

Descritores das ondas e equação da onda

Da descrição da perturbação à equação que governa a propagação



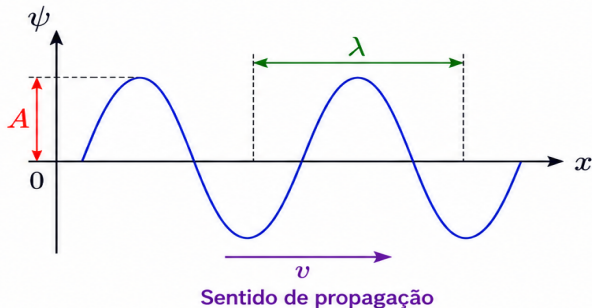
- Descritores das ondas
- Amplitude e fase
- Velocidade de propagação
- Dedução da equação da onda
- Generalização e significado físico
- Condições iniciais e propagação

O que caracteriza uma onda?

- Uma onda é uma **perturbação** que se propaga no espaço e no tempo.
- Depende da **posição** x e do **tempo** t .
- **Transporta energia** sem transporte líquido de matéria.

Onda harmónica progressiva

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$$



A – amplitude

k – número de onda

λ – comprimento de onda

v – velocidade de propagação

Frequência angular

- A **frequência angular**, denotada por ω , está relacionada com a frequência f por

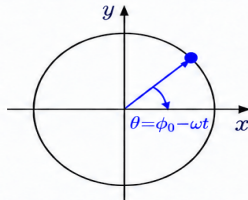
$$\omega = 2\pi f$$

- Unidade SI:** rad s^{-1}
(radianos por segundo).
- Significado físico:**
 ω mede a rapidez com que a fase da oscilação evolui no tempo.
- Uma oscilação completa corresponde a uma variação de fase de 2π rad.

Relação com o período

Como $f = \frac{1}{T_{osc}}$, então $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_{osc}}$

Representação no círculo unitário

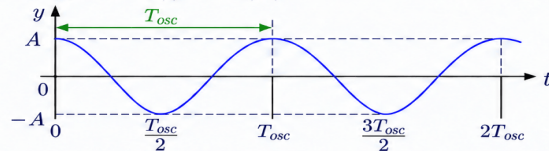


A projeção do raio sobre o eixo y dá a oscilação:

$$y = A \sin(\theta) = A \sin(\phi_0 - \omega t)$$

Evolução temporal

Para $\phi_0 = \pi/2$: $y(t) = A \cos(\omega t)$



Exemplo numérico

Se $f = 10$ Hz, então

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10 = 20\pi \text{ rad s}^{-1} \approx 62,8 \text{ rad s}^{-1}$$

Comprimento de onda

- **Definição**

O comprimento de onda, denotado por λ , é a distância entre dois pontos consecutivos da onda que se encontram na mesma fase.

- **Unidade SI**

metro (m).

- **Relação com o número de onda**

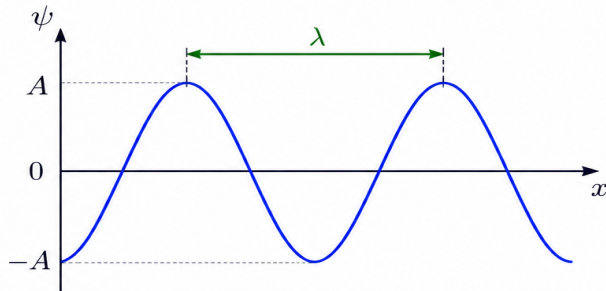
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- **Significado físico**

Indica a periodicidade espacial da onda.

Onda harmónica progressiva

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$$

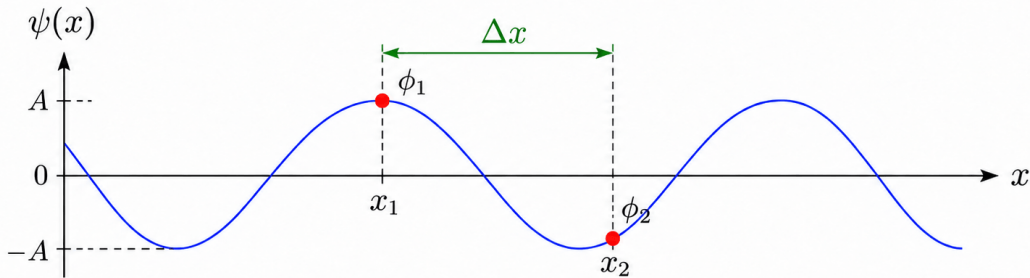


- **Relação com a velocidade de propagação**

$$v = f\lambda = \frac{\omega}{k}$$

Diferença de fase

Dois pontos de uma onda podem oscilar com **fases diferentes**.



$$\Delta\phi = k \Delta x$$

Se $\Delta x = \lambda$, então $\Delta\phi = 2\pi$.

A diferença de fase mede quanto duas posições da onda estão desfasadas entre si.

Velocidade de propagação

- **O que é?**

A velocidade de propagação v é a rapidez com que uma fase constante da onda se desloca no espaço.

- **Fase constante**

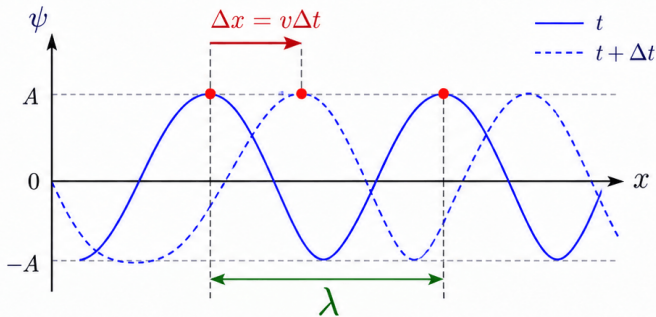
$$kx - \omega t + \phi_0 = \text{constante}$$

- **Velocidade de propagação**

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = f\lambda$$

O movimento de uma fase constante

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$$



A forma da onda desloca-se;
as partículas do meio apenas oscilam em torno do **equilíbrio**.

Um elemento de uma corda

Modela-se a corda como uma linha flexível e considera-se um elemento infinitesimal de comprimento dx .

- **Deslocamento transversal**

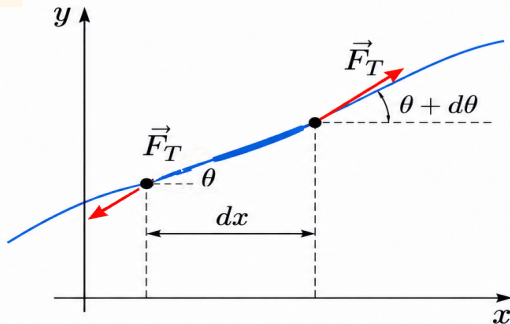
O elemento tem um deslocamento $y(x, t)$ na direção transversal.

- **Tensão na corda**

A corda está sujeita a uma tensão constante F_T .
A tensão faz ângulos θ e $\theta + d\theta$ com o eixo horizontal.

- **Pequenas inclinações**

Para pequenas inclinações, $|\theta| \ll 1$ e $|\theta + d\theta| \ll 1$.



Resumo

Comprimento do elemento

$$dx$$

Deslocamento transversal

$$y(x, t)$$

Tensão na corda

$$F_T$$

Ângulos (pequenos)

$$\theta \text{ e } \theta + d\theta$$

Forças nas extremidades

As tensões actuam nas extremidades de um elemento infinitesimal de corda. São tangentes à corda e dirigidas para fora do elemento.

Tensão na corda

No modelo de pequenas oscilações, o módulo F_T é constante. Os ângulos locais com o eixo horizontal são $\theta(x, t)$ e $\theta(x + dx, t)$.

Extremidade esquerda

A componente vertical da tensão é

$$F_{y,\text{esq}} = -F_T \sin \theta(x, t)$$

Extremidade direita

A componente vertical da tensão é

$$F_{y,\text{dir}} = F_T \sin \theta(x + dx, t)$$

Força vertical resultante

$$F_y = F_T [\sin \theta(x + dx, t) - \sin \theta(x, t)]$$

Para pequenas inclinações, $\sin \theta \simeq \tan \theta = \partial y / \partial x$.

$$F_y \simeq F_T \left[\frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right]$$

Da inclinação à força resultante

Para pequenas inclinações e tensão constante F_T , a diferença de inclinação entre as extremidades determina a força transversal.

$$F_y \simeq F_T \left[\frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right]$$

Expansão de Taylor da inclinação

A tempo fixo, expandimos em torno de x , até à primeira ordem em dx :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) \simeq \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) dx$$

Ao substituir, os termos de inclinação no ponto x cancelam-se:

$$F_y \simeq F_T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) dx$$

Significado físico

Uma inclinação constante dá força transversal nula. É a variação da inclinação — e não a inclinação em si — que produz a força resultante.

Aplicação da segunda lei de Newton

Força transversal resultante

As tensões nas extremidades produzem uma força vertical líquida sobre o elemento:

$$F_y = F_T \sin \theta(x + dx, t) - F_T \sin \theta(x, t).$$

Segunda lei de Newton

Para um elemento de massa $dm = \mu dx$:

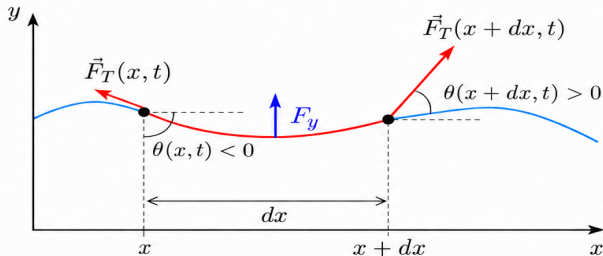
$$F_y = dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \mu dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}.$$

Pequenas inclinações

Para $|\theta| \ll 1$, $\sin \theta \approx \frac{\partial y}{\partial x}$.

Assim,

$$F_T \left[\frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right] = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$



Equação da onda

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{F_T}{\mu} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

Velocidade de propagação

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

F_T – tensão na corda (N)

μ – densidade linear de massa (kg m^{-1})

v – velocidade de propagação (m s^{-1})

A equação da onda

Para pequenas oscilações transversais numa corda ideal, o deslocamento transversal $y(x, t)$ obedece à **equação da onda**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Significado dos termos

- $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ – aceleração transversal de cada ponto da corda.
- $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ – curvatura local da corda.
- $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$ – velocidade de propagação das perturbações transversais.
 - F_T é a tensão na corda (N).
 - μ é a densidade linear de massa (kg m^{-1}).

Condições iniciais

Para determinar uma solução é necessário especificar, em $t = 0$,

- o deslocamento inicial:

$$y(x, 0) = f(x)$$

- a velocidade transversal inicial:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

Condições de fronteira (exemplos)

- Extremidades fixas em $x = 0$ e $x = L$:

$$y(0, t) = y(L, t) = 0$$

- Extremidade livre em $x = L$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$$

- Corda periódica:

$$y(0, t) = y(L, t), \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(L, t)$$

O significado físico da equação

Interpretação física dos termos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ — } \textbf{Aceleração transversal local.}$$

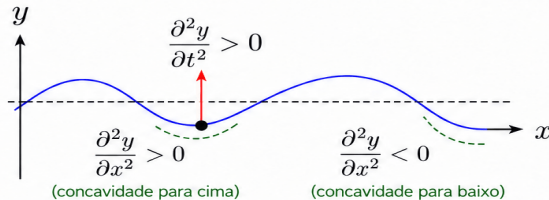
Indica como o elemento da corda, na posição x , muda a sua velocidade transversal no tempo.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ — } \textbf{Curvatura local da corda.}$$

Está relacionada com a inclinação da corda dos dois lados do ponto x e mede como esta inclinação varia no espaço.

Como a equação descreve a propagação

Se num instante a corda tem uma determinada forma (curvatura), a equação da onda diz-nos qual será a aceleração transversal de cada ponto nesse instante.



A curvatura determina o sinal da aceleração transversal

- Se $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$ (concavidade para cima)
 $\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} > 0$: o ponto acelera para cima.
- Se $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$ (concavidade para baixo)
 $\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} < 0$: o ponto acelera para baixo.

Generalização a três dimensões

Equação da onda em três dimensões

A perturbação escalar $\psi(\vec{r}, t)$, com $\vec{r} = (x, y, z)$, obedece à equação da onda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi$$

onde v é a velocidade de propagação da onda no meio.

Operador Laplaciano

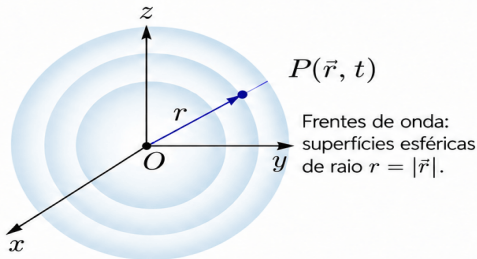
O Laplaciano em coordenadas cartesianas é

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Interpretação física

- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ – aceleração local da perturbação.
- $\nabla^2 \psi$ – curvatura espacial (3D) da perturbação.

Frentes de onda esféricas



Solução particular

Numa onda esférica, a amplitude decai como $1/r$:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{F(r - vt)}{r}$$

onde F é uma função arbitrária que descreve a forma do pulso.

Linearidade da equação da onda

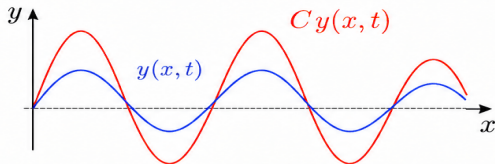
A equação da onda (1D)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

é **linear**.

Multiplicação por uma constante

Se $y(x, t)$ é solução, então $Cy(x, t)$ também é solução para qualquer constante C .



Significado físico

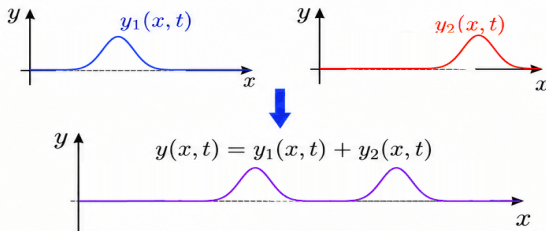
A amplitude pode ser multiplicada por uma constante, sem alterar a forma nem a velocidade de propagação.

Soma de soluções (princípio de sobreposição)

Se $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ são soluções, então

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

também é solução.



Significado físico

A resposta total é a soma das respostas individuais.

Porque precisamos de condições iniciais?

A equação das ondas

Numa dimensão:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}.$$

com $v = \sqrt{F_T/\mu}$ constante.

Condições iniciais

Para determinar uma solução única, é preciso especificar a perturbação e a sua velocidade inicial:

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad (\text{deslocamento inicial})$$

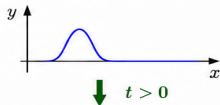
$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad (\text{velocidade inicial})$$

$$g(x) = -v y'_0(x) \quad (\text{condição para onda à direita})$$

Diferentes condições iniciais, diferentes soluções

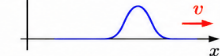
Se $g(x) = -v y'_0(x)$, os perfis propagam-se para a direita com velocidade v e mantêm a sua forma.

Perfil inicial: $y(x, 0) = y_{0,1}(x)$

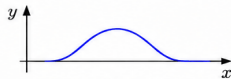


$t > 0$

$y(x, t) = y_{0,1}(x - vt)$

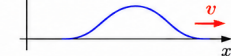


Perfil inicial: $y(x, 0) = y_{0,2}(x)$

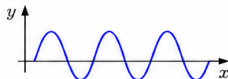


$t > 0$

$y(x, t) = y_{0,2}(x - vt)$

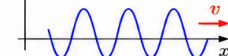


Perfil inicial: $y(x, 0) = y_{0,3}(x)$



$t > 0$

$y(x, t) = y_{0,3}(x - vt)$



Conclusão

Sem condições iniciais, existem infinitas soluções possíveis.

As condições iniciais determinam de forma única a evolução da perturbação para todos os instantes futuros.

Informação e Propagação

O que se propaga?

- O meio apenas oscila em torno das posições de equilíbrio.
- A onda transporta energia e quantidade de movimento.
- A **informação** (a forma da perturbação) é preservada e desloca-se com a velocidade v .

Sobreposição e informação

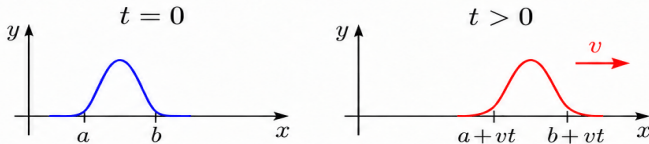
Quando existem várias ondas a propagar-se no mesmo meio:

O deslocamento total é a soma dos deslocamentos individuais.

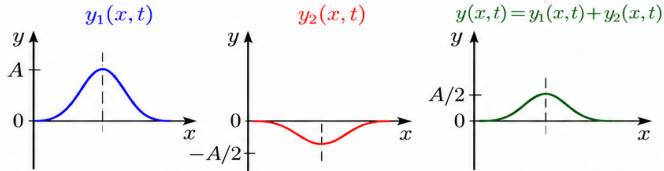
Onde os deslocamentos têm sinais opostos, cancelam-se parcialmente.

Exemplo: Pulso num instante posterior

Para um pulso que se desloca apenas para a direita com velocidade v , a velocidade inicial deve satisfazer $\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = -v \frac{\partial y(x, 0)}{\partial x}$



Com esta condição, o pulso mantém a sua forma e desloca-se para a direita com velocidade v .



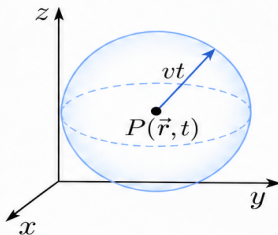
Domínio de dependência

Ideia principal

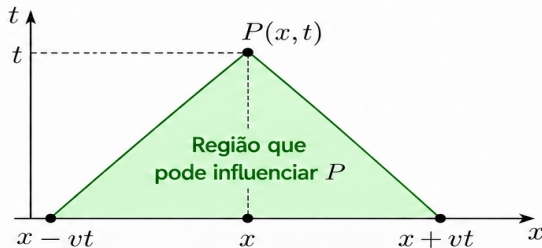
- A perturbação propaga-se com velocidade finita v .
- Um ponto P só é afectado pelo que acontece numa região limitada do espaço.
- A informação fora dessa região ainda não chegou a P no instante t .

Generalização a três dimensões

Em 3D, $P(\vec{r}, t)$ depende apenas dos dados iniciais na superfície da esfera de raio vt centrada em $\vec{r}$.



Domínio de dependência (1D)



Consequência

Em 1D, contam os dados iniciais no intervalo $[x - vt, x + vt]$.

Em 3D, contam os dados na superfície da esfera de raio vt .

A informação propaga-se com velocidade finita.

Exercício resolvido I

Problema: Uma corda de comprimento L com extremidade fixa em $x = 0$ e extremidade livre em $x = L$ tem uma velocidade de propagação $v = \sqrt{F_T/\mu}$ determinada pelas propriedades do meio. Determine os valores permitidos de k_n , ω_n e f_n para as ondas estacionárias nesta corda.

Solução geral

A solução da equação das ondas é a soma de duas ondas que se propagam em sentidos opostos:

$$y(x, t) = A_+ \cos(kx - \omega t) + A_- \cos(kx + \omega t)$$

Condições de fronteira

- Em $x = 0$ (extremidade fixa): $y(0, t) = 0$

$$A_+ + A_- = 0 \Rightarrow A_- = -A_+$$

Logo, a solução torna-se

$$y(x, t) = 2A_+ \sin(kx) \sin(\omega t)$$

- Em $x = L$ (extremidade livre): a força transversal é nula

$$\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$$

Com $A_- = -A_+$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 2A_+ k \cos(kL) \sin(\omega t) = 0$$

Logo, $\cos(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

Frequências quantizadas

A relação de dispersão é $\omega = v k$, com $v = \sqrt{F_T/\mu}$.

Logo, $\omega_n = v k_n = \frac{(2n+1)\pi v}{2L}$

e

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{(2n+1)v}{4L} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Amplitude e solução final

Escolhendo a fase temporal de modo que o deslocamento na extremidade livre seja $y(L, t) = A \sin(\omega_n t)$, temos

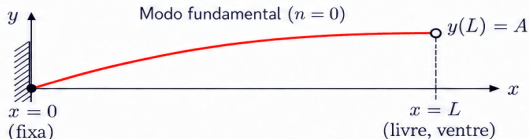
$$y(L, t) = 2A_+ \sin(k_n L) \sin(\omega_n t) = A \sin(\omega_n t)$$

Como $\sin(k_n L) = (-1)^n$, segue que

$$2A_+ = (-1)^n A.$$

Portanto, os modos normais são

$$y_n(x, t) = (-1)^n A \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$



Modos discretos: o que é diferente?

As fronteiras seleccionam os modos; a relação com a energia depende da física do sistema.

Corda clássica

As frequências próprias são discretas.
A amplitude de cada modo é livre.

$$\omega_n = vk_n$$

$$E_{\text{cl},n} \propto A^2 \omega_n^2$$

Variar A permite variar continuamente a energia, mesmo num único modo.

No modelo linear ideal, a energia pode ser arbitrariamente pequena.

Partícula num poço quântico

Schrödinger e as condições de fronteira seleccionam os níveis de energia.

$$E_n = \hbar \omega_n$$

Aqui, ω_n é a frequência da fase temporal do estado estacionário.

$$\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

A normalização fixa a escala de ψ_n , sem alterar a energia do estado.

É uma amplitude de probabilidade, não uma amplitude de deslocamento.

Exercício resolvido II

Problema: Um transdutor ultrassónico emite uma onda longitudinal num tecido mole. A pressão acústica é dada por $p(z, t) = p_0 \cos(kz - \omega t)$, com $p_0 = 50 \text{ kPa}$, $f = 2,0 \text{ MHz}$ e $v = 1540 \text{ m s}^{-1}$.

Determinar:

- o comprimento de onda λ ;
- o número de onda k ;
- o sentido de propagação da onda.

Solução

- Comprimento de onda:

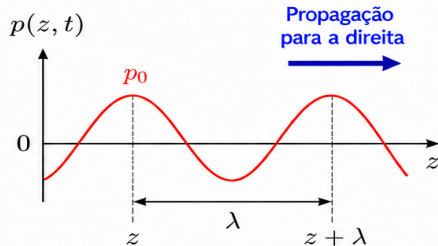
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1540}{2,0 \times 10^6} = 7,70 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,770 \text{ mm}.$$

- Número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{7,70 \times 10^{-4}} = 8,16 \times 10^3 \text{ rad m}^{-1}.$$

- Sentido de propagação:

A forma $kz - \omega t$ indica que a onda se propaga para a direita (no sentido de $+z$), com velocidade $v = \omega/k = 1540 \text{ m s}^{-1}$.



Interpretação física

A pressão varia sinusoidalmente no espaço e no tempo.

Cada ponto do tecido oscila longitudinalmente enquanto a perturbação se desloca para a direita.

Exercício resolvido III

Problema: Um feixe ultrassônico de frequência $f = 3,5 \text{ MHz}$ propaga-se num tecido mole (velocidade do som $v = 1540 \text{ m s}^{-1}$) e é descrito pela pressão acústica

$$p(z, t) = p_0 \cos(kz - \omega t), \quad \text{com } p_0 = 120 \text{ kPa e } \rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}.$$

- Determinar:
- o comprimento de onda λ ;
 - o número de onda k ;
 - a frequência angular ω ;
 - a intensidade acústica média I ;
 - a velocidade máxima das partículas do meio $u_{\max}$;
 - o sentido de propagação da onda.

Solução

1. Comprimento de onda

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1540}{3,5 \times 10^6} = 4,40 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,440 \text{ mm}$$

2. Número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4,40 \times 10^{-4}} = 1,43 \times 10^4 \text{ rad m}^{-1}$$

3. Frequência angular

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(3,5 \times 10^6) = 2,20 \times 10^7 \text{ rad s}^{-1}$$

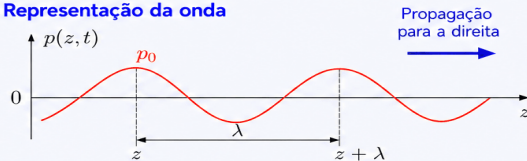
4. Intensidade acústica média

Para uma onda plana: $I = \frac{p_{\text{rms}}^2}{\rho v}$, com $p_{\text{rms}} = \frac{p_0}{\sqrt{2}}$.

Substituindo:

$$I = \frac{(120 \times 10^3)^2}{2(1000)(1540)} = 4,68 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$$

Representação da onda



5. Velocidade máxima das partículas do meio

Para uma onda plana: $p = \rho v u \Rightarrow u(z, t) = \frac{p(z, t)}{\rho v}$

Logo, $u_{\max} = \frac{p_0}{\rho v} = \frac{120 \times 10^3}{(1000)(1540)} = 7,79 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1} = 7,79 \text{ cm s}^{-1}$

6. Sentido de propagação

A fase é $kz - \omega t = \text{const.} \Rightarrow z = \frac{\omega}{k} t + \text{const.}$

Como $\frac{\omega}{k} = v > 0$, a onda propaga-se **para a direita** (sentido de $+z$).

Interpretação física (aplicação em diagnóstico por imagem)

A onda ultrassônica provoca pequenas variações de pressão longitudinal no tecido.

Estas variações são convertidas em ecos nas interfaces entre tecidos com diferentes propriedades acústicas, permitindo formar imagens.