Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 2

1) Descreva e represente graficamente as curvas descritas pelas funções vetoriais abaixo, dadas pela combinação linear dos versores do triedro direto $\vec{\imath} = \vec{e}_x, \vec{\jmath} = \vec{e}_y, \vec{k} = \vec{e}_z$.

a) $\vec{r}(t) = sen(t)\vec{\imath} + cos(t)\vec{\jmath} + \vec{k},\ 0 \leq t \leq \pi$

b) $\vec{r}(t) = sen(t)\vec{\imath} + 2cos(t)\vec{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\vec{r}(t) = sen(t)\vec{\imath} + cos(t)\vec{k}, -\infty < t < \infty$

d) $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + \sqrt{4-t^2}\vec{\jmath}, -2 \leq t \leq 2$

2) Seja $\vec{r}(t)$ o vetor posição de uma partícula dado por: $\vec{r}(t) = a\cos(\omega t)\,\vec{\imath} + a\ sen(t)\vec{\jmath}$ associado a um movimento circular uniforme. Calcule o vetor velocidade $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e mostre que é ortogonal a $\vec{r}(t)$ e calcule também o vetor aceleração $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e mostre que é colinear com $\vec{r}(t)$ e sentido contrário ao deste.

3) Dada a função vetorial : $\vec{r}(t) = t^2\vec{\imath} + e^t\vec{\jmath} - 2\cos(\pi t)\,\vec{k}$. Calcule:

a) $\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)$

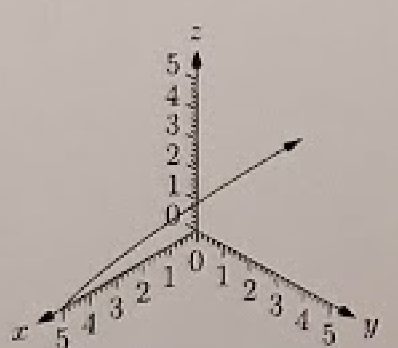
b) $\frac{d\vec{r}}{dt}$

c) $\frac{d\vec{r}}{dt}(t=1)$

d) $\int_0^1 \vec{r}(t)dt$

e) $\int\ \vec{r}(t)dt$

4) Mostre que o comprimento L da curva parametrizada por $\vec{r}(t) = 5(1-t^2)\vec{\imath} + 4t^{\frac{5}{2}}\vec{\jmath} + 5t^2\vec{k}$, definida para $0 \leq t \leq 1$ é: $L = \frac{32}{3}\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$. Essa curva é mostrada na figura anexa.



5) Calcular curvatura, raio de curvatura e módulo de torção da curva $\vec{r}(t) = \cos(t)\,\vec{\imath} + sen(t)\,\vec{\jmath} + t\vec{k}$.

6) Dado o vetor posição $\vec{r}(t)$ em função do tempo.

a) Mostre que a curvatura e torção são dados respetivamente por:

$$\kappa = \frac{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|^3}$$

$$\tau = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|^2}.$$

b) Usando as expressões anteriores, calcule a curvatura e torção para $\vec{r}(t) = \cos(t)\,\vec{\imath} + sen(t)\,\vec{\jmath} + f(t)\vec{k}$.

7) a) Mostre que a curvatura do gráfico da função $y = f(x)$ sobre o plano xy é dada pela expressão:

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

b) Use a expressão anterior para calcular as curvaturas das curvas planas descritas por:

b1) $y = ax + b$

b2) $y = \sqrt{a^2 - x^2}, -a < x < a$ onde $a > 0$.

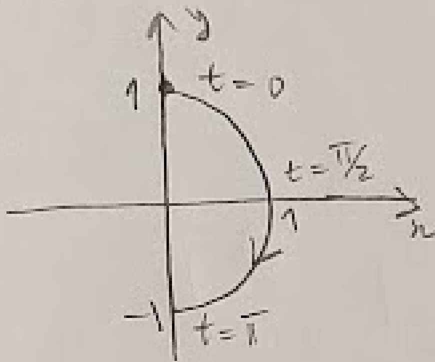
b3) $y = x^4$

b4) $y = ax^2$

8) Calcule o valor mínimo e o valor máximo do raio de curvatura de uma elipse de semieixos a, b com $0 < b \leq a$. O que acontece quando $a = b$? Quais são os semieixos da elipse cujo raio de curvatura varia entre 50m e 400m?

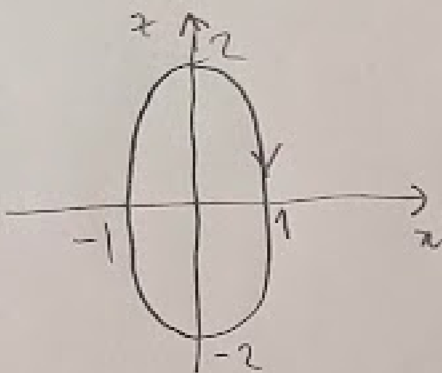
Série 2 – resolução

① a)



$z = 1$ (Meia circunferência no 1° e 4° quadrante à cota $z = 1$)

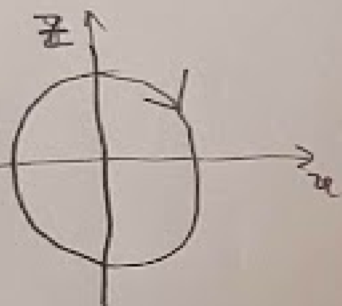
b)



$y = 0$ Elipse $\frac{x^2}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} = \frac{x^2}{a_x^2} + \frac{z^2}{a_z^2} = 1$

Com semi-eixos $a_x = 1$ no eixo x e $a_z = 2$ no eixo z.

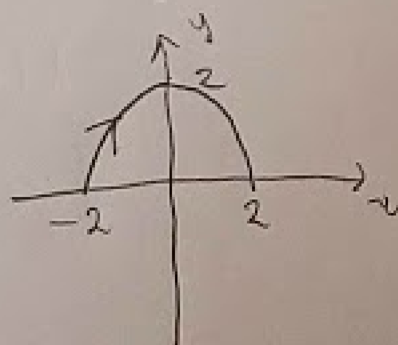
c)



$y = 0$ circunferência de raio $R = 1$ no plano xz com eq.

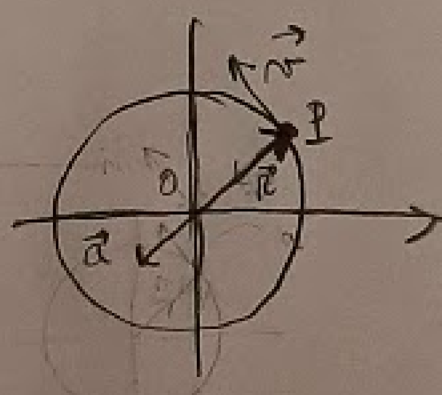
$x^2 + z^2 = 1$

d)



Tem-se $x = t$

$y = \sqrt{4 - t^2} = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$



② $\vec{r}(t) = a\cos(\omega t)\,\vec{i} + a\,\text{sen}(\omega t)\,\vec{j}$ = vetor posição

velocidade $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\,\text{sen}(\omega t)\,\vec{i} + a\omega\cos(\omega t)\,\vec{j}$

$\vec{r}\cdot\vec{v} = -a^2\omega\,\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t) + a^2\omega\,\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t) = 0$

logo $\vec{r} \perp \vec{v}$

aceleração $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{i} - a\omega^2\,\text{sen}(\omega t)\,\vec{j} = -\omega^2\,\vec{r}(t)$

Logo $\vec{a}(t)$ é centrípeta (aponta para o centro de curvatura O sendo colinear com o vetor posição $\vec{r}$)

③ $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + e^t\vec{j} - 2\cos(\pi t)\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

a) $x(t), y(t), z(t)$ são funções contínuas, logo

$$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t) = \vec{r}(0) = (0^2, e^0, -2\cos(\pi\cdot 0)) = (0, 1, -2)$$

b) $$\frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\,\vec{i} + e^t\vec{j} + 2\pi\,\mathrm{sen}(\pi t)\,\vec{k} = (2t, e^t, 2\pi\,\mathrm{sen}(\pi t))$$

c) $$\frac{d\vec{r}}{dt}(t=1) = (2\cdot 1, e^1, 2\pi\,\mathrm{sen}(\pi\cdot 1)) = (2, e, 0)$$

d) $$\int_0^1 \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_0^1 t^2\,dt\right)\vec{i} + \left[\int_0^1 e^t\,dt\right]\vec{j} + \left[-\int_0^1 -2\cos(\omega t)\,dt\right]\vec{k}$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 \vec{i} + e^t\Big|_0^1 \vec{j} - \frac{2}{\omega}\sin(\omega t)\Big|_0^1 \vec{k}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{i} + (e-1)\vec{j} - \frac{2}{\omega}\sin\omega\,\vec{k}$$

e) $\int \vec{r}(t) = \left[t^3\vec{i} + e^t\vec{j} - \frac{2}{\omega}\sin(\omega t)\vec{k}\right] + \vec{C}$ onde $\vec{C}$ = vetor constante

---

④ Comprimento da curva $\vec{r}(t)$ no período $[t_1, t_2]$ é

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \|d\vec{r}\| = \int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt$$

Assim $\vec{r}(t) = \underbrace{5(1-t^2)}_{x}\vec{i} + \underbrace{4t^{5/2}}_{y}\vec{j} + \underbrace{5t^2}_{z}\vec{k}$

Sendo $\frac{d\vec{r}}{dt} = -10t\,\vec{i} + 10\,t^{3/2}\vec{j} + 10t\,\vec{k}$

logo $$L = \int_0^1 (\underbrace{100t^2 + 100t^3 + 100t^2}_{100t^2(t+2)})^{1/2} dt = 10\int_0^1 t\sqrt{\underbrace{t+2}_{s}}\,dt$$

$$= 10\int_2^3 (s-2)s^{1/2}\,ds = 10\int_2^3 (s^{3/2} - 2s^{1/2})\,ds =$$

$$= 10\left[\frac{2}{5}s^{5/2}\Big|_2^3 - 2\cdot\frac{2}{3}s^{3/2}\Big|_2^3\right] =$$

$$= 4\left(3^{5/2} - 2^{5/2}\right) - \frac{40}{3}\left(3^{3/2} - 2^{3/2}\right) =$$

$$= 4\left(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\right) - \frac{40}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right) =$$

$$= \underbrace{(36-40)}_{-4}\sqrt{3} - \underbrace{\left(16 - \frac{80}{3}\right)}_{\frac{48-80}{3} = -\frac{32}{3}}\sqrt{3} = \frac{32}{3}\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$$

---

(5) Numa curva $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ onde t é o parametro (ex. t = tempo) têm-se:

$\vec{T}$ = versor tangencial = vers $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$

$ds = \|d\vec{r}\|$ = elemento infinitesimal de comprimento da curva

$\vec{N}$ = versor normal apontando para interior da curvatura = vers $\left(\frac{d\vec{T}}{ds}\right)$

1) $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \Big/ \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = K\vec{N}$ onde $K = \frac{1}{\rho} \geq 0$ é a curvatura (km) (nula em curva reta) e $\rho = \frac{1}{K}$ = raio de curvatura

$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ = versor binormal ; $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$; $\vec{B} \times \vec{N} = -\vec{T}$

2) $\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{dt} \Big/ \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = -\tau\vec{N}$ onde τ = torção

τ positiva em rosca direita

τ negativa em rosca inversa

3) $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\vec{B} \times \underbrace{\frac{d\vec{T}}{ds}}_{K\vec{N}} + \underbrace{\frac{d\vec{B}}{ds}}_{-\tau\vec{N}} \times \vec{T} = \tau\vec{B} - K\vec{T}$

As equações 1,2,3 são as equações de Frenet-Serret

Aplicando as definições anteriores a
$\vec{r}(t) = \cos t\ \vec{i} + \text{sen}\, t\ \vec{j} + t\vec{k}$ tem-se

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j} + \vec{k}$$

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \left(\sin^2 t + \cos^2 t + 1\right)^{1/2} = \sqrt{2} =$$

$$\vec{T} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sin t\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j} + \vec{k}\right) = \text{vers}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{1}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|}\frac{d}{dt}\vec{T} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\frac{1}{2} = \kappa}\Big(\underbrace{-\cos t\ \vec{i} - \text{sen}\, t\ \vec{j}}_{\vec{N}}\Big)$$

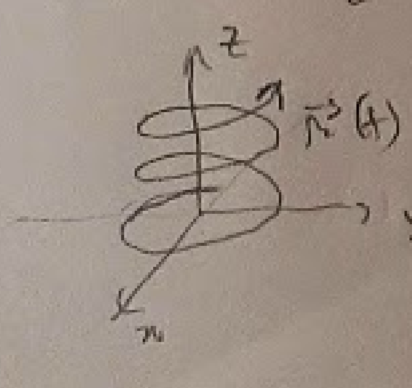
curvatura $\kappa = \frac{1}{2}$; raio de curvatura $\rho = 2$

$$\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\sin t\ \vec{i} - \cos t\ \vec{j} + \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}\vec{k}\Big)$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{1}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|}\frac{d\vec{B}}{dt} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\frac{1}{2} = \tau}\Big(\underbrace{\cos t\ \vec{i} + \text{sen}\, t\ \vec{j}}_{-\vec{N}}\Big) = -\frac{1}{2}\vec{N}$$

logo $\begin{cases} \kappa = 1/2 = \text{curvatura} > 0 \\ \tau = \frac{1}{2} = \text{torção} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ rosca direita como



mostra o gráfico. O ponto $\vec{r}(t)$ avança em sentido direto fazendo progredir o ponto para cima o que significa uma rosca direita.

(6)

a) Seja $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v\vec{T}$ onde $v = \|\frac{d\vec{r}}{dt}\|$; $\vec{T} = \text{vers}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ (versor)

Sabe-se, a partir da definição de curvatura (K) que

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = vK\vec{N} \quad \text{onde } \vec{N} = \text{versor normal} = \text{vers}\left(\frac{d\vec{T}}{dt}\right)$$

Calcule-se

$$\frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\|\frac{d\vec{r}}{dt}\|^3} = \frac{\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt}}{v^3} = \frac{v\vec{T} \times \frac{d}{dt}(v\vec{T})}{v^3}$$

$$= \frac{1}{v}\left(\vec{T} \times \frac{d\vec{T}}{dt}\right) + \frac{1}{v^2}\underbrace{(\vec{T}\times\vec{T})}_{\emptyset}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}\vec{T} \times (vK\vec{N}) = K(\vec{T} \times \vec{N}) = K\vec{B}$$

Dado que $\vec{N} \perp \vec{T}$ tem-se $\|\vec{T} \times \vec{N}\| = 1$, logo

$$K = \text{curvatura} = \frac{1}{v^3}\|\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\| \quad \text{q.e.d.}$$

———— x ————

Sabe-se a partir da definição de torção (τ) que $\frac{d\vec{B}}{dt} = -\tau v\vec{N}$

Além disso $\frac{d\vec{N}}{dt} = \tau v\vec{B} - Kv\vec{T}$

Calcule-se a expressão dada no enunciado:

$$A = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\|^2} = \frac{\left(\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}}{\|\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\|^2}$$

Da demonstração da expressão da curvatura obtém-se

$\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = Kv^3\vec{B}$, logo $A = \frac{Kv^3\left(\vec{B} \cdot \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}\right)}{K^2v^6} = \frac{1}{Kv^3}\left(\vec{B} \cdot \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}\right)$

Desenvolva-se $\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$ (derivada temporal da aceleração $\frac{d\vec{v}}{dt}$),

Ora $\vec{v} = v\vec{T}$ donde

$$\frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}v\vec{T}\right) = \frac{d}{dt}\left(v\underbrace{\frac{d\vec{T}}{dt}}_{vk\vec{N}} + \vec{T}\frac{dv}{dt}\right)$$

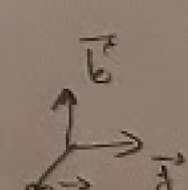
$$= v^2k\underbrace{\frac{d\vec{N}}{dt}}_{\tau v\vec{B} - kv\vec{T}} + \vec{N}\frac{d}{dt}(v^2k) + \vec{T}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt}\underbrace{\frac{d\vec{T}}{dt}}_{vk\vec{N}}$$

Quando se toma o produto interno de $\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$ com $\vec{B}$ só interessa o termo proporcional a $\vec{B}$ dado que $\vec{B}\cdot\vec{T} = \vec{B}\cdot\vec{N} = 0$ ou seja $\vec{B}\perp\vec{N}$ e $\vec{B}\perp\vec{T}$.

Assim $A = \frac{1}{kv^3}\vec{B}\cdot\left(\tau v^3 k\vec{B}\right) = \tau$ q.e.d.

x

Calculemos a curvatura k e torsão τ.



(6b) Seja $\vec{r} = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j} + f(t)\,\vec{k}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + f'(t)\,\vec{k}$$

$$v = \|\vec{v}\| = (1+f'^2)^{1/2} \quad ; \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + f''(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{v}\times\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & f' \\ -\cos t & -\sin t & f'' \end{vmatrix} = \vec{i}(f'\sin t + f''\cos t) + \vec{j}(f''\sin t - f'\cos t) + \vec{k}$$

$$\left\|\vec{v}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right\| = \dots = (f''^2 + f'^2 + 1)^{1/2} = \underbrace{(1+f'^2)}_{=v}\underbrace{\left(1+\frac{f''^2}{1+f'^2}\right)^{1/2}}_{=\kappa} = v\alpha$$

Logo a curvatura $K = \dfrac{\left\| \vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{d\tau} \right\|}{r^3} = \dfrac{r\alpha}{r^3} = \dfrac{\alpha}{r^2} =$

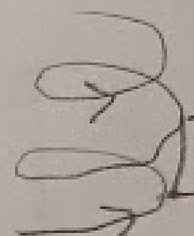
$$= \frac{\left(1 + \frac{f''^2}{1+f'^2}\right)^{1/2}}{(1+f'^2)}$$

Discussão: se $f = \text{cte}$ (curva plana $=$ circunferência) então $f' = f'' = 0$

e $K = 1$

Se $f(t) = at$ com $a = \text{cte}$, então $f' = a$, $f'' = 0$ (hélice com passo $p = a \cdot 2\pi$)

e $K = \dfrac{1}{1+a^2}$ ou seja tem uma curvatura menor que no caso de curva plana



p = passo = diferença em altura após 1 volta.

Calcule-se a torção τ usando o resultado de 6a)

Calcule-se primeiro $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \text{sen}\,t\,\vec{\imath} - \cos t\,\vec{\jmath} + f'''(t)\,\vec{k}$

e o produto interno $\left(\vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right) \cdot \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} =$

$= \text{sen}\,t\,(f'\,\text{sen}\,t + f''\cos t) - \cos t\,(f''\,\text{sen}\,t - f'\cos t) + f'''$

$= f' + f'''$

Donde $\tau = \dfrac{f' + f'''}{1 + f'^2 + f''^2}$.

Discussão
No caso $f(t) = at$, vem $f' = a$, $f'' = f''' = 0$
e $\tau = \dfrac{a}{1+a^2} \gtrless 0$ (rosca direita / rosca inversa). Se $a^2 \ll 1$, então $\tau \simeq a = \dfrac{p}{2\pi}$
ou seja τ proporcional a passo.

(7) No plano (x,y) o gráfico $y = f(x)$ de uma

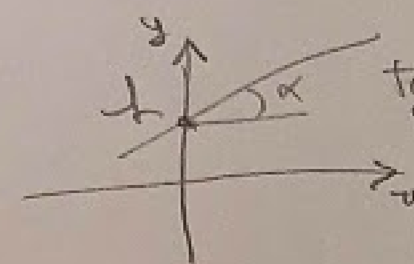
a) função $f(x)$ é uma curva $\vec{r}(t) = t\,\vec{e}_x + f(t)\,\vec{e}_y$

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_x + f'(t)\,\vec{e}_y = v\,\vec{T}$; $\frac{d\vec{v}}{dt} = f''\,\vec{e}_y$

$v = (1+f'^2)^{1/2}$

Calcula-se a curvatura $K = \frac{1}{v^3}\left\|\vec{v}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right\| = \frac{|f''|}{v^3}\underbrace{\|\vec{e}_x\times\vec{e}_y\|}_{1}$

$= \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}$

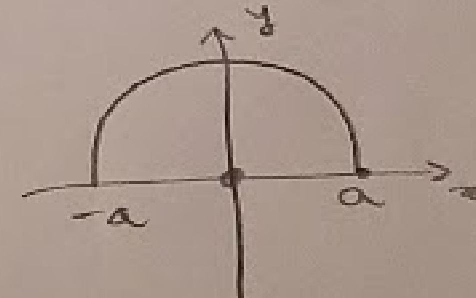


$\operatorname{tg}\alpha = a$

b1) $y = ax + b = at + b = f(t)$ (reta)

$f' = a,\ f'' = 0 \rightarrow K = 0$ (curvatura de reta é nula)

b2) $y = \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-t^2} = f(t)$



arco de circunferência de raio a

$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-t^2}}\cdot -2t = \frac{-t}{f}$; $|t|<a$

$f''(t) = -\frac{1}{f} + \frac{t}{f^2}f' = -\frac{1}{f} - \frac{t^2}{f^3} = \frac{-t^2-f^2}{f^3} = \frac{-a^2}{f^3}$

$(1+f'^2)^{3/2} = \left(1+\frac{t^2}{f^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{f^2+t^2}{f^2}\right)^{3/2} = \frac{a^3}{f^3}$

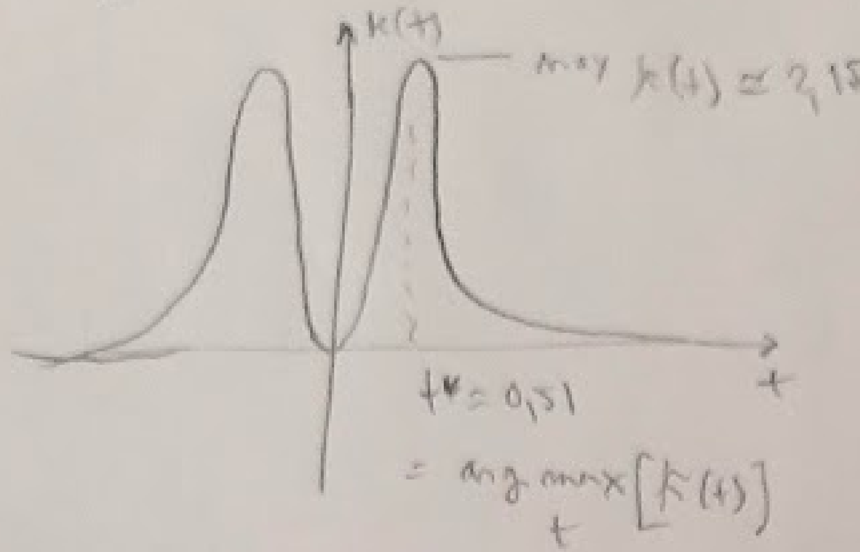
logo $K = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}} = \frac{a^2}{f^3\cdot a^3/f^3} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\text{raio da } \odot}$

b3) $y = x^4 = t^4 = f(t) \rightarrow f' = 4t^3,\ f'' = 12t^2$

$K = \frac{12t^2}{(1+16t^6)^{3/2}} = K(t)$, Nota $K(0)=0$

$\lim_{t\to\infty} K(t) = 0$

O gráfico de $K(t)$ é (pela Wolfram Alpha)

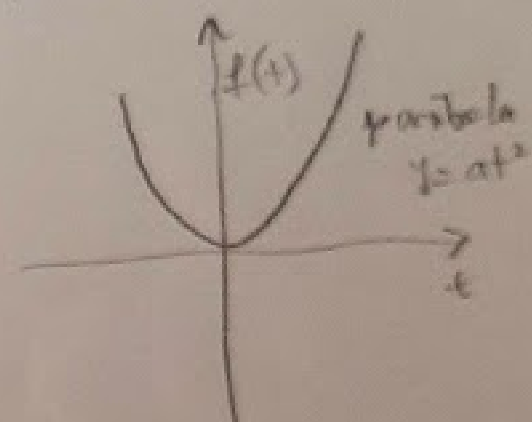


ou seja a curvatura é máxima em $t = t^*$

---

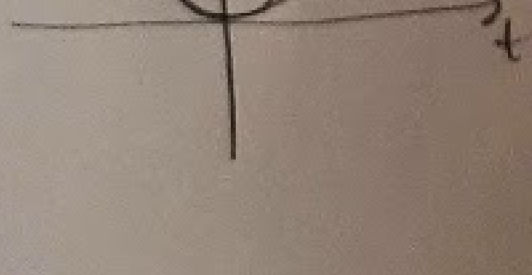
14) $y = ax^2 = at^2 = f(t)$

$f'(t) = 2at \quad , \quad f'' = 2a$



Curvatura $K(t) = \dfrac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}} = \dfrac{2|a|}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}$

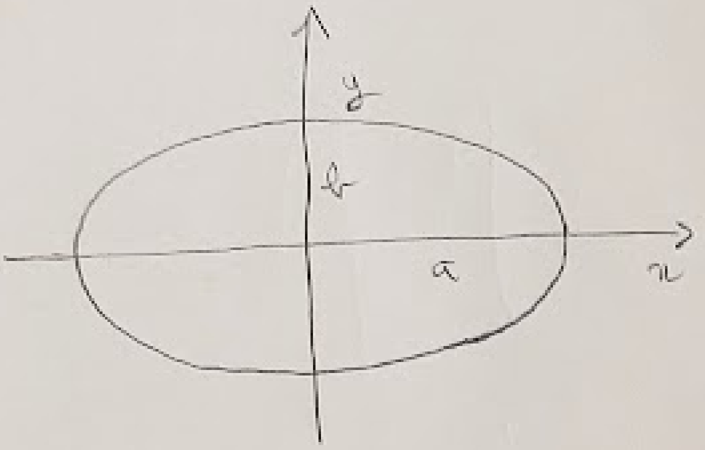
ou seja $K(t)$ é uma função decrescente de $|t|$ sendo o valor máximo obtido na origem $K(0) = 2|a|$ e o raio de curvatura R_c (ou raio da ⊙ osculatriz) é $\frac{1}{2|a|} = R_c$



Quanto maior $|a|$, maior a curvatura em $t = 0$.

8

Elipse de raio maior a e menor b



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=y(x)$$

$$f(t)=\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}t^2\right)^{1/2}$$

$$f'(t)=\frac{1}{2f}\cdot -2\frac{b^2}{a^2}t=\frac{-b^2t}{a^2f}$$

$$f''(t)=\frac{-b^2}{a^2f}+\frac{b^2tf'}{a^2f^2}=\frac{-b^2}{a^2}\left(\frac{1}{f}+\frac{t^2}{f^3}\frac{b^2}{a^2}\right)=$$

$$=\frac{-b^2}{a^2}\left(\frac{f^2a^2+t^2b^2}{f^3a^2}\right)=\frac{-b^2}{a^4f^3}\cdot a^2b^2=\frac{-b^4}{a^2f^3}$$

$$(1+f'^2)^{3/2}=\left(1+\frac{b^4t^2}{a^4f^2}\right)^{3/2}=\left(\frac{a^4\cdot\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}t^2\right)+b^4t^2}{a^4f^2}\right)^{3/2}$$

$$=\frac{\left(a^4b^2-b^2(a^2-b^2)t^2\right)^{3/2}}{a^6f^3}$$

Donde a curvatura $k(t)$ vem:

$$k(t)=\frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}=\frac{b^4\cdot a^6\cancel{f^3}}{a^2\cancel{f^3}\cdot\left(a^4b^2-b^2(a^2-b^2)t^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{b^4a^4}{\left(a^4b^2-b^2(a^2-b^2)t^2\right)^{3/2}}$$

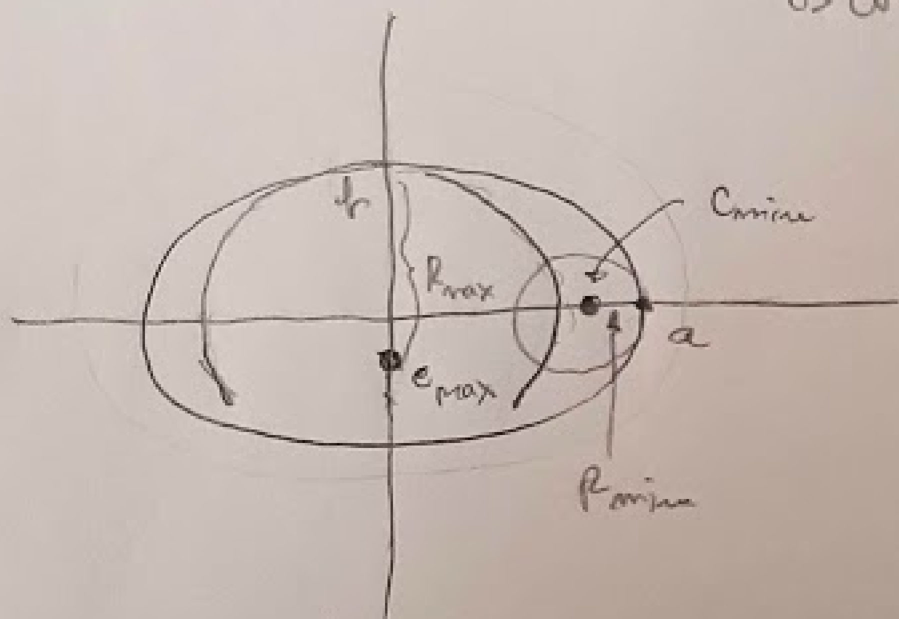
O resultado é consistente com (7b2) quando $a=b$, vindo $k(t)=\frac{1}{a}$. O valor de $k(t)$ é crescente em t sendo mínimo em $t=0$, $k(0)=\frac{b}{a^2}$ e máximo em $t=a$, $k(a)=\frac{a}{b^2}$

$$k_{min} = \frac{b}{a^2} = \frac{1}{R_{max}} \Rightarrow R_{max} = \frac{a^2}{b}$$

$$k_{max} = \frac{a}{b^2} = \frac{1}{R_{min}} \Rightarrow R_{min} = \frac{b^2}{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \left(R_{max}^2 R_{min}\right)^{1/3} \\ b = \left(R_{min}^2 R_{max}\right)^{1/3} \end{cases}$$

onde R_{max} e R_{min} são os valores máximo e mínimo dos raios de curvatura. Dado que $\frac{a}{b} \geq 1$ verifica-se que $R_{max} \geq a$, $R_{min} \leq b$. As circunferências osculatrizes têm centros C_{max} (de raio R_{max}) e C_{min} (de raio R_{min})



Aplicando $R_{min} = 50$
$R_{max} = 400$

vem $a = \left(400^2 \cdot 50\right)^{1/3} = 200$ m

$b = \left(50^2 \cdot 400\right)^{1/3} = 100$ m