UNIVERSIDADE DE LISBOA - FCUL

FÍSICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Problemas - Série 3
Escoamento potencial

1. Um circuito fechado C de partículas de fluido é dado por, em $t = 0$,

$$\mathbf{x} = (a\cos s, a\sin s, 0), \quad 0 \le s \le 2\pi, \tag{1}$$

de forma que a cada valor de s entre 0 e 2π corresponde a uma particula de fluido. Sendo $C(t)$ dado por:

$$\mathbf{x} = (a\cos s + a\alpha t\sin s, a\sin s, 0), \quad 0 \le s \le 2\pi. \tag{2}$$

a) Calcule a velocidade $\mathbf{u}(s,\, t)$ de cada partícula de fluido, e mostre que as partículas em $s = 0$ e $s = \pi$ permanecem em repouso. b) Calcule a aceleração de cada partícula de fluido, mostre que $\mathbf{u} = (\alpha y,\, 0,\, 0)$, e esboçe a forma como $C(t)$ muda com o tempo. c) Por definição,

$$\Gamma = \int_{C(t)} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \mathbf{u}\cdot\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial s}ds. \tag{3}$$

Calcule o último integral explicitamente no instante t e confirme que é independente de t, de acordo com o teorema de Kelvin.

2. a) Mostre que numa região simplesmente conexa de um escoamento irrotacional o integral $\phi = \int_O^P \mathbf{u}\cdot d\mathbf{x}$ é independente do caminho entre O e P.
b) Mostre que numa região simplesmente conexa de um escoamento bidimensional e incompressível o integral

$$\psi = \int_O^P u\,dy - v\,dx \tag{4}$$

é independente do caminho entre O e P e portanto pode-se usar como definição da função de corrente.

3. Considere o potencial de escoamento em coordenadas polares $\phi = Br^2\cos(2\theta)$ onde B é uma constante. a) Mostre que o campo de velocidades satisfaz a equação da continuidade e, portanto, existe uma função de corrente ψ. b) Determine $\psi(r,\, \theta)$. c) Determine o ponto de estagnação.

4. Considere uma fonte de fluido pontual na posição $(d, 0, 0)$, em coordenadas cartesianas. A fonte é colocada perto de uma parede sólida em $x = 0$.

a) Escreva o potencial de escoamento que satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$, na ausência da parede.

b) Mostre que a solução que satisfaz as condições de fronteira (especifique) na presença da parede é obtida adicionando à solução anterior uma fonte virtual, com a mesma intensidade, em $(-d, 0, 0)$ (método das imagens).

c) Calcule o campo de velocidades em coordenadas polares.

d) Determine os pontos de estagnação.

e) Calcule a força na parede exercida pelo fluido. Justifique a direção e sentido desta força.

5. Considere uma linha de vórtices na posição (x,y) = (d,0) em coordenadas cartesianas e com circulação no sentido direto igual a Γ. A linha é colocada perto de uma parede sólida que está em $x = 0$.
   a) Escreva o potencial de escoamento que satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$, na ausência da parede.
   b) Mostre que a solução que satisfaz as condições de fronteira (especifique) na presença da parede pode ser obtida adicionando à solução anterior uma linha de vórtices virtual, com circulação -Γ, em $(-d, 0)$. Faça um esquema e explique cuidadosamente o método de solução e justifique a sua validade. O que significa o sinal negativo na circulação da linha de fontes virtual?
   c) Calcule o campo de velocidades ao longo da parede sólida. Há ponto(s) de estagnação? Se sim, onde?
   d) O que acontece se a linha de vórtices real não estiver fixa? Justifique a sua resposta com a ajuda de gráficos ou de esquemas, usando argumentos baseados nas equações para o campo de velocidades, mas não é necessário realizar todos os cálculos.

6. Considere um escoamento irrotacional de um fluido ideal, com velocidade uniforme U no infinito, através de um cilindro de raio a.

   a) Mostre que o potencial de escoamento satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$.

   b) Mostre que a solução que satisfaz as condições de fronteira apropriadas (especifique) é dada por
$$\phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta. \tag{5}$$
   e calcule o campo de velocidades em coordenadas polares.

   c) Considere agora que existe circulação Γ no sentido horário em torno do cilindro, e obtenha uma expressão para o potencial de escoamento e os pontos de estagnação. Compare com o caso em que a circulação é zero.

   d) Calcule a função de corrente para o cilindro em rotação e use-a para desenhar (com um software gráfico) quatro linhas de corrente próximas do cilindro para $\Gamma/(2\pi Ua) = 3$.

   e) Calcule a força que atua no cilindro na direção perpendicular à velocidade U, quando a circulação é Γ. Compare com o caso em que a circulação é zero.

   f) Compare os resultados das alíneas anteriores com os resultados para uma circulação no sentido anti-horário.

7. Considere um cilindro em escoamento extensional, cujo potencial de escoamento é $\phi(r, \theta) = (Ar^2 + Br^{-2})cos(2\theta)$.

   a) Mostre que o potencial de escoamento satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$, em coordenadas cilíndricas.

   b) Calcule o campo de velocidades, impondo as condições de fronteira adequadas.

   c) Esboce as linhas de corrente.

   d) Calcule o limite do campo de velocidades para distâncias muito maiores do que o raio do cilindro, a, e justifique o termo usado para o escoamento. Sugestão: use coordenadas cartesianas.

   e) Calcule a força exercida pelo fluido na superfície do cilindro.

8. Um hemisfério sólido de raio a está sobre uma superfície plana na presença de uma corrente livre U (ver figura 1). Suponha que o escoamento é irrotacional e o fluido é ideal.

   a) Mostre que o potencial de escoamento satisfaz a equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$.

b) Calcule o potencial de escoamento usando as condições de fronteira apropriadas (especifique) e calcule o campo de velocidades em coordenadas esféricas. Há pontos de estagnação?

c) Calcule a função de corrente. Use-a para desenhar (com um software gráfico) cinco linhas de corrente próximas do hemisfério e ao longo do plano central (paralelo ao escoamento e que passa pelo centro do hemisfério).

d) Calcule a força de elevação e de arrasto. Discuta.

e) Mostre que a densidade do material deve ser

$$\rho_h \geq \rho \left(1 + \frac{33U^2}{64ag}\right) \tag{6}$$

para que o sólido se mantenha sobre a superfície.

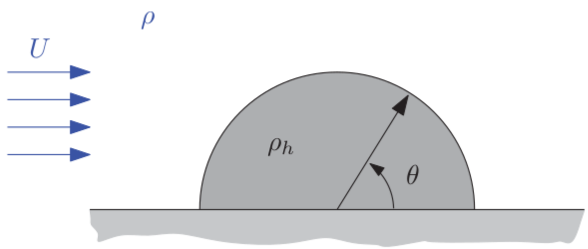

Figure 1: Hemisfério.

9. a) Vento no infinito, com velocidade U_∞ e pressão p_∞, passa por uma cabana de Quonset descrita pela superfície de um meio cilindro de raio a e comprimento L (Fig. 2). A pressão interna é p_i. Usando a teoria para fluidos invíscidos, calcule a força de elevação na cabana devido à diferença entre p_i e p_s.
   b) Em ventos fortes, a força no problema da alínea "a" pode ser bastante grande. Suponha que um orifício é introduzido no teto da cabana no ponto A (Fig. 2) para tornar p_i igual a p_A na superfície. Em que ângulo θ deve ser colocado este orifício para tornar a força resultante nula?

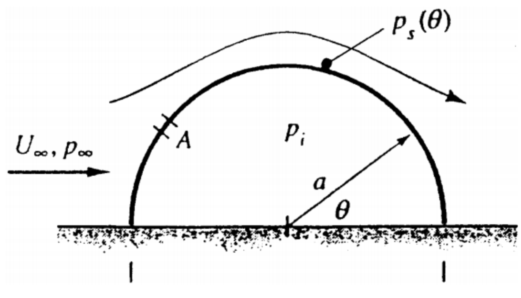

Figure 2: Cabana de Quonset.

10. Considere o escoamento do ar através de um hemisfério sobre uma superfície plana, como na Fig. 3. Se a pressão interna for p_i, calcule a força no hemisfério causada pelo escoamento. Por analogia com o problema anterior, em que ponto A no hemisfério deve ser colocado um orifício de modo a que a força resultante se anule? Considere o fluido como sendo ideal.

11. Considere o escoamento de um fluido ideal sobre uma esfera. Determine a) o ponto na superfície frontal onde a aceleração do fluido a_{max} é máxima; e b) a magnitude de a_{max}. c) Se a velocidade do fluido for 1 m/s, calcule o diâmetro da esfera para o qual a_{max} é dez vezes a aceleração da gravidade. Comente.

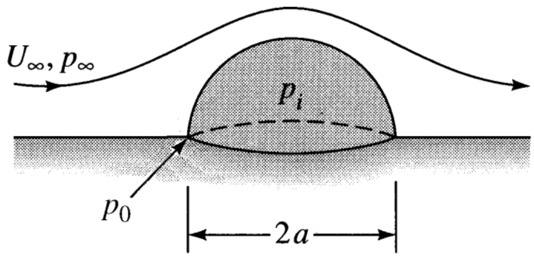

Figure 3: Hemisfério 2.

12. a) Para um vórtice de linha dado por

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\theta} \tag{7}$$

calcule o potencial de escoamento ϕ e a função de corrente ψ e mostre que o potencial complexo é dado por

$$w = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z), \tag{8}$$

onde $z = re^{i\theta}$.

b) O campo de velocidades

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r}, \quad u_\theta = 0, \tag{9}$$

onde Q é uma constante, corresponde ao campo de velocidades de uma linha de fontes se $Q > 0$ ou de sumidouros se $Q < 0$. a) Mostre que o escoamento é irrotacional e que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ exceto para $r = 0$, onde a velocidade não é definida. b) Determine o potencial de escoamento e a função de corrente e mostre que o potencial complexo é

$$w = \frac{Q}{2\pi}\log(z). \tag{10}$$