Escala em decibel, fontes e efeito Doppler



Três perguntas

- Porque é que são precisos cerca de dez violinos para soarem duas vezes mais forte do que um?
- Porque é que a sirene de uma ambulância muda de tom exactamente quando passa por nós?
- Como é que um ecógrafo mede a velocidade do sangue a partir de um eco?

CONCEITOS

O que vamos usar

- Intensidade e pressão eficaz: $I = p_{\text{ef}}^2/Z$.
- Fonte pontual sem absorção: $I = P/4\pi r^2$.
- Fontes incoerentes: somam-se as intensidades.
- Logaritmos: $\log_{10}(ab) = \log_{10} a + \log_{10} b$ e $\log_{10} a^n = n \log_{10} a$.

DECIBEL

Porquê uma escala logarítmica

- O ouvido responde de $1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ a $1\,\mathrm{W\,m^{-2}}$: doze ordens de grandeza. Numa escala linear, quase todos os sons ficariam encostados ao zero.

- A menor variação que o ouvido detecta é proporcional à intensidade, $\Delta I/I \approx$ constante (lei de Weber): passar de 1 para $2\,\mathrm{mW\,m^{-2}}$ nota-se tanto como passar de 10 para $20\,\mathrm{mW\,m^{-2}}$.

- O logaritmo transforma razões em diferenças: $\log(2I) - \log I = \log 2$, seja qual for I.

DECIBEL

O bel e o decibel

Escolhe-se uma intensidade de referência I_0 e mede-se cada som pelo logaritmo da razão I/I_0:

$$\log_{10} \frac{I}{I_0} \text{ bel} \qquad \Rightarrow \qquad 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \text{ decibel}$$

- Um bel é um factor 10 na intensidade; o decibel é um décimo de bel, mais cómodo.
- O decibel não é uma unidade física: é o logaritmo de uma razão, sem dimensões.

DECIBEL

Nível de intensidade

Como referência, usa-se o limiar de audição a $1\,\text{kHz}$:

$$L_I = 10\,\log_{10}\frac{I}{I_0}, \qquad I_0 = 1\times 10^{-12}\,\text{W}\,\text{m}^{-2}$$

Para voltar à intensidade, inverte-se:

$$I = I_0\,10^{L_I/10}$$

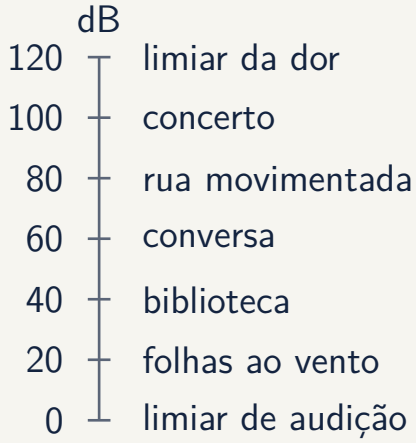
Exemplo: $I = 1\times 10^{-6}\,\text{W}\,\text{m}^{-2}$ dá $L_I = 10\log_{10}10^6 = 60\,\text{dB}$.

DECIBEL

A escala do dia-a-dia

Cada $10\,\text{dB}$ a mais multiplica a intensidade por 10.

Da biblioteca ($40\,\text{dB}$) ao concerto ($100\,\text{dB}$) são $60\,\text{dB}$: a intensidade aumenta 10^6 vezes.



DECIBEL

Nível de pressão sonora

Os microfones medem pressão, não intensidade. Como $I = p_{\text{ef}}^2/Z$, a razão das intensidades é o quadrado da razão das pressões:

$$10 \log_{10} \frac{p_{\text{ef}}^2}{p_0^2} = 20 \log_{10} \frac{p_{\text{ef}}}{p_0}$$

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{p_{\text{ef}}}{p_0}, \qquad p_0 = 2 \times 10^{-5}\,\text{Pa}$$

O valor de p_0 foi escolhido para que $p_0^2/Z \approx I_0$ no ar: assim, $L_p \approx L_I$.

Regras práticas

Multiplicar a intensidade por N soma $10 \log_{10} N$ ao nível:

Variação	Nível
intensidade $\times 2$	$10 \log_{10} 2 = +3$ dB
intensidade $\times 10$	$10 \log_{10} 10 = +10$ dB
pressão $\times 2$	$20 \log_{10} 2 = +6$ dB
intensidade $\div 2$	-3 dB

PERGUNTA: OS VIOLINOS

Somar níveis

Porque são precisos dez violinos para soarem duas vezes mais forte?

Os níveis não se somam: $60\,\text{dB} + 60\,\text{dB}$ não dá $120\,\text{dB}$. Para fontes incoerentes, somam-se as intensidades:

$$I = I_1 + I_2 = I_0 \left(10^{L_1/10} + 10^{L_2/10}\right)$$

$$L = 10 \log_{10} \left(10^{L_1/10} + 10^{L_2/10}\right)$$

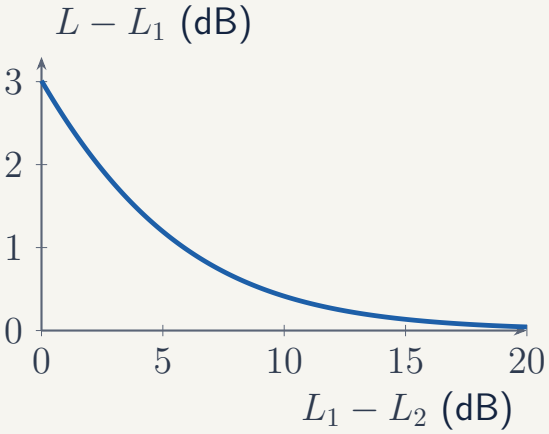
PERGUNTA: OS VIOLINOS

Fontes de níveis diferentes

Duas fontes iguais: $I \to 2I$, $+3\,\text{dB}$.

$60\,\text{dB}$ e $50\,\text{dB}$: o segundo tem $\frac{1}{10}$ da intensidade;
$10 \log_{10} 1{,}1 = 0{,}4\,\text{dB}$.

O mais fraco quase não conta.



RESPOSTA

Dez violinos

Dois violinos incoerentes: $I = 2I_1$, logo

$$L = 10\log_{10}\frac{2I_1}{I_0} = 10\log_{10}2 + 10\log_{10}\frac{I_1}{I_0} = L_1 + 3\,\text{dB}$$

Mal se nota: o ouvido julga um som «duas vezes mais forte» quando o nível sobe cerca de $10\,\text{dB}$. Com N violinos:

$$10\log_{10}N = 10 \;\Rightarrow\; N = 10$$

Por isso uma orquestra tem tantos violinos.

FONTES

A fonte e o que se ouve

O nível L_I depende de onde estamos: perto de uma máquina é alto, longe é baixo. Não serve para caracterizar a máquina.

O que é próprio da fonte é a potência P que emite. Também se exprime em decibel, o **nível de potência**:

$$L_W = 10 \log_{10} \frac{P}{P_0}, \qquad P_0 = 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W}$$

É o valor que vem nas especificações de máquinas e electrodomésticos. Uma fonte de $1\,\mathrm{W}$ tem $L_W = 120\,\mathrm{dB}$.

FONTES

Do nível de potência ao nível ouvido

A uma distância r, em campo livre (sem paredes nem chão):

$$L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \times \frac{1}{4\pi r^2} \right)$$

(I_0 e P_0 têm o mesmo valor numérico; r em metros). O logaritmo do produto é uma soma:

$$L_I = L_W - 10 \log_{10} 4\pi - 20 \log_{10} r = L_W - 11\,\text{dB} - 20 \log_{10} r$$

Exemplo: $L_W = 100\,\text{dB}$ dá $89\,\text{dB}$ a $1\,\text{m}$ e $69\,\text{dB}$ a $10\,\text{m}$.

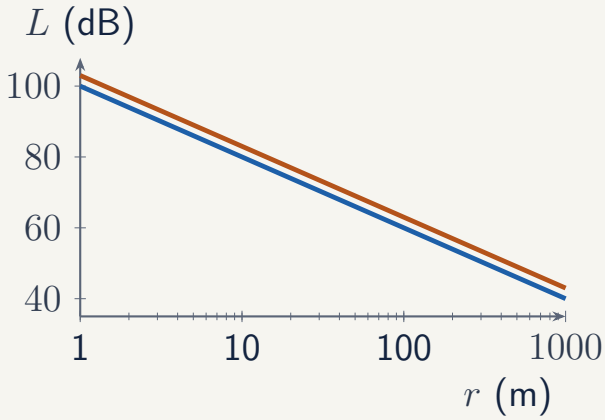
FONTES

Distância à fonte

Campo livre (azul): duplicar r divide I por 4:

$$\Delta L = -20 \log_{10} 2 = -6\,\text{dB}$$

Fonte no chão (laranja): a potência espalha-se por meia esfera, $2\pi r^2$; a intensidade duplica, $+3\,\text{dB}$.

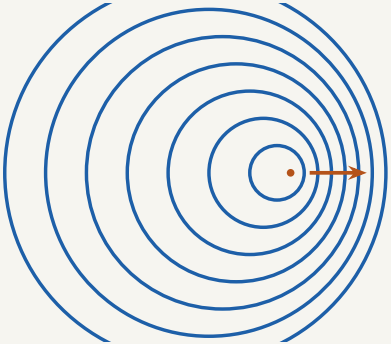


PERGUNTA: A AMBULÂNCIA

Fonte em movimento

Porque é que a sirene muda de tom quando passa por nós?

Cada crista parte da posição da fonte e afasta-se a v. Num período T, a crista anterior avança vT; a fonte avança $v_s T$ no mesmo sentido e fica mais perto dela.



Fonte a deslocar-se para a direita.

PERGUNTA: A AMBULÂNCIA

O comprimento de onda muda

À frente da fonte, a distância entre cristas encurta:

$$\lambda' = vT - v_s T = (v - v_s)\,T$$

O som continua a propagar-se a v no ar, logo

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = f\,\frac{v}{v - v_s}$$

Atrás da fonte, $\lambda' = (v + v_s)T$ e $f' < f$.

PERGUNTA: A AMBULÂNCIA

Observador em movimento

Agora a fonte está parada e o observador aproxima-se com velocidade v_o.

O comprimento de onda no ar é o mesmo, λ. Mas, em relação ao observador, as cristas chegam a $v + v_o$; o tempo entre duas é $\lambda/(v + v_o)$:

$$f' = \frac{v + v_o}{\lambda} = f\,\frac{v + v_o}{v}$$

As duas fórmulas são diferentes: o som tem um meio, o ar, e conta quem se move em relação a ele.

PERGUNTA: A AMBULÂNCIA

A fórmula geral

Juntando os dois efeitos, com as velocidades medidas em relação ao ar e positivas quando fonte e observador se aproximam:

$$f' = f\,\frac{v + v_o}{v - v_s}$$

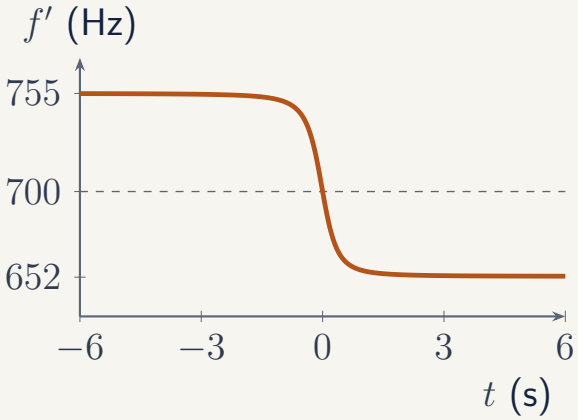
- A aproximar-se: $f' > f$, som mais agudo.
- A afastar-se: as velocidades são negativas e $f' < f$.

RESPOSTA

A sirene da ambulância

Sirene de $700\,\text{Hz}$ a $25\,\text{m s}^{-1}$, a passar a $10\,\text{m}$.

Só conta a componente da velocidade na nossa direcção. Passa de $+v_s$ a $-v_s$ quando a ambulância está ao nosso lado.

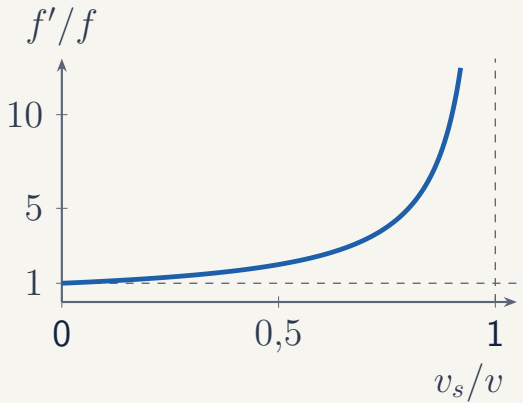


EFEITO DOPPLER

A fonte alcança o som

À frente de uma fonte que se aproxima, $\lambda' = (v - v_s)T$: quanto mais depressa a fonte, mais juntas as cristas.

Se $v_s \to v$, então $\lambda' \to 0$ e $f' \to \infty$: as frentes ficam todas sobrepostas à frente da fonte, numa parede de ar comprimido, a «barreira do som».



EFEITO DOPPLER

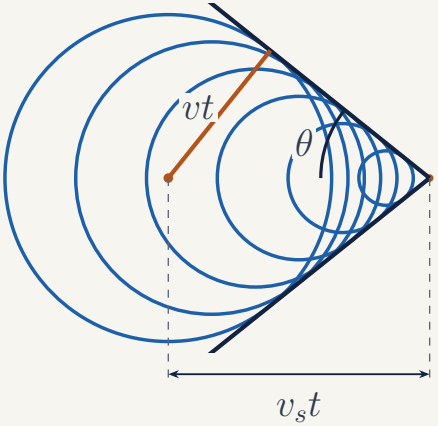
Mais rápido do que o som

Se $v_s > v$, a fonte ultrapassa as frentes que emitiu. A frente emitida há um tempo t tem raio vt; a fonte está a $v_s t$ do seu centro.

Todas as frentes tocam num cone, com

$$\sin\theta = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s} = \frac{1}{M}$$

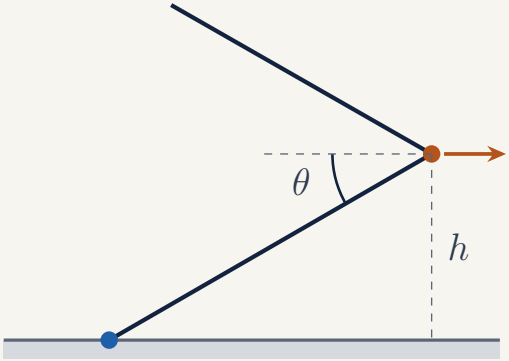
$M = v_s/v$ é o **número de Mach**.



EFEITO DOPPLER

O estrondo sónico

- Antes de o cone chegar, não se ouve nada.
- Quando passa, chega de uma vez todo o som acumulado: um salto brusco de pressão, o **estrondo**.
- O cone acompanha o avião: ouve-se ao longo de todo o percurso.



Mach 2: $\theta = 30°$.

PERGUNTA: O ECÓGRAFO

Eco de um alvo em movimento

Como é que um ecógrafo mede a velocidade do sangue?

O som é reflectido pelos glóbulos vermelhos, que se movem com o sangue, a velocidade u. A sonda, parada, emite a frequência f.

1.º O glóbulo recebe a onda: é um observador que se aproxima da fonte.

$$f_1 = f\,\frac{v+u}{v}$$

PERGUNTA: O ECÓGRAFO

O eco volta deslocado duas vezes

2.º O glóbulo reflecte a onda com a frequência f_1: agora é uma fonte que se aproxima da sonda.

$$f' = f_1 \frac{v}{v - u}$$

Juntando os dois passos:

$$f' = f \frac{v + u}{v} \cdot \frac{v}{v - u} = f \frac{v + u}{v - u}$$

O efeito Doppler actua na ida e na volta. Aqui, $v \approx 1540\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ é a velocidade do som nos tecidos e $u \lesssim 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a do sangue.

PERGUNTA: O ECÓGRAFO

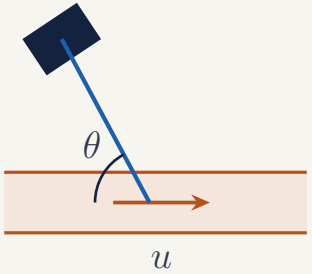
O desvio de frequência

Como $x = u/v \lesssim 10^{-3}$, $\dfrac{1+x}{1-x} \approx 1 + 2x$:

$$\Delta f = f' - f \approx \frac{2fu}{v}$$

Só conta a componente de u no feixe:

$$\Delta f = \frac{2fu\cos\theta}{v}$$



Sonda, feixe (azul) e vaso.

RESPOSTA

O eco-Doppler

É o exame chamado **eco-Doppler**. O aparelho mede Δf. O ângulo θ vem da imagem: o operador marca a direcção do vaso; a do feixe é conhecida. Então:

$$u = \frac{v\,\Delta f}{2 f \cos\theta}$$

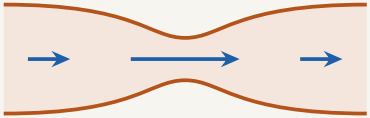
Sonda a $5\,\mathrm{MHz}$, $\Delta f = 1{,}6\,\mathrm{kHz}$, $\theta = 60°$:

$$u = \frac{1540 \times 1600}{2 \times 5 \times 10^{6} \times 0{,}5} \approx 0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

EFEITO DOPPLER

O que mostra o eco-Doppler

- O sinal de Δf dá o sentido: a aproximar-se da sonda, $\Delta f > 0$; a afastar-se, $\Delta f < 0$.
- Num estreitamento, o mesmo volume de sangue por segundo passa numa secção menor: u aumenta, e Δf também. Assim se detectam obstruções.
- Δf está na gama audível: ouve-se o pulso do sangue.



Setas: velocidade do sangue.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Numa oficina, uma máquina produz $85\,\text{dB}$ no posto de trabalho. Considere as máquinas fontes pontuais incoerentes, em campo livre.

(a) Calcule I e p_{ef} nesse ponto.

(b) Qual o nível com quatro máquinas iguais à mesma distância?

(c) Com as quatro, quanto se deve afastar o trabalhador para voltar a $85\,\text{dB}$?

(d) Quantas máquinas dariam $100\,\text{dB}$?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $I = I_0\, 10^{L/10} = 10^{-12} \times 10^{8{,}5} = 3{,}2 \times 10^{-4}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$

$p_{\mathrm{ef}} = p_0\, 10^{L/20} = 2 \times 10^{-5} \times 10^{4{,}25} = 0{,}36\,\mathrm{Pa}$

(b) Intensidade $\times 4$: $L = 85 + 10 \log_{10} 4 = 91\,\mathrm{dB}$

(c) É preciso perder $6\,\mathrm{dB}$: duplicar a distância.

(d) $10 \log_{10} N = 15 \;\Rightarrow\; N = 10^{1{,}5} \approx 32$ máquinas.

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Um comboio com uma buzina de $500\,\mathrm{Hz}$ passa numa estação a $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $v = 343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

(a) Que frequência se ouve na estação, com o comboio a aproximar-se?

(b) E com o comboio a afastar-se?

(c) Noutro dia, ouvem-se $560\,\mathrm{Hz}$ e $450\,\mathrm{Hz}$. Qual a velocidade?

(d) Comboio parado, observador a $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ na sua direcção: que frequência ouve?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) $f' = 500 \times 343/(343 - 40) = 566\,\text{Hz}$

(b) $f' = 500 \times 343/(343 + 40) = 448\,\text{Hz}$

(c) A razão das duas frequências não depende de f:

$$\frac{560}{450} = \frac{v + v_s}{v - v_s} \;\Rightarrow\; v_s = v\,\frac{1{,}244 - 1}{1{,}244 + 1}$$

$$v_s = 343 \times \frac{0{,}244}{2{,}244} = 37\,\text{m s}^{-1}$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(d) Observador em movimento, fonte parada:

$$f' = 500 \times \frac{343 + 40}{343} = 558\,\text{Hz}$$

Em (a), a fonte move-se em relação ao ar e encurta λ. Aqui, λ não muda: só a velocidade com que as cristas chegam.

Por isso as duas situações dão frequências diferentes.

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Um ecógrafo Doppler emite $4\,\text{MHz}$. O feixe faz 60° com uma artéria e mede-se $\Delta f = 1{,}3\,\text{kHz}$. Nos tecidos, $v = 1540\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

(a) Calcule a velocidade do sangue.

(b) Que Δf se mediria com o feixe a 0°? E a 90°?

(c) E a $8\,\text{MHz}$, a 60°?

(d) Se o ângulo verdadeiro for 65°, qual a velocidade real e o erro cometido?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a)

$$u = \frac{v\,\Delta f}{2f\cos\theta} = \frac{1540 \times 1300}{2 \times 4 \times 10^6 \times 0{,}5} = 0{,}50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

(b) A $0°$, $\cos\theta = 1$: $\Delta f = 2{,}6\,\mathrm{kHz}$. A $90°$, $\cos\theta = 0$: não há desvio.

(c) $\Delta f \propto f$: $\Delta f = 2{,}6\,\mathrm{kHz}$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(d) Com $\cos 65^\circ = 0{,}423$:

$$u = \frac{1540 \times 1300}{2 \times 4 \times 10^6 \times 0{,}423} = 0{,}59\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$\text{erro} = \frac{0{,}50 - 0{,}59}{0{,}59} \approx -15\,\%$$

Um erro de 5° no ângulo dá $15\,\%$ de erro: perto de 90°, a medição é muito sensível ao ângulo.