradiance*):

$$I = I_b \cos \theta + I_d$$

$$I_d = I - I_b \cos \theta = I - I_b \sin \alpha$$

$$I_d = 830 - 700 \times 0.95 = 163 \text{ W/m}^2$$

c) Considerando que as componentes difusa e refletida da irradiância solar são isotrópicas, estimar a irradiância global que atinge uma superfície orientada a sul com uma inclinação de 60°. [albedo do solo 0.40]

Para uma superfície virada a sul com inclinação de 60°, o ângulo de incidência é dado por

$$\cos \theta = \sin \delta \sin(\phi - \beta) + \cos \delta \cos(\phi - \beta) \cos \omega$$

$$\cos \theta = \sin 18.7 \sin(30 - 60) + \cos 18.7 \cos(30 - 60) \cos 15 = 0.63$$

e portanto $\theta = \arccos 0.63 = 50.8^\circ$.

A irradiância global que chega à superfície (I_β , às vezes descrita como I_{POA} em que o índice POA se refere a *plane of the array*) é a soma das componentes direta, refletida e difusa:

$$I_\beta = I_{b\beta} + I_{r\beta} + I_{d\beta}$$

Vamos calcular cada uma das componentes separadamente:

- A irradiância direta que chega à superfície ($I_{b\beta}$, com b de *beam*) é portanto

$$I_{b\beta} = I_b \cos \theta = 700 \times 0.63 = 442 \text{ W/m}^2$$

- A irradiância refletida recebida pela superfície ($I_{r\beta}$) é igual a

$$I_{r\beta} = \rho I \frac{1 - \cos \beta}{2} = 0.40 \times 830 \frac{1 - \cos 60}{2} = 83 \text{ W/m}^2$$

Notar que quando a inclinação da superfície é zero (horizontal, $\beta = 0$) não existe radiação refletida a chegar à superfície e quando a inclinação é vertical ($\beta = 90$) a radiação refletida incidente na superfície é metade da refletida total porque metade foi na “outra” direção.

- A irradiância difusa que chega à superfície ($I_{d\beta}$) é

$$I_{d\beta} = I_d \frac{1 + \cos \beta}{2} = 163 \frac{1 + \cos 60}{2} = 122 \text{ W/m}^2$$

Notar que quando a inclinação da superfície é zero (horizontal, $\beta = 0$) a radiação difusa a chegar à superfície é DHI (por definição) e quando a inclinação é vertical ($\beta = 90$) a radiação difusa incidente na superfície é metade da difusa na horizontal porque metade foi na “outra” direção.

Somando as 3 componentes obtemos:

$$I_{\beta} = I_{b\beta} + I_{r\beta} + I_{d\beta}$$

$$I_{\beta} = 442 + 83 + 122 = \mathbf{648 \text{ W/m}^2}$$

É interessante notar que embora a fração de radiação difusa seja relativamente baixa, pois

$$\frac{I_d}{I} = \frac{163}{830} = 20\%$$

e portanto 80% da radiação que chega à superfície horizontal seja radiação direta, para a superfície inclinada a fração de radiação direta representa apenas 68%.

7. Na cidade do Oslo (60 N) no dia 4 de setembro, às 13h00, temos $DNI = 200 \text{ W/m}^2$.

Considere uma superfície orientada a sul com inclinação de 60° .

a) Determinar o ângulo de incidência da irradiância direta na superfície inclinada.

Felizmente (!?) trata-se do mesmo dia do exercício anterior e por isso 'metade' já está resolvido... só mudam os números. Temos, portanto:

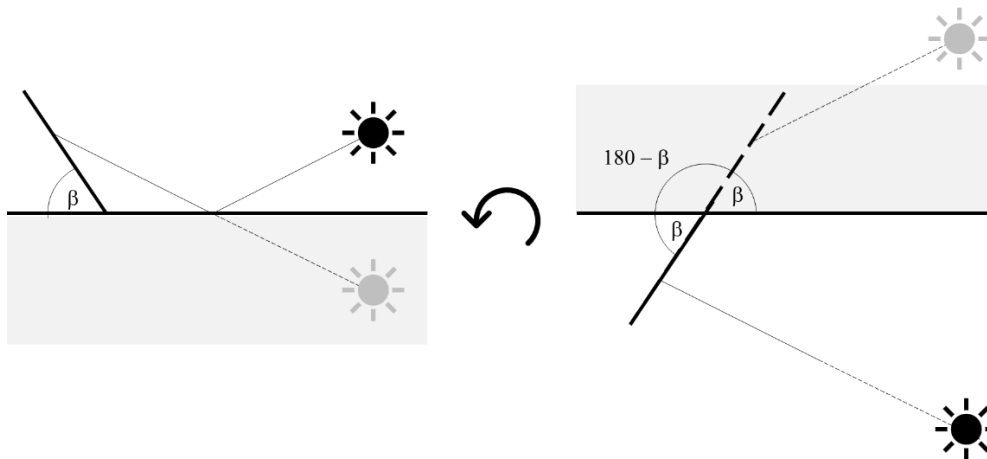
$$\cos \theta = \sin \delta \sin(\phi - \beta) + \cos \delta \cos(\phi - \beta) \cos \omega$$

$$\cos \theta = \sin 18.7 \sin(60 - 60) + \cos 18.7 \cos(60 - 60) \cos(-15)$$

$$\cos \theta = \cos 18.7 \cos(-15) = 0.92$$

$$\theta = \arccos 0.92 = 23.8^\circ$$

b) Determinar a irradiância refletida que atinge a superfície inclinada considerando que a reflexão no solo é especular.



Como a figura sugere, o ângulo de incidência da radiação refletida na superfície inclinada corresponde ao ângulo de incidência da radiação direta com uma superfície com inclinação $(180 - \beta)$ e, portanto, podemos calcular a irradiância refletida especular através da equação

$$I_{\beta r}^* = \rho I_b \cos \theta^*$$

em que

$$\cos \theta^* = \sin \delta \sin(\phi - (180 - \beta)) + \cos \delta \cos(\phi - (180 - \beta)) \cos \omega$$

$$\cos \theta^* = \sin 18.7 \sin(60 - (180 - 60)) + \cos 18.7 \cos(60 - (180 - 60)) \cos(-15)$$

$$\cos \theta^* = \sin 18.7 \sin(-60) + \cos 18.7 \cos(-60) \cos(-15) = 0.18$$

(e portanto $\theta^* = \arccos 0.18 = 79.6^\circ$, ou seja a radiação refletida é quase tangente à superfície, como de resto é sugerido pela figura).

Bom, podemos agora calcular a irradiância refletida que chega à superfície:

$$I_{br}^* = \rho I_b \cos \theta^* = 0.40 \times 200 \times 0.18 = \mathbf{14.4 W/m^2}$$

Trata-se de um valor quase desprezável.

8. Considere uma superfície com inclinação de 30° orientada a sudeste, em Lisboa.

a) Determine a duração do dia de 13 maio.

O dia 13 de maio corresponde ao dia juliano $d = 133$:

jan	fev	mar	abr	mai	d
31	28	31	30	13	133

e por isso a declinação para esse dia é

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{360}{365} (d + 284) \right)$$

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{360}{365} (133 + 284) \right) = 18.3^\circ$$

Ora, o angulo horário para o nascer/pôr-do-sol é dado por

$$\omega'_s = \arccos(-\tan \phi \tan \delta)$$

como a latitude de Lisboa é 38° temos

$$\omega'_s = \arccos(-\tan 38 \tan 18.3) = 105^\circ$$

b) Para as 10h30, calcular a altura e o azimute solar

O angulo horário para as 10h30 é

$$\omega = 15 (12 - h)$$

$$\omega = 15 (12 - 10.5) = 22.5^\circ$$

e a altura solar é dada, como habitualmente, por

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

logo

$$\sin \alpha = \sin 18.3 \sin 38 + \cos 18.3 \cos 38 \cos 22.5 = 0.88$$

$$\alpha = \arcsin 0.88 = 62^\circ$$

enquanto o azimute solar é

$$\sin \psi = \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos \alpha}$$

$$\sin \psi = \frac{\cos 18.3 \sin 22,5}{\cos 62} = 0.77$$

$$\psi = \arcsin 0.77 = 51^\circ$$

c) Determine o angulo de incidência na superfície às 10h30.

Podemos calcular o angulo de incidência para a superfície inclinada com orientação arbitrária usando a expressão

$$\cos \theta = (\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta \cos \gamma) \sin \delta + (\cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta \cos \gamma) \cos \delta \cos \omega + \cos \delta \sin \beta \sin \gamma \sin \omega$$

onde temos

- Latitude: $\phi = 38^\circ$
- Inclinação da superfície: $\beta = 30^\circ$
- Declinação: $\delta = 18.3^\circ$
- Orientação da superfície: $\gamma = 45^\circ$ (zero para sul, negativo para oeste)
- Angulo horário: $\omega = 22.5^\circ$

Temos pois

$$\begin{aligned} \cos \theta &= (\sin 38 \cos 30 - \cos 38 \sin 30 \cos 45) \sin 18.3 \\ &\quad + (\cos 38 \cos 30 + \sin 38 \sin 30 \cos 45) \cos 18.3 \cos 22.5 \\ &\quad + \cos 18.3 \sin 30 \sin 45 \sin 22.5 = 0.027 + 0.827 + 0.135 = 0.988 \end{aligned}$$

logo

$$\theta = \arccos 0.988 = 8.8^\circ$$

Podemos concluir, portanto, que a incidência na superfície é quase perpendicular a essa hora.

Uma forma alternativa de calcular o ângulo de incidência numa superfície inclinada com orientação arbitrária, mais simples, mas que obriga a conhecer o ângulo zenital e o azimute, é

$$\cos \theta = \cos \beta \cos \theta_z + \sin \beta \sin \theta_z \cos(\psi - \gamma)$$

$$\cos \theta = \cos 30 \cos(90 - 58) + \sin 30 \sin(90 - 58) \cos(46 - 45) = 0.988$$

$$\theta = \arccos 0.988 = 8.8^\circ$$

obtendo-se o mesmo resultado.

- 9. Em Maracaibo (10 N, 71 W), na Venezuela, às 15h00 (hora solar) do dia 28 de fevereiro, um piranómetro registou GHI = 650 W/m².**

- c) Qual a elevação solar?**

Como habitualmente, a declinação é dada por

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{360}{365} (d + 284) \right)$$

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{360}{365} (59 + 284) \right) = -19.6^\circ$$

O ângulo horário para as 15h00 é

$$\omega = 15 (12 - h)$$

$$\omega = 15 (12 - 15) = -45^\circ$$

e a elevação ou altura solar é dada por

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

$$\sin \alpha = \sin(-19.6) \sin 10 + \cos(-19.6) \cos 10 \cos(-45) = 0.87$$

$$\alpha = \arcsin 0.87 = 60^\circ$$

- d) Usando o modelo de decomposição de Reindl, estime a irradiância difusa e a irradiância direta.**

Os modelos de decomposição estimam a fração de radiação difusa k_d com o índice de claridade $k_t \equiv I/I_0$, em que I é a irradiância global na superfície (considerando o efeito da atmosfera) e I_0 é a irradiância no topo da atmosfera (não considerando o efeito da atmosfera).

No caso particular de Reindl temos:

$$k_d \equiv \frac{I_d}{I} = \begin{cases} 1.012 - 0.248 k_t & \Leftarrow k_t \leq 0.3 \\ 1.45 - 1.67 k_t & \Leftarrow 0.3 < k_t \leq 0.78 \\ 0.147 & \Leftarrow k_t > 0.78 \end{cases}$$

Para estimar a irradiância difusa em Maracaibo precisamos, portanto, de estimar a irradiância extraterrestre para as 15h00 do dia 28 de fevereiro.

Desprezando a excentricidade temos

$$I_0 = I_{SC} \cos \theta_z = 1366 \cos(90 - \alpha) = 1366 \cos(90 - 60) = 1182 \text{ W/m}^2$$

e, portanto, o índice de claridade é

$$k_t = \frac{I}{I_0} = \frac{650}{1182} = 0.55$$

De acordo com a expressão para o modelo de decomposição de Reindl, para um valor intermédio de k_t temos

$$k_d = \frac{I_d}{I} = 1.45 - 1.67 k_t = 1.45 - 1.67 \times 0.55 = 0.53$$

ou seja, a essa hora mais de metade da irradiância medida em Maracaibo era irradiância difusa.

Daqui resulta

$$I_d = k_d I = 0.53 \times 650 = 346 \text{ W/m}^2$$

A irradiância direta I_b (com índice b de *beam*, muitas vezes também representada como DNI de *direct normal irradiance*) pode ser determinada a partir de

$$I = I_b \cos \theta + I_d$$
$$I_b = \frac{I - I_d}{\cos \theta} = \frac{650 - 346}{0.87} = 349 \text{ W/m}^2$$

10. A Estação de Investigação Polar Halley, na Antártica, com coordenadas (-75.58 S, -26.73 W) encontra-se numa planície gelada.

a) Determinar a duração em dias da noite de inverno.

Para determinar a duração da noite de inverno em Polar Halley precisamos de determinar o dia (ou, de forma equivalente, a declinação) em que começa e que acaba.

Considere-se então a equação para a altura solar

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

No início (ou fim) da noite de inverno temos altura solar zero ao meio-dia solar e portanto

$$\sin 0 = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos 0$$

$$0 = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi$$

$$\sin \delta \sin \phi = -\cos \delta \cos \phi$$

$$\tan \delta = -\frac{1}{\tan \phi}$$

$$\delta = \arctan\left(-\frac{1}{\tan \phi}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{\tan 76}\right) = 14^\circ$$

Existem dois dias no ano para os quais a declinação tem este valor (isto é verdade para qualquer valor da declinação, exceto nos solstícios) que podem ser calculados recordando que

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$14 = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$\frac{360}{365}(d + 284) = \arcsin\frac{14}{23.45}$$

$$\frac{360}{365}(d + 284) = 36.7^\circ \quad \vee \quad \frac{360}{365}(d + 284) = 180 - 36.7^\circ$$

porque a função seno é simétrica relativa a 90° .

Daqui resulta

$$d + 284 = 37.2 \quad \vee \quad d + 284 = 145.3$$

$$d = -246.8 \quad \vee \quad d = -138.7$$

Somando 365 para termos um dia juliano positivo (i.e., fazendo uma 'translação' de 1 ano) temos

$$d = 118.2 \quad \vee \quad d = 226.3$$

Logo a duração da noite é $226 - 118 = \mathbf{108 \text{ dias}}$.

Notar que o solstício de inverno (porque estamos no hemisfério sul, 21 junho, dia juliano 172) corresponde ao máximo da declinação (i.e., o 'eixo de simetria' da noite de inverno) e é o ponto médio entre as duas datas.

Se não tivéssemos notado que a função \arcsin é uma função simétrica em torno de 90° , e por isso com duas soluções quando se considera todo o período completo da função, teríamos apenas uma solução (correspondente ao princípio da noite de inverno, dia 118). Nesse caso teríamos que 'contar' o período entre essa data e o solstício (dia 172) e multiplicado por dois para ter a duração completa da noite de inverno. O resultado seria naturalmente o mesmo.

b) Qual o ângulo de incidência numa superfície vertical orientada a norte no dia do equinócio às 8:00, hora solar.

No dia do equinócio $\delta = 0$.

As 8h00 corresponde ao ângulo solar

$$\omega = 15 (12 - h)$$

$$\omega = 15 (12 - 8) = 60^\circ$$

e, portanto, o ângulo de incidência numa superfície vertical orientada a norte (o que na antártica quer dizer orientada para o equador) pode ser determinado por

$$\cos \theta = \sin \delta \sin(\phi - \beta) + \cos \delta \cos(\phi - \beta) \cos \omega$$

$$\cos \theta = \sin 0 \sin(76 - 90) + \cos 0 \cos(76 - 90) \cos 60$$

$$\cos \theta = \cos(76 - 90) \cos 60 = 0.48$$

$$\theta = \arccos 0.48 = \mathbf{61.0^\circ}$$

c) Considerando que a refletividade da neve é 0.9, determinar a irradiância direta e refletida que chega à essa superfície vertical a essa hora se a irradiância DNI é 300 W/m².

A irradiância direta que chega à superfície vertical é simplesmente

$$I_{b\beta} = I_b \cos \theta = 300 \times 0.48 = \mathbf{145 \text{ W/m}^2}$$

A irradiância refletida que chega à superfície vamos considerar que a reflexão na neve é difusa e por isso isotrópica. Nesse caso precisamos de saber qual a irradiância no solo e portanto vamos calcular o ângulo zenital

$$\cos \theta_z = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

$$\cos \theta_z = \sin 0 \sin \phi + \cos 0 \cos \phi \cos \omega$$

$$\cos \theta_z = \cos \phi \cos \omega = \cos 76 \cos 60 = 0.15$$

$$\theta_z = \arccos 0.15 = 83.1^\circ$$

Agora podemos escrever

$$I_{r\beta} = \rho (I_b \cos \theta_z) \frac{1 - \cos \beta}{2} = 0.9 \times 300 \times 0.15 \times \frac{1}{2} = \mathbf{20.9 \text{ W/m}^2}$$

onde assumimos que a radiação difusa pode ser desprezada e por isso a irradiância que chega ao solo é apenas a irradiância direta, corrigida pelo ângulo de incidência.

A irradiância total na parede é naturalmente a soma das duas componentes:

$$I_\beta = I_{b\beta} + I_{r\beta} = 145 + 21 = \mathbf{166 \text{ W/m}^2}$$

d) Calcular a irradiação extraterrestre que chegaria a uma superfície horizontal ao longo do dia do equinócio.

A irradiação ao longo de um dia numa superfície horizontal pode ser calculada por

$$H_0 = \frac{24}{\pi} I_{sc} E_0 \left(\frac{\pi}{180} \omega_s \sin \delta \sin \beta + \cos \delta \cos \beta \sin \omega_s \right)$$

Tratando-se do equinócio (pode ser qualquer um deles porque o resultado vai ser igual e por isso escolhemos o primeiro do ano, 31 de março, $d = 80$) sabemos que $\delta = 0$, $\omega_s = 90^\circ$.

Também podemos calcular a excentricidade da órbita

$$E_0 = 1 + 0.033 \cos \left(\frac{2\pi d}{365} \right)$$

$$E_0 = 1 + 0.033 \cos \left(\frac{2\pi \times 80}{365} \right) = 1.006$$

e, portanto, estamos aptos a calcular a irradiação diária extraterrestre no equinócio:

$$H_0 = \frac{24}{\pi} 1366 \times 1.006 \left(\frac{\pi}{180} 90 \sin 0 \sin 0 + \cos 0 \cos 0 \sin 90 \right)$$

$$H_0 = \frac{24}{\pi} 1366 \times 1.006 = 11098 = \mathbf{11 \text{ kWh/m}^2}$$

A irradiação extraterrestre ao longo do equinócio é pois de 11 horas-de-sol. Na realidade, considerando o efeito da atmosfera a irradiação diária deveria ser bem menor.

11. Para o dia 15 de março em Xangai, China (31 N, 121 E).

a) Determinar a radiação extraterrestre entre as 10h e as 11h.

A irradiação horária pode ser calculada através da equação seguinte:

$$I_0|_{t_1}^{t_2} = I_{sc} E_0 \left((t_2 - t_1) \sin \delta \sin \phi + \frac{12}{\pi} (\sin(15 t_1) - \sin(15 t_2)) \cos \delta \cos \phi \right)$$

em que t_1 e t_2 são medidos em horas, a contar a partir da meia-noite mas que têm que ser durante o dia. Neste caso concreto temos

$$t_1 = 10$$

$$t_2 = 11$$

O dia 15 de março é o dia 74 e por isso a declinação é

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{360}{365} (d + 284) \right) = 23.45 \sin \left(\frac{360}{365} (74 + 284) \right) = -15.7^\circ$$

e a excentricidade da orbita é

$$E_0 = 1 + 0.033 \cos \left(\frac{2\pi d}{365} \right) = 1 + 0.033 \cos \left(\frac{2\pi \times 74}{365} \right) = 1.031$$

Temos então

$$I_0|_{t_1}^{t_2} = I_{sc} E_0 \left((t_2 - t_1) \sin \delta \sin \phi + \frac{12}{\pi} (\sin(15 t_1) - \sin(15 t_2)) \cos \delta \cos \phi \right)$$

$$I_0|_{10}^{11} = 1366 \times 1.031 \left((11 - 10) \sin(-15.7) \sin 31 \right. \\ \left. + \frac{12}{\pi} (\sin(15 \times 10) - \sin(15 \times 11)) \cos(-15.7) \cos 31 \right)$$

$$I_0|_{10}^{11} = \mathbf{1052 \text{ Wh/m}^2}$$

ou seja, a irradiação extraterrestre durante essa hora é pouco mais do que uma hora-de-sol.

- b) Estimar a irradiância global às 10h30, sabendo que a irradiação global diária nesse dia foi 5400 Wh/m².

Para determinar a irradiância global (que considera o efeito da atmosfera) num dado instante sabendo a irradiação global diária podemos usar o modelo de Collares Pereira que permite determinar o quociente entre a média da irradiância global \bar{I}_t para a hora ω e a irradiação média diária \bar{H}_t considerando apenas a hora de nascer/pôr do sol:

$$r_t(\omega) \equiv \frac{\bar{I}_t}{\bar{H}_t} \approx \frac{\bar{I}_t}{H_t} = \frac{\pi}{24} (a + b \cos \omega) \frac{\cos \omega - \cos \omega_s}{\sin \omega_s - \left(\frac{\pi}{180} \omega_s \cos \omega_s\right)}$$

com

$$a = 0.409 + 0.5016 \sin(\omega_s - 60^\circ)$$

$$b = 0.6609 - 0.4676 \sin(\omega_s - 60^\circ)$$

Notar que esta aproximação pressupõe que o dia em concreto é típico, ou seja, a irradiação diária desse dia é comparável com a irradiação diária média $H_t \approx \bar{H}_t$.

Para o nosso caso concreto para o dia 15 de março temos

$$\omega = 15 (12 - h) = 15 (12 - 10.5) = 22.5^\circ$$

e

$$\omega_s = \arccos(-\tan \phi \tan \delta)$$

$$\omega_s = \arccos(-\tan 31 \tan(-15.7)) = 80.3^\circ$$

e portanto

$$a = 0.409 + 0.5016 \sin(\omega_s - 60^\circ) = 0.409 + 0.5016 \sin(80.3 - 60^\circ) = 0.583$$

$$b = 0.6609 - 0.4676 \sin(\omega_s - 60^\circ) = 0.6609 - 0.4676 \sin(80.3 - 60^\circ) = 0.499$$

donde

$$\bar{I}_t = \bar{H}_t \left(\frac{\pi}{24} (a + b \cos \omega) \frac{\cos \omega - \cos \omega_s}{\sin \omega_s - \left(\frac{\pi}{180} \omega_s \cos \omega_s\right)} \right)$$

$$\bar{I}_t = 5400 \left(\frac{\pi}{24} (0.583 + 0.499 \cos 22.5) \frac{\cos 22.5 - \cos 80.3}{\sin 80.3 - \left(\frac{\pi}{180} 80.3 \cos 80.3\right)} \right)$$

$$\bar{I}_t = 5400 \times 0.13 \times 1.01 = \mathbf{743.8 \text{ W/m}^2}$$

c) Estimar a irradiância difusa e direta a essa hora.

Da alínea a) sabemos que a irradiação extraterrestre entre as 10 e as 11h é 1052 Wh/m^2 logo a irradiância terrestre às 10h30 é 1052 W/m^2 .

Da alínea b) sabemos que a irradiação global a essa hora é 744 W/m^2 .

Podemos calcular o índice de claridade, a razão entre a irradiância global medida na superfície e a irradiância extraterrestre

$$k_t = \frac{I}{I_0} = \frac{744}{1052} = 0.70$$

e em seguida podemos estimar a irradiância difusa usando, por exemplo, o modelo de Reindl temos:

$$k_d \equiv \frac{I_d}{I} = \begin{cases} 1.012 - 0.248 k_t & \Leftarrow k_t \leq 0.3 \\ 1.45 - 1.67 k_t & \Leftarrow 0.3 < k_t \leq 0.78 \\ 0.147 & \Leftarrow k_t > 0.78 \end{cases}$$

Assim, a irradiância difusa I_d pode ser estimada por

$$\frac{I_d}{I} = 1.45 - 1.67 k_t = 0.27$$

$$I_d = 0.27 I = 0.27 \times 744 = \mathbf{200 \text{ W/m}^2}$$

Já a irradiância direta I_b na horizontal é dada por

$$I = I_b + I_d$$

$$I_b = I - I_d = 744 - 200 = \mathbf{544 \text{ W/m}^2}$$

12. Qual é a temperatura de emissão da Lua? (albedo = 0.12)

A distância média entre Lua e Sol é igual à distância da Terra ao Sol (porque a Lua é um satélite da Terra e, por isso, orbita em torno do nosso planeta) e, portanto, a irradiância é $S_0 = 1366 \text{ W/m}^2$. A Lua deve estar em equilíbrio radiativo e, portanto, a radiação absorvida deve ser igual à radiação emitida.

Como não temos a complicação extra da atmosfera e do efeito estufa temos apenas

$$(1 - \alpha)S_0\pi R^2 = 4\pi R^2\sigma T^4$$

em que o termo da esquerda descreve a energia absorvida (igual à energia incidente menos a refletida) e o termo da direita descreve a emissão. Não precisamos de saber o raio da lua R porque aparece dos dois lados da equação. Reparar também que do lado da radiação absorvida a área relevante é a do círculo (para o Sol a Lua é um círculo) mas do lado da emissão é a área de uma esfera.

A equação anterior pode ser reescrita em função da temperatura:

$$T^4 = \frac{(1 - \alpha)S_0\pi R^2}{4\pi R^2\sigma} = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{(1 - 0.12) 1366}{4 \times 5.6 \times 10^{-8}}} = 264 \text{ K}$$

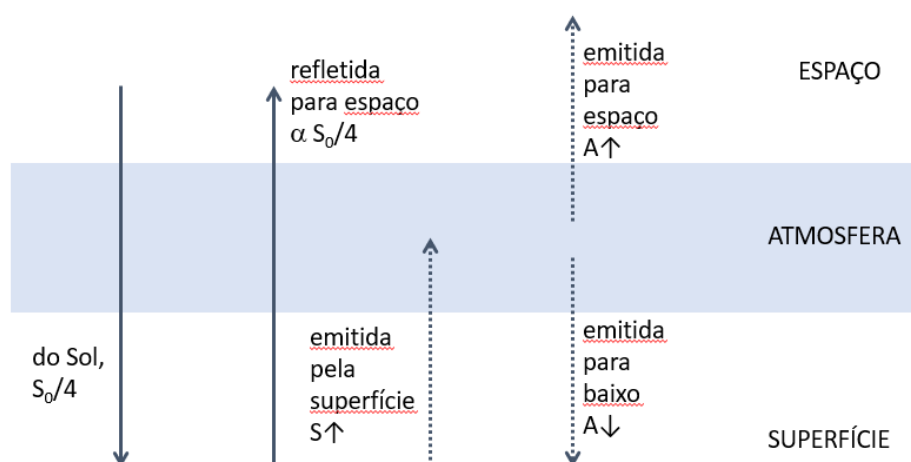
Nota: o que acabámos de estimar é a temperatura média da Lua; a Lua apresenta amplitudes térmicas enormes entre a região iluminada (que pode atingir 400 K) e a região à sombra (que pode descer até 140 K).

13. Sem a cobertura de neve e gelo da Gronelândia e Antártica, o albedo terrestre seria de 27%. Determine o efeito que isso teria na temperatura da superfície terrestre, mantendo o equilíbrio radiativo da atmosfera.

No planeta Terra, ao contrário da Lua, temos uma atmosfera que altera o equilíbrio radiativo através do efeito de estufa. Uma aproximação simplista (e que sabemos sobrestimar a temperatura da superfície da Terra) é considerar que

- a) a atmosfera é transparente à radiação solar, mas
- b) a atmosfera é opaca à radiação térmica emitida pelo planeta.

Neste caso temos de resolver simultaneamente o equilíbrio radiativo da superfície e da atmosfera. Para o efeito podemos considerar a seguinte nomenclatura. Na figura setas com linhas sólidas refere-se à radiação com o espectro solar e as setas a tracejado a radiação emitida pela superfície ou atmosfera.



Temos então

$$\text{Superfície: } (1 - \alpha)S_0 + A \downarrow = S \uparrow$$

$$\text{Atmosfera: } S \uparrow = A \downarrow + A \uparrow$$

em que

$$S \uparrow = \sigma T_s^4 \text{ e}$$

$$A \uparrow = A \downarrow = \sigma T_a^4$$

sendo T_s a temperatura da superfície e T_a a temperatura da atmosfera.

Substituindo temos

$$\text{Superfície: } (1 - \alpha)S_0 + \sigma T_a^4 = \sigma T_s^4$$

$$\text{Atmosfera: } \sigma T_s^4 = 2 \sigma T_a^4$$

De onde resulta:

$$\sigma T_a^4 = \frac{1}{2} \sigma T_s^4$$

$$(1 - \alpha)S_0 + \frac{1}{2} \sigma T_s^4 = \sigma T_s^4$$

$$(1 - \alpha)S_0 = \frac{1}{2} \sigma T_s^4$$

$$T_s^4 = 2 \frac{(1 - \alpha)S_0}{\sigma}$$

$$T_s = \sqrt[4]{2 \frac{(1 - \alpha)S_0}{\sigma}}$$

$$T_s = \sqrt[4]{2 \frac{(1 - 0.3) 340}{5.6 \times 10^{-8}}} = \sqrt[4]{2} \times 255 = 303 \text{ K}$$

Com estas aproximações, para um albedo de 0.30 a temperatura da superfície da Terra é 303 K (ou 30 °C, que sabemos ser um valor demasiado elevado para a realidade). Se o albedo fosse um pouco menor devido ao desaparecimento da cobertura de neve e gelo da Gronelândia e Antártica do gelo o efeito seria

$$T_s = \sqrt[4]{2 \frac{(1 - 0.27) 340}{5.6 \times 10^{-8}}} = 306 \text{ K}$$

Ou seja, o efeito da alteração do albedo é um aumento de temperatura média de +3°C.

Comparando com o aumento de temperatura média da Terra associada às emissões antropogénicas de gases de efeito de estufa (+1.5 a 2.0 °C, se tudo correr pelo melhor) podemos observar que o efeito da alteração do albedo poderia ser devastador.

Nota: A amplitude do efeito da variação do albedo na temperatura da superfície é o mesmo se considerarmos um modelo para o equilíbrio radiativo mais sofisticado.

14. O efeito da erupção do vulcão Pinatubo em 1992 na temperatura média do planeta foi estimado num arrefecimento de 0.5 °C durante os 2 anos seguintes à erupção. Determine a variação do albedo médio do planeta devido à erupção.

A abordagem pode ser igual à da pergunta anterior sendo agora a variável desconhecida o albedo e a diferença de temperatura dada.

Nesta equação $\alpha_1 = 0.30$ é o albedo “normal” da Terra e α_2 o albedo temporário que resultou do Pinatubo.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{2 \frac{(1 - \alpha_1) 340}{5.6 \times 10^{-8}}} - \sqrt[4]{2 \frac{(1 - \alpha_2) 340}{5.6 \times 10^{-8}}} &= -0.5 \\ \sqrt[4]{2 \frac{(1 - \alpha_2) 340}{5.6 \times 10^{-8}}} &= \sqrt[4]{2 \frac{(1 - 0.30) 340}{5.6 \times 10^{-8}}} + 0.5 = 303.5 + 0.5 = 304 \\ 2 \frac{(1 - \alpha_2) 340}{5.6 \times 10^{-8}} &= 304^4 \\ 1 - \alpha_2 &= \frac{304^4 \times 5.6 \times 10^{-8}}{2 \times 340} \\ \alpha_2 &= 0.295 \end{aligned}$$

Ou seja, o efeito das poeiras e gases do vulcão Pinatubo correspondeu a uma redução do albedo de 0.30 para 0.295 (cerca de 1.5% em termos relativos).

[Este resultado tão relevante de uma pequena alteração do albedo é uma boa motivação para explorar soluções de *geoengineering*... apesar de todos os riscos que poderia envolver!]

FORMULÁRIO UTILIZADO NESTA SÉRIE DE PROBLEMAS

$$\cos \psi = \frac{\sin \alpha \sin \phi - \sin \delta}{\cos \alpha \cos \phi}$$

$$\sin \psi = \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos \alpha}$$

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$E_0 = 1 + 0.033 \cos\left(\frac{2\pi d}{365}\right)$$

$$\omega_s = \arccos(-\tan \phi \tan \delta)$$

$$\omega = 15 (12 - h)$$

$$\text{Hora local} = \text{Hora solar} - EOT + \frac{LSM - LONG}{15}$$

$$EOT(\text{mins}) = -7.655 \sin\left(\frac{360}{365}d\right) + 9.873 \sin\left(2\frac{360}{365}d + 205.7\right)$$

$$GI(\beta) = DNI \cos \theta + \rho GHI \frac{1 - \cos \beta}{2} + DHI \frac{1 + \cos \beta}{2}$$

$$H_0 = \frac{24}{\pi} I_{sc} E_0 \left(\frac{\pi}{180} \omega'_s \sin \delta \sin(\phi - \beta) + \cos \delta \cos(\phi - \beta) \sin \omega'_s \right)$$

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega$$

$$\cos \theta = \sin \delta \sin(\phi - \beta) + \cos \delta \cos(\phi - \beta) \cos \omega$$

$$\omega'_s = \min\{\arccos(-\tan \phi \tan \delta), \arccos(-\tan(\phi - \beta) \tan \delta)\}$$

$$I_0|_{t_1}^{t_2} = I_{sc} E_0 \left((t_2 - t_1) \sin \delta \sin \phi + \frac{12}{\pi} (\sin(15 t_1) - \sin(15 t_2)) \cos \delta \cos \phi \right)$$

$$k_d \equiv \frac{I_d}{I} = \begin{cases} 1.012 - 0.248 k_t & \Leftarrow k_t \leq 0.3 \\ 1.45 - 1.67 k_t & \Leftarrow 0.3 < k_t \leq 0.78 \\ 0.147 & \Leftarrow k_t > 0.78 \end{cases}$$

$$r_t(\omega) \equiv \frac{\bar{I}_t}{\bar{H}_t} \approx \frac{\bar{I}_t}{H_t} = \frac{\pi}{24} (a + b \cos \omega) \frac{\cos \omega - \cos \omega_s}{\sin \omega_s - \left(\frac{\pi}{180} \omega_s \cos \omega_s\right)}$$

$$a = 0.409 + 0.5016 \sin(\omega_s - 60^\circ)$$

$$b = 0.6609 - 0.4676 \sin(\omega_s - 60^\circ)$$