Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 1

1 – Dados os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ e $\vec{v} = -3\overrightarrow{e_1} + m\overrightarrow{e_2}$, onde $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ são normados e ortogonais.

a) Calcule m de modo que $\vec{u}, \vec{v}$ sejam paralelos
b) Calcule m de modo que $\vec{u}, \vec{v}$ sejam perpendiculares
c) Calcule m de modo que $\vec{v}$ tenha norma 5.
d) No caso obtido em c), calcule o ângulo com $\vec{u}$
e) Calcule nesse caso, a norma de $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, Represente no plano esses vetores. Verifique na prática a desigualdade triangular.

2 - Dados os pontos A(3, -4) e B(-1, 1) e o vetor $\vec{v} = (-2,3)$ numa base ortonormada (b.o.n.) em $\mathbb{R}^2$. Calcule:

a) . (B - A) + $2\vec{v}$
b) (A - B) - $\vec{v}$
c) B + 2(B - A)
d) $3\vec{v}$ - 2(A - B)

3) Dada uma b.o.n $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}$, obtida por uma rotação direta com um ângulo $\alpha\ rad$.

a) Obtenha as coordenadas dos vetores $\vec{u}$=(2,3) e $\vec{v}$=(-1,2) na nova base $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}$. Começe por escrever a matriz de transformação de base.

b) Calcule o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nas duas bases e verifique que este fica invariante. Pode concluir que o produto interno fica invariante para uma transformação ortogonal?

4) Dados dois vetores $\vec{h}, \vec{m}$ em $\mathbb{R}^2$ de norma unitária representando a posição do ponteiro das horas e minutos respetivamente em cada instante t (em segundos contados dessde as 0h).

a) Represente $\vec{h}, \vec{m}$ na b.o.n. $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ apontando respetivamente para as 0h (ou 12h) e as 3h. Note que os vetores descrevem um movimento circular uniforme com velocidades angulares bem definidas (calcule-as).

b) Em que instantes os vetores coincidem?

c) Em que instantes os vetores são perpendiculares entre si?

d) Exprima os vetores representando as derivadas temporais de ambos os vetores. Mostre que a derivada temporal de $\vec{h}$ é perpendicular a $\vec{h}$ (idem para $\vec{m}$).

5) a) Verifique que o tensor de 2ª ordem $\hat{A}$, de elementos A_{ij}, admite a decomposição: $\hat{A} = \hat{A}^s + \hat{A}^a$ numa parte simétrica $\hat{A}^s = \hat{A}^{sT}$ e numa parte anti-simétrica $\hat{A}^a = -\hat{A}^{aT}$.

$$\text{com } \hat{A}^s = \frac{1}{2}\left(\hat{A} + \hat{A}^T\right); \hat{A}^a = \frac{1}{2}\left(\hat{A} - \hat{A}^T\right); \left(\hat{A}^T\right)_{ij} = \left(\hat{A}\right)_{ji}$$

b) Mostre que esta decomposição é única.

c)Verifique que: $\hat{A} - \hat{A}^T = 2\hat{A}^a$

d)Mostre que: $\hat{A}^s = \hat{A}^{s0} + \frac{1}{n}(Tr\hat{A})\hat{\delta}$; onde $\hat{A}^{s0}$é um tensor de traço nulo, i.e $Tr(\hat{A}^{s0}) = 0$ onde n é a dimensão do tensor.

6) Mostre que, se $\hat{A}$ é um tensor de 2ª ordem, então: $Tr\hat{A} = \hat{A}{:}\hat{\delta} = \hat{A}^s{:}\hat{\delta}$

7) Mostre que, se $\hat{A}$ é um tensor de 2ª ordem simétrico e $\hat{B}$ é um tensor de 2ª ordem anti-simétrico, então $\hat{A}{:}\hat{B} = 0$

8) Prove que se $\hat{D} = \vec{a} \quad \vec{b}$, então $Tr\hat{D} = \vec{a}.\vec{b}$

9) Mostre que o produto interno entre vetores é invariante para uma mudança de base (invariante tensorial) i.e. $\tilde{a}_j\tilde{b}_j = a_ib_i = \vec{a} \bullet \vec{b}$em que: $\tilde{a}_j = a_iU_{ij}; \tilde{b}_j = b_iU_{ij}$onde U é uma matriz ortogonal.

10). Com base nos axiomas do produto interno e das normas, mostre a desigualdade de Schwarz:

a) $|\vec{a}.\vec{b}|^2 \leq \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2$

b) a desigualdade triangular: $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (um dos axiomas das normas).

c) e a lei do paralelogramo: $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$. Faça um esquema interpretativo.

d) Escreva a relação b) usando a norma L^p : $\|\vec{u}\|_p = (\sum_{i=1}^n |u_i|^p)^{1/p}; p > 0$

11) a) Recorrendo ao tensor Levi-Civita, exprima em $\mathbb{R}^3$, o valor do produto misto $\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$ em função das coordenas dos vetores numa b.o.n. Qual a condição para que o produto misto seja nulo?

b) Aplique o produto misto para calcular o volume de um paralelogramo definido pelos vetores (1,0,0), (1,1,0) e (1,1,4),

12). Mostre,recorrendo à regra épsilon-delta a seguinte igualdade do produto externo:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{d})]\vec{c} - [\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})]\vec{d}$$

Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra

Série 1 - Resolução

(1) $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{v} = -3\vec{e}_1 + m\,\vec{e}_2$

$= (1,2)$ $\qquad = (-3, m)$

a) $\vec{u}, \vec{v}$ paralelos $\Leftrightarrow (1,2) = k(-3,m)$ onde k = cte.

$= (-3k, km)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3k \\ 2 = km \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1/3 \\ m = \frac{2}{k} = \frac{2}{-1/3} = -6 \end{cases}$

b) $\vec{u}, \vec{v}$ perpendiculares $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (1,2) \cdot (-3,m) =$

$= -3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 3/2$

c) $\vec{v}$ com norma 5 $\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 5^2 = 25 = \|(-3,m)\|^2 =$

$= 9 + m^2 \Leftrightarrow m^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$

d) $\vec{v} = (-3, \pm 4) \longrightarrow \|\vec{v}\| = 5$

$\vec{u} = (1,2) \longrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{5}$

$\cos \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{(-3, \pm 4) \cdot (1,2)}{\sqrt{5} \cdot 5} =$

$= \frac{-3 \pm 4 \cdot 2}{5\sqrt{5}} = \frac{-3 \pm 8}{5\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{5}}$ ou $\frac{-11}{5\sqrt{5}}$

$\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 63{,}4°$

ou $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{-11}{5\sqrt{5}}\right) = 169{,}7°$

② $A = (3,-4)$; $B = (-1,1)$, $\vec{v} = (-2,3)$

a) $B - A + 2\vec{v} = (-1,1) - (3,-4) + 2(-2,3) = (-1-3-4,\ 1+4+6) =$
$= (-8, 11)$

b) $A - B - \vec{v} = (3,-4) - (-1,1) - (-2,3) = (3+1+2,\ -4-1-3)$
$= (6, -8)$

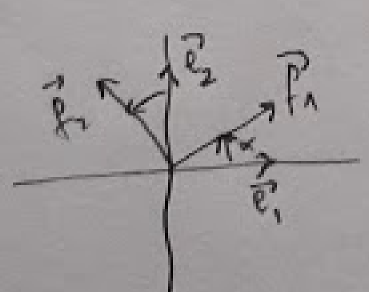
c) $B + 2(B-A) = (-1,1) + 2[(-1,1) - (3,-4)] =$
$= (-1,1) + 2(-4,5) = (-1-8,\ 1+10) = (-9,11)$

d) $3\vec{v} - 2(A-B) = 3(-2,3) - 2[(3,-4) - (-1,1)] =$
$= (-6,9) - 2(4,-5) = (-6-8,\ 9+10) = (-14,19)$

---

③ Em $\mathbb{R}^2$, $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ são representados esquematicamente

pela figura



$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = F =$ Matriz da transformação da base

ou seja $\vec{f}_1 = \cos\alpha\ \vec{e}_1 + \operatorname{sen}\alpha\ \vec{e}_2$; $\vec{f}_2 = -\operatorname{sen}\alpha\ \vec{e}_1 + \cos\alpha\ \vec{e}_2$

$\vec{u} = \underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}_{I\,=\,\text{matriz identidade}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2) \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} = F^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

onde $\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}$ = componentes na base rodada $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$

Sendo F ortogonal, $F^{-1} = F^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

a)

Assim $\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha \\ -2\operatorname{sen}\alpha + 3\cos\alpha \end{pmatrix} = F^T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha \end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,3)\cdot(-1,2) = -2+6 = 4$ (na base $\vec{e}_1, \vec{e}_2$)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\cos\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha, -2\operatorname{sen}\alpha + 3\cos\alpha)\cdot(-\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha, \operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha)$

$= (2\cos\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha)(-\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha) + (-2\operatorname{sen}\alpha + 3\cos\alpha)\cdot(\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha) =$

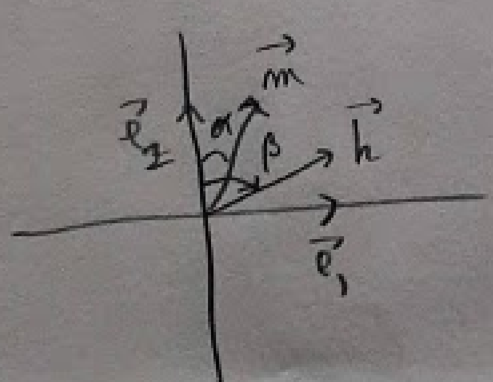
$= \left[(-2\cos^2\alpha + 6\operatorname{sen}^2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right] + \left[-2\operatorname{sen}^2\alpha + 6\cos^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]$

$= (-2+6)(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = -2+6 = 4$ (na base $\vec{f}_1, \vec{f}_2$)

Assim o produto interno é invariante para uma mudança de base e calcula-se na forma $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ em qualquer base ortonormada.

---

④ a) A representação dos vetores unitários $\vec{m}$ (dos minutos) e $\vec{h}$ (das horas) no referencial $\vec{e}_1$ (3h) e $\vec{e}_2$ (0h) é



$\vec{m}$ faz ângulo $\alpha(t)$ com $\vec{e}_2$

$\vec{h}$ faz ângulo $\beta(t)$ com $\vec{e}_2$

$\alpha(t)$, $\beta(t)$ são funções do tempo t

$\alpha = \frac{2\pi}{T_m}t$, $\beta = \frac{2\pi}{T_h}t$

onde t dado em horas

T_m = período de rotação de $\vec{m}$ = 1 hora = 1

T_h = período de rotação de $\vec{h}$ = 12 horas = 12

b) coincidência dos vetores $\Leftrightarrow$ $\alpha = \beta + 2\pi k \quad k \in \mathbb{N}_0$

ou seja $2\pi t = \frac{2\pi}{12} t + 2\pi k \Leftrightarrow$

$t\left(1 - \frac{1}{12}\right) = t \cdot \frac{11}{12} = k \Leftrightarrow t = \frac{12}{11} k$ (em horas)

0h corresponde a $k = 0$

24h correspondem a $k = \frac{24 \cdot 11}{12} = 22$ (coincidente com 0h)

logo os valores de k são $0, \ldots, 21$ (22 vezes)

c) $\vec{h}$ e $\vec{m}$ perpendiculares $\Leftrightarrow$

$\alpha = \beta + 2\pi k \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\pi t = \frac{2\pi}{12} t + 2\pi k \pm 2\pi \cdot \frac{1}{4}$

$(k \in \mathbb{N}_0)$

$\Leftrightarrow t\left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{11}{12} t = k \pm \frac{3}{12} = \frac{12k \pm 3}{12}$

$\Leftrightarrow t = \frac{12k \pm 3}{11}$

solução (+) $\quad t = \frac{12k+3}{11}, \quad k = \frac{11t-3}{12}$

sendo $0 \leq t < 24$ vem $k < \frac{11 \cdot 24 - 3}{12} = 21{,}75$

logo $k = 0, \ldots, 21$

solução (−) $\quad t = \frac{12k-3}{11}, \quad k = \frac{11t+3}{12} \Rightarrow k < \frac{11 \cdot 24 + 3}{12} = 22{,}75 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 1, \ldots, 22$

d) $\vec{m} = \operatorname{sen}\alpha\, \vec{e}_1 + \cos\alpha\, \vec{e}_2$

$= \operatorname{sen}(2\pi t)\, \vec{e}_1 + \cos(2\pi t)\, \vec{e}_2$

$\frac{d\vec{m}}{dt} = 2\pi\left[\cos(2\pi t)\vec{e}_1 - \operatorname{sen}(2\pi t)\, \vec{e}_2\right]$ (derivada temporal)

$\vec{h} = \operatorname{sen}\beta\, \vec{e}_1 + \cos\beta\, \vec{e}_2$

$= \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12}t\right)\vec{e}_1 + \cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right)\vec{e}_2$

$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{2\pi}{12}\left[\cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)\vec{e}_1 - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{12}\right)\vec{e}_2\right]$

$= \frac{2\pi}{12}\left[\cos\beta\, \vec{e}_1 - \operatorname{sen}\beta\, \vec{e}_2\right]$

Calcule-se o produto interno $\vec{h} \cdot \frac{d\vec{h}}{dt} =$

$= \frac{2\pi}{12}(\operatorname{sen}\beta\cos\beta - \cos\beta\operatorname{sen}\beta) = 0$ logo $\vec{h}$ é

perpendicular a $\frac{d\vec{h}}{dt} \Leftrightarrow \vec{h} \perp \frac{d\vec{h}}{dt}$

———— x ————

(5) $\hat{A} = A^s + A^a$

a) $A^s = \frac{1}{2}(A + A^T)$; $A^a = \frac{1}{2}(A - A^T)$

Somando vem $A^s + A^a = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2} \cdot 2A = A$

A^s é simétrica, de facto $A^{sT} = \frac{1}{2}(A^T + A^{TT}) = \frac{1}{2}(A^T + A) = A_s$

A^a é antissimétrica, de facto $A^{aT} = \frac{1}{2}(A^T - A^{TT}) = \frac{1}{2}(A^T - A) =$

$= -\frac{1}{2}(A - A^T) = -A^a$

b) A decomposição é única. Prove-se por redução ao absurdo. Admitam-se 2 decomposições:

$A = A^s_1 + A^a_1 = A^s_2 + A^a_2$ logo

$A^s_1 - A^s_2 = A^a_2 - A^a_1$

Tomando transposta:

$A^{sT}_1 - A^s_2 = A^s_1 - A^s_2 = A^{aT}_2 - A^{aT}_1 = -A^a_2 + A^a_1 =$

$= -(A^a_2 - A^a_1) = -(A^s_1 - A^s_2)$

logo $A^1_s - A^2_s = 0 = A^a_2 - A^a_1$ e portanto $\begin{cases} A^1_s = A^2_s \\ A^1_a = A^2_a \end{cases}$

c) $A - A^T = 2A^a$ (Imediato a partir da definição)

d) $A^s = A^{so} + \frac{1}{n}(\mathrm{Tr}\,A)\hat{\delta}$

Ora $\sum_{i=1}^{n} A^s_{ii} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \mathrm{Tr}\,A = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A^{so}_{ii}}_{\mathrm{Tr}(A^{so})} + \frac{1}{n}(\mathrm{Tr}\,A)\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \delta_{ii}}_{m} \Rightarrow \mathrm{Tr}(A^o_s) = 0$

(6) $\hat{A}$

Usando a notação indicial e a convenção de Einstein dos índices repetidos vem:

$$\mathrm{Tr}\, A = A_{ii}$$

$$\hat{A} : \hat{\delta} \underset{def}{\equiv} A_{ij}\, \delta_{ij} = A_{ii} = \mathrm{Tr}\, A$$

$$\hat{A}^S : \hat{\delta} \underset{def}{\equiv} A^S_{ij}\, \delta_{ij} = A^S_{ii} = \frac{1}{2}\left(A_{ii} + A^T_{ii}\right) = \frac{1}{2}\left(A_{ii} + A_{ii}\right) = A_{ii} =$$
$$= \mathrm{Tr}\, A$$

(7) Seja A simétrico, i.e. $A^T = A$
B antisimétrico, i.e. $B^T = -B$

Donde $A : B = A_{ij} B_{ij} = -A^T_{ij} B^T_{ij} = -A_{ji} B_{ji} =$

$= -A_{ij} B_{ij}$ logo $A_{ij} B_{ij} = 0 = A : B$

(i, j podem trocar, dado que são ambos índices mudos)

q.e.d.

(8) $\hat{D} = \vec{a}\vec{b}$ (produto exterior)

assim $D_{ij} = a_i b_j$, logo $\mathrm{Tr}\, D = D_{ii} = a_i b_i =$

$$\underset{def}{\equiv} \vec{a} \cdot \vec{b}$$

(9) Sejam $\tilde{a}_j = a_i U_{ij}$, $\tilde{b}_j = b_i U_{ij} = b_k U_{kj}$

componentes de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ numa base ortonormada, como tal $UU^T = U^T U = \mathbb{I}$ = matriz identidade

Assim $U_{ij} U^T_{jk} = \delta_{ik}$

O produto interno $\tilde{a}_j \tilde{b}_j = a_i U_{ij} b_k U_{kj} =$

$= a_i b_k U_{ij} U_{kj} = a_i b_k U_{ij} U^T_{jk} = a_i b_k \delta_{ik} = a_i b_i$

O que mostra que o produto interno de vetores é invariante numa mudança de base ortonormada.

---

(10) a) Mostremos que $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$

Seja a função $F(\alpha) = \|\vec{a} + \alpha\vec{b}\|^2 =$

$= (\vec{a} + \alpha\vec{b})\cdot(\vec{a} + \alpha\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + \alpha^2 \|\vec{b}\|^2 + 2\alpha\, \vec{a}\cdot\vec{b} \geq 0$

e consideremos o valor mínimo de $F(\alpha)$ ou seja que anule a derivada $\frac{dF}{d\alpha}$.

Assim $\frac{dF}{d\alpha} = 2\alpha \|\vec{b}\|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$

Trata-se de mínimo porque $\frac{d^2F}{d\alpha^2} = 2\|\vec{b}\|^2 > 0$ $\Big|$ = arg min $F(\alpha)$ = α_0

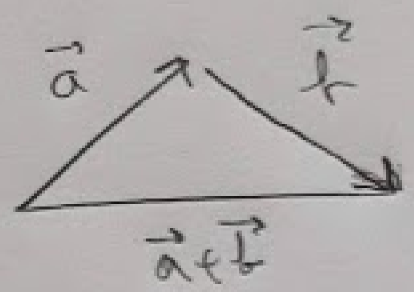
Assim $F(\alpha_0) = \|\vec{a}\|^2 + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2} - 2\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2} = \|\vec{a}\|^2 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \geq (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

q.e.d.

b) Designaldade Triangular $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

Geometricamente, tal mostra-se na forma:



No entanto tal verifica-se com uma generalidade maior.

Provemos tal. Tomemos

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\| + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

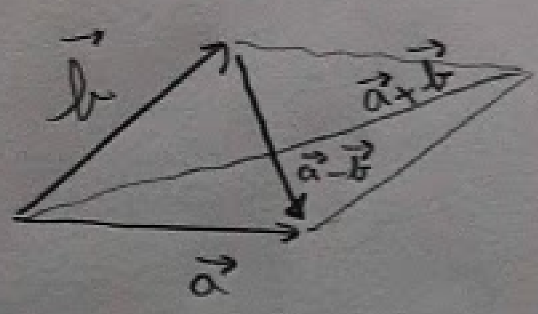
Dado que $\vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$ vem

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$

e portanto $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$. A igualdade verifica-se quando $\vec{a}, \vec{b}$ colineares e de igual sentido. i.e $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$.

c) lei do paralelogramo, ou seja

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$$



$\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$ são os vetores das diagonais do paralelogramo de lados $\vec{a}, \vec{b}$.

Mostrema a igualdade.

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\text{Soma} = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$$

d) Usando a norma L^p ou seja

$$\|\vec{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{1/p} \text{ vem:}$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} |a_i+b_i|^p\right)^{1/p}}_{\|\vec{a}+\vec{b}\|^2} \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p\right)^{1/p}}_{\|\vec{a}\|} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} |b_i|^p\right)^{1/p}}_{\|\vec{b}\|}$$

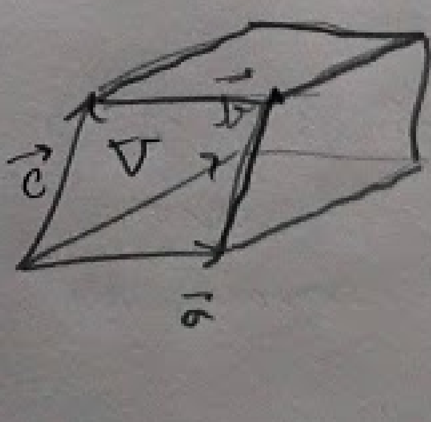
---

11 a) $\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}_{}$ com $\vec{d} = \vec{b}\times\vec{c}$: $\vec{a}\cdot\vec{d} = a_i d_i = a_i \underbrace{\varepsilon_{ijk} b_j c_k}_{d_i} =$

$= \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k$

O módulo do produto misto $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ é o volume V do paralelogramo retângulo subtendido por $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Geometricamente

$$V = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$



Se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ forem coplanares i.e

$$\vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c} \quad \text{para algumas constantes } \alpha, \beta$$

então $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha \vec{b}\cdot\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})}_{\vec{d}} + \beta \vec{c}\cdot\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})}_{\vec{d}}$$

Ora $\vec{b} \perp \vec{d}$ e $\vec{c} \perp \vec{d}$ ou seja $\vec{b}\cdot\vec{d} = \vec{c}\cdot\vec{d} = 0$

logo $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ ou seja ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ coplanares) $\equiv P_1$

é condição suficiente para (produto misto nulo) $\equiv P_2$

Mostremos também que P_1 é condição necessária de P_2.

Ora admita-se $\vec{b}, \vec{c}$ não colineares, o conjunto $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{d} = \vec{b}\times\vec{c}\}$ constituem uma base de $\mathbb{R}^3$

logo $\vec{a}$ expande-se na forma

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} + \gamma\vec{d} \quad \text{pelo que}$$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \gamma\,\vec{d}\cdot\vec{d} = \gamma\,\|\vec{d}\|^2$

se $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ e portanto

$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ ou seja P_1.

b) $$V' = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

sendo $V = |V'|$. Aplicando $V' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\times(1\cdot 4) = 4 = V$

= produto dos elementos da diagonal da matriz triangular.

(12)

$$\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\vec{e}} \times \underbrace{(\vec{c} \times \vec{d})}_{\vec{f}} = \vec{e} \times \vec{f}$$

$$(\vec{e} \times \vec{f})_i = \varepsilon_{ipq}\, e_p f_q = \varepsilon_{ipq} (\varepsilon_{prs}\, a_r b_s)(\varepsilon_{qtv}\, c_t d_v)$$

$$= \varepsilon_{ipq}\, \varepsilon_{prs}\, \varepsilon_{qtv} (a_r b_s c_t d_v) \qquad (\varepsilon_{ipq} = \varepsilon_{qip})$$

$$= \varepsilon_{qip}\, \varepsilon_{qtv} [\varepsilon_{prs}\, a_r b_s c_t d_v]$$

$$= (\delta_{it}\delta_{pv} - \delta_{iv}\delta_{pt})(\varepsilon_{prs}\, a_r b_s c_t d_v) \qquad (\text{Regra } \varepsilon\text{-}\delta)$$

$$= (\varepsilon_{vrs}\, a_r b_s c_i d_v) - (\varepsilon_{trs}\, a_r b_s c_t d_i) \qquad (\text{prop. distributiva})$$

$$= \underbrace{(\varepsilon_{rsv}\, a_r b_s d_v)}_{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{d})} c_i - \underbrace{(\varepsilon_{rst}\, a_r b_s c_t)}_{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} d_i, \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \vec{e} \times \vec{f} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{d})\,\vec{c} - \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\,\vec{d}$$

q.e.d.