Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 3

1) Use a fórmula genérica da parametrização de uma superfície:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{e}_x + y(u,v)\vec{e}_y + z(u,v)\vec{e}_z, u \in A, v \in B.$$

onde A, B são certos intervalos.

a) para representar parametricamente a superfície lateral de um cilindro de raio R, com eixo vertical paralelo ao eixo $\vec{e}_z$, com z variando entre 0 e 2. Sugestão: Use: $u = \theta = arc\ tg\left(\frac{y}{x}\right)$ ou seja a coordenada polar no plano x,y e $v = z$. Determine os intervalos A, B correspondentes.

b) Calcule as derivadas $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ e o vetor $\vec{a}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ em função de (u,v). Calcule o versor normal à superfície, $\vec{n} = vers(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v})$.

c) O elemento infinitesimal de superfície é dado por: $dS = ||\vec{a}||\ du\ dv$. Calcule esse elemento infinitesimal em função de (u,v) e a área da superfície $\int_A \int_B ||\vec{a}||\ du\ dv$.

2) Uma curva descrita em coordenadas polares (ρ,θ) é dada por uma certa função: $\rho(\theta)$. Por exemplo num arco de circunferência de raio R, vem $\rho(\theta) = R,\ \ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Considerando $\overrightarrow{r1}(\theta)$ o vetor posição para o argumento angular θ, tem-se que o elemento infinitesimal de arco é:

$dl = \left|\left|\frac{d\overrightarrow{r1}}{d\theta}\right|\right| d\theta = (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}$ onde $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ e a área infinitesimal do sector circular (estendendo-se de $\rho = 0$ até $\rho(\theta)$ e entre θ e $\theta + d\theta$) é $dS = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{r1} \times \frac{\partial \overrightarrow{r1}}{\partial \theta}\right|\right| d\theta$. A fórmula é a mesma para uma curva torsa genérica $\vec{r}(t)$ onde $dS = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{r1} \times \frac{\partial \overrightarrow{r1}}{\partial t}\right|\right| dt$.

a) Aplique essas fórmulas para deduzir o perímetro da circunferência e área do círculo de raio R.

b) Calcule o comprimento da linha e área subtendida correspondendente a $\rho(\theta) = k\theta,\ \ \theta \in [0,2\pi]$. Compare com o perímetro e área do círculo de raio médio $R = \pi\theta$.

3) A temperatura num ponto $P(x,y)$ de uma placa metálica é dada pelo campo escalar $T(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

a) Calcule o gradiente

b) Determine a fórmula das isolinhas e forneça um vetor paralelo às isolinhas. Note que esse vetor deve ser perpendicular ao gradiente.

c) Determine a taxa de variação de $T(x,y)$ ao longo da direção dada pelo vetor $2\vec{e}_x - \vec{e}_y$.

d) Calcule o Laplaciano de $T(x,y)$.

4) Dado o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = x^2 y\vec{e}_x + xyz\vec{e}_y + z^2 y\vec{e}_z$. Calcule a sua divergência e rotacional.

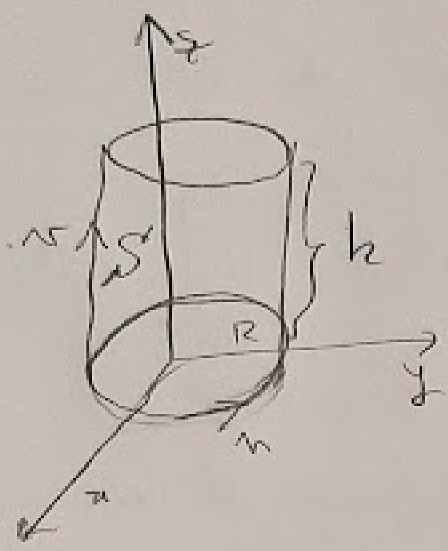
5) Calcule a divergência e rotacional de um campo de velocidade no plano x,y correspondente a uma rotação com velocidade angular Ω constante.

Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra

Série 3 - resolução

1

a)



$S = \{ \vec{r}(u,v) = R\cos u\, \vec{e_x} + R\sin u\, \vec{e_y} + v\, \vec{e_z} : u \in [0, 2\pi]$
$v \in [0, h=2] \}$

S = superfície lateral completa do cilindro de raio R e altura h.

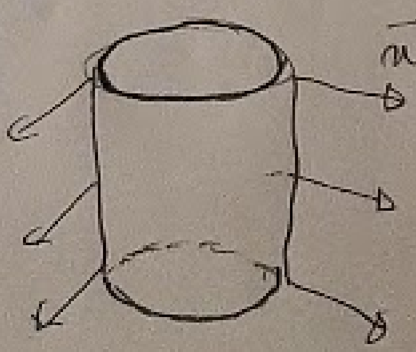
b) $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = -R\sin u\, \vec{e_x} + R\cos u\, \vec{e_y}$

$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{e_z}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ -R\sin u & R\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = R\cos u\, \vec{e_x} + R\sin u\, \vec{e_y}$$

$\vec{n} = \text{vers}\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = \cos u\, \vec{e_x} + \text{sen}\, u\, \vec{e_y}$ = versor normal à superfície

$\|\vec{n}\| = 1$



c) dS = elemento infinitesimal de superfície =

$$dS = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du\, dv = R$$

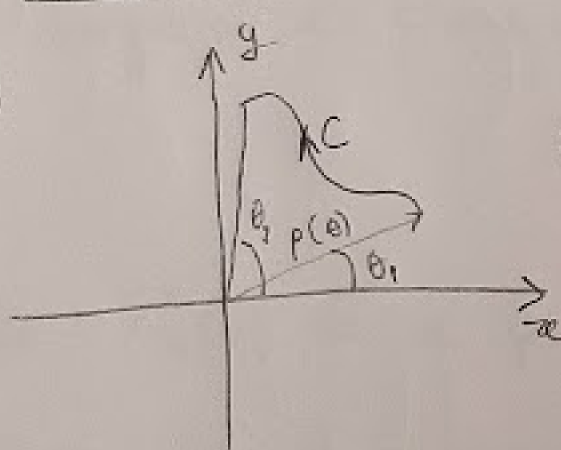
A área A da superfície é:

$$A = \int_{0\,(v)}^{2} \int_{0\,(u)}^{2\pi} dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} R\, du\, dv = R\, 2\pi \cdot 2 = 4\pi R$$

= $\underbrace{\text{perímetro da circunferência de raio } R}_{2\pi R}$ x $\underbrace{\text{altura}}_{h}$

---

(2)



$C = \{ \rho(\theta) \text{ vers } \vec{r}_1,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2] \} =$

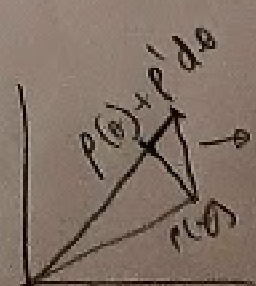
$= \{ \overbrace{\rho(\theta) \cos\theta\, \vec{e}_x + \rho(\theta) \sin\theta\, \vec{e}_y}^{\vec{r}_1(\theta)},\ \theta \in [\theta_1, \theta_2] \}$ onde $\rho(\theta) = \|\vec{r}\|$

O elemento de arco da curva é:

$$dl = \|d\vec{r}_1\| = \left\| \frac{d\vec{r}_1}{d\theta} \right\| d\theta$$

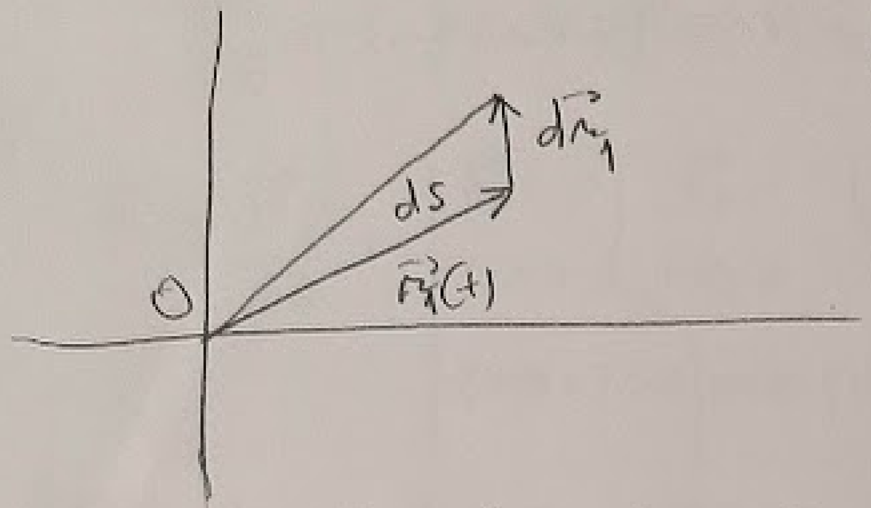
$$\frac{d\vec{r}_1}{d\theta} = (-\rho \sin\theta + \rho' \cos\theta)\, \vec{e}_x + (\rho \cos\theta + \rho' \sin\theta)\, \vec{e}_y$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} \right\| d\theta = (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}\, d\theta = dl$$



$$\to dl = \sqrt{(\rho\, d\theta)^2 + (\rho' d\theta)^2} = d\theta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$$

A área infinitesimal dS_1 do triângulo que une os pontos $\vec{r}_1, \vec{r}_1 + d\vec{r}$ e O = origem é:



$$dS_1 = \frac{1}{2} \| \vec{r}_1 \times d\vec{r}_1 \| =$$

$$= \frac{1}{2} \| \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} \| dt$$

onde t é o parâmetro

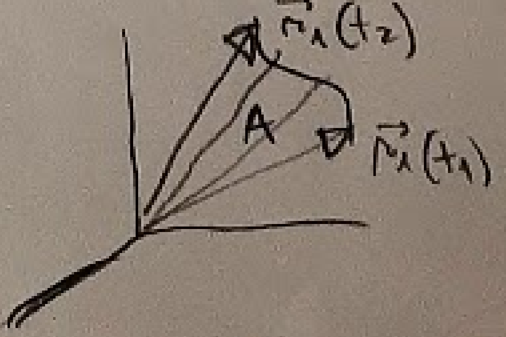
Se considerarmos 2 parâmetros u, t e se a superfície é parametrizada $S = \{ \vec{r}(u,t) = u\, \vec{r}_1(t)$
$u \in [0,1]$
$t \in [t_1, t_2] \}$,

onde $\vec{r}_1(t)$ é a parametrização de uma curva, tem-se que

$$dS = \| \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}_{\vec{r}_1} \times \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}}_{u \frac{d\vec{r}_1}{dt}} \| \, du\, dt = u \| \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt} \| du\, dt$$

Integrando em u vem $dS_1 = \int_0^1 u\, du \cdot \| \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt} \| =$

$= \frac{1}{2} \| \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt} \|$. A área de S é representada por



$$A = \int_{t_1}^{t_2} dS_1 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \| \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt} \| dt$$

(Ex: área de uma esconrega em espiral)

Se $\vec{r}_1(\theta)$ for uma curva plana então

$$\vec{r}_1(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta\,\vec{e}_x + \rho(\theta)\sin\theta\,\vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{r}_1}{d\theta} = (-\rho\sin\theta + \rho'\cos\theta)\,\vec{e}_x + (\rho\cos\theta + \rho'\sin\theta)\,\vec{e}_y$$

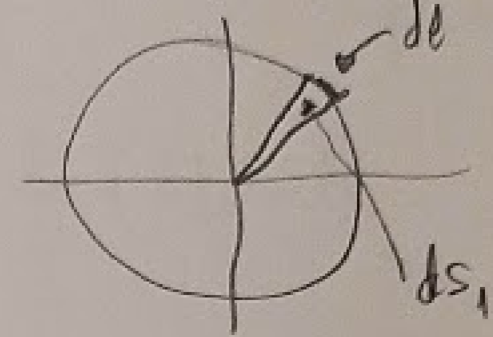
$$\vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{d\theta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \rho\cos\theta & \rho\sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta + \rho'\cos\theta & \rho\cos\theta + \rho'\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 d\theta$$

logo $ds_1 = \frac{1}{2}\left\|\vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{d\theta}\right\| = \frac{\rho^2}{2}\, d\theta$

(2a) Circunferência ⊙ de raio R =

$$= \{ \rho(\theta)\cos\theta \, \vec{e_x} + \rho(\theta)\sin\theta \, \vec{e_y} \, , \, \theta \in [0, 2\pi] \}$$

onde $\rho(\theta) = R = cte$



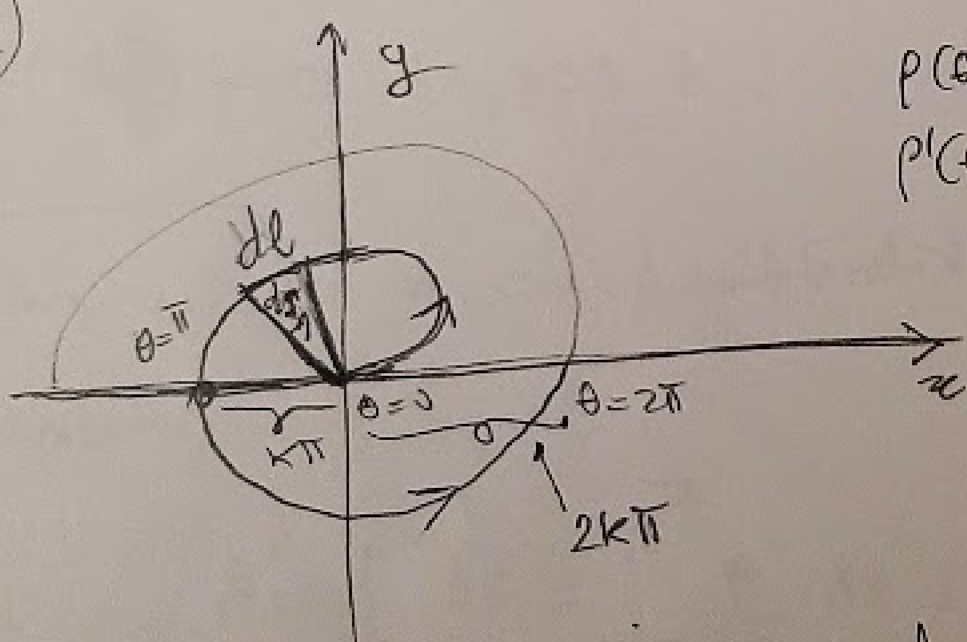
$$\rho'(\theta) = \frac{d\rho}{d\theta} = 0$$

$$dl = (R^2)^{1/2} d\theta = R\, d\theta$$

Donde perímetro de ⊙ $= \int_{0\,(\theta)}^{2\pi} dl = \int_0^{2\pi} R\, d\theta = 2\pi R$

Área da ⊙ $= \int_0^{2\pi} ds_1 = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2$

(2b)



$\rho(\theta) = k\theta$

$\rho'(\theta) = k$

A curva descreve uma espiral com 1=1 voltas

Assim $dl = (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2} d\theta = k(\theta^2+1)^{1/2} d\theta$ = elemento de arco

$$ds_1 = \frac{\rho^2}{2} d\theta = \frac{k^2\theta^2}{2} d\theta = \text{elemento de setor circular}$$

Para a curva completa de $l=1$ voltas tem-se

$$\text{perímetro} = \int_{0\,(\theta)}^{2\pi} dl = \int_0^{2\pi} k\,(\theta^2+1)^{1/2}\,d\theta = \begin{pmatrix}\text{usando}\\ \text{Wolfram-}\\ \text{Alpha}\end{pmatrix}$$

$$= k\cdot\Big[\underbrace{\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2\pi)}_{\simeq 21{,}256}\Big] \simeq k\cdot(21{,}256)$$

onde se usou $\operatorname{arcsinh}(\theta) = \ln\left(\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right) =$
= arco de seno hiperbólico.

O perímetro dessa espiral é próximo do perímetro do círculo de raio médio $R = k\pi$ ou seja perímetro $= k\pi \cdot 2\pi =$
$= (2\pi^2)\,k \simeq 19{,}739\ k$.

Para calcular a área A subtendida pela espiral calcula-se o integral

$$A = \int_{0\,(\theta)}^{2\pi} ds_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{k^2\theta^2}{2}\,d\theta =$$

$$= \frac{k^2}{2}\frac{\theta^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{k^2}{6}\cdot(2\pi)^3 = \frac{4}{3}\pi^3 k^2 \simeq 41{,}342\ k^2$$

enquanto que a área do círculo com o raio médio $R = k\pi$ é $k^2\pi^3$ que é menor.

③ Consideremos o campo escalar $T(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$

ⓐ Gradiente de T = grad $T = \nabla T$ =

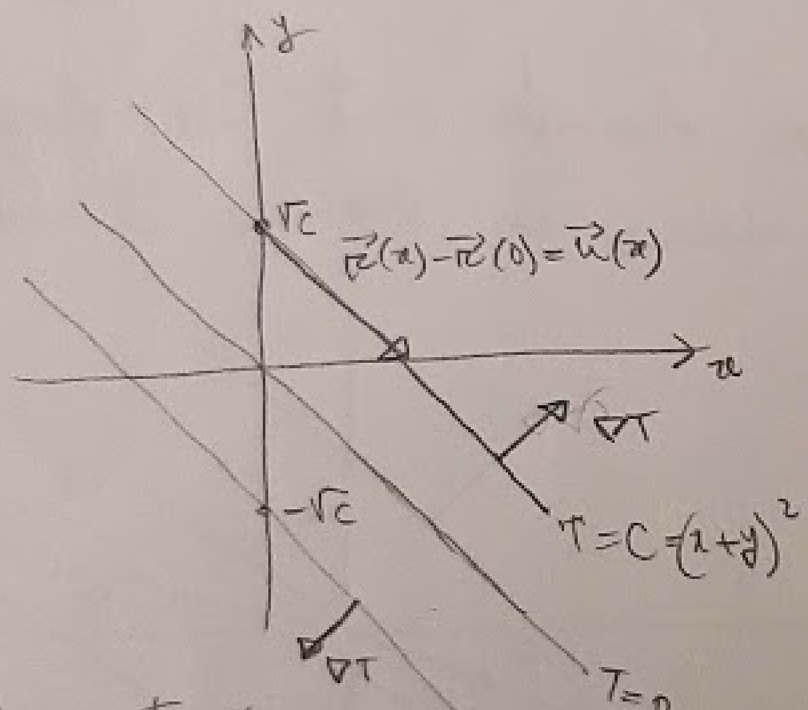
$$= \frac{\partial T}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{e}_y = (2x+2y)\vec{e}_x + (2y+2x)\vec{e}_y$$

ou $\nabla T = 2(x+y)\cdot\nabla(x+y) = 2(x+y)(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$.

∇T aponta no sentido da máxima variação positiva de $T(x,y)$.

ⓑ As isolinhas são o lugar geométrico onde

$T(x,y) = C =$ cte , ou seja $x+y = \pm\sqrt{C} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{C} - x$



Representação esquemática das isolinhas

O vetor $\vec{r}$ que descreve uma isolinha é:

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y = x\,\vec{e}_x + (\pm\sqrt{C} - x)\,\vec{e}_y = \vec{r}(x)$$

O vetor colinear com as isolinhas será $\vec{r}(x) - \vec{r}(0) = \vec{u}(x)$

$$= x\,\vec{e}_x + (\pm\sqrt{C} - x)\,\vec{e}_y - (\pm\sqrt{C})\,\vec{e}_y$$
$$= x\,\vec{e}_x - x\,\vec{e}_y$$

Provemos que $\vec{u}(x)$ é perpendicular ou ortogonal a ∇T.
Para tal calculemos o produto interno:

$$\vec{u}(x)\cdot\nabla T = (x, -x)\cdot(x+y, x+y) = \emptyset \Rightarrow \vec{u}(x) \perp \nabla T$$

(c) Taxa de variação de $T(x,y)$ ao longo do vetor

$\vec{v} = 2\vec{e}_x - \vec{e}_y = (2,-1) \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{5}$

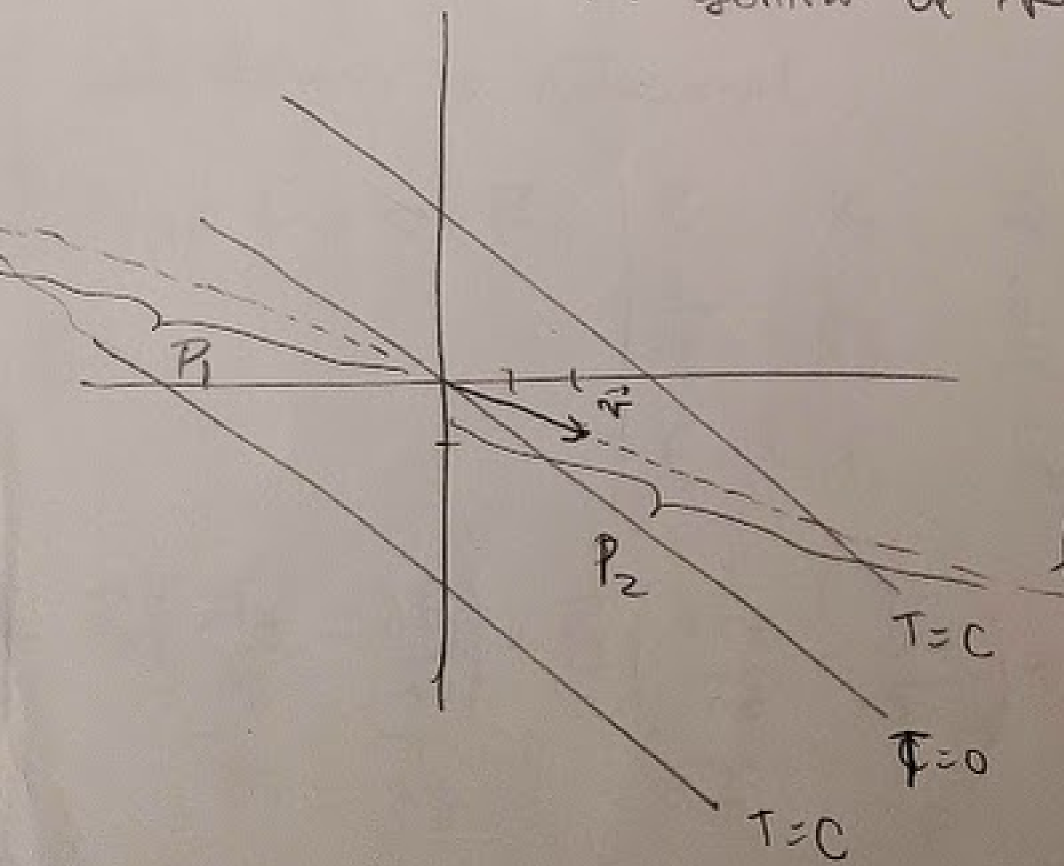
Calculemos vers $\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}(2,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$

Assim a derivada dirigida ao longo de vers $\vec{v}$ é:

$$\frac{dT}{dl} = \nabla T \cdot \text{vers } \vec{v} = (2x+2y, 2x+2y)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x+2y) = \pm\sqrt{C}\,\frac{2}{\sqrt{5}}$$

onde dl é o elemento do arco ao longo de $\vec{v}$ com l crescente no sentido de $\vec{v}$



Ao percorrer a linha l alinhada com $\vec{v}$, o campo $T(x,y)$ varia ao longo do vector $\vec{r} = k\vec{v} = (2k, -k) = (x,y)$ e portanto

$T(x,y) = (x+y)^2 =$

$= (2k-k)^2 = k^2 = \frac{x^2}{4}$

e portanto $\frac{dT}{dk} = 2k$ que é positiva na parte P_2 $(k>0)$ negativa na parte P_1 $(k<0)$

(d) Laplaciano de T = lap T = $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(2x+2y)}_{\frac{\partial T}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(2x+2y)}_{\frac{\partial T}{\partial y}} = 2+2=4$$

---

(4) Dado o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = \underbrace{x^2y}_{F_x}\vec{e}_x + \underbrace{xyz}_{F_y}\vec{e}_y + \underbrace{z^2y}_{F_z}\vec{e}_z$ em $\mathbb{R}^3$. Calculamos a divergência:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial x}}_{2xy} + \underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial y}}_{xz} + \underbrace{\frac{\partial F_z}{\partial z}}_{2zy}$$

Calculemos o rotacional:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & xyz & z^2y \end{vmatrix} =$$

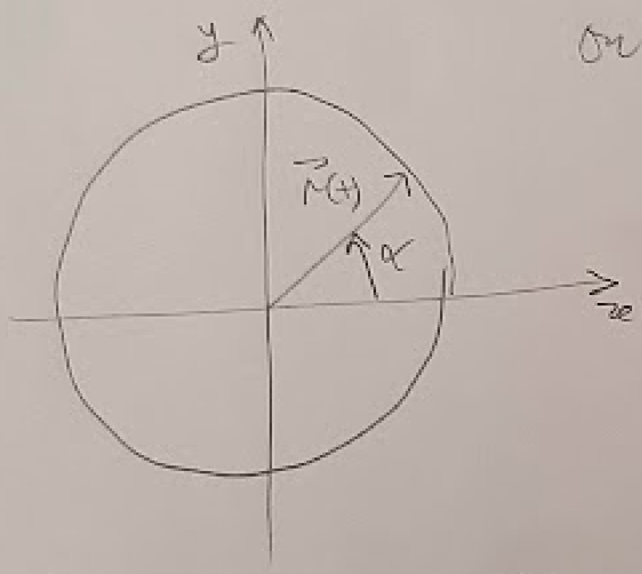
$$= \vec{e}_x\left(\underbrace{\frac{\partial F_z}{\partial y}}_{z^2} - \underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial z}}_{xy}\right) + \vec{e}_y\left(\underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial z}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial F_z}{\partial x}}_{0}\right) + \vec{e}_z\left(\underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial x}}_{yz} - \underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial y}}_{x^2}\right)$$

$$= (z^2 - xy)\vec{e}_x + (yz - x^2)\vec{e}_z$$

(5) O Movimento circular uniforme ou com velocidade angular Ω (rad/s) no plano (x,y) é descrito pela trajetória $\vec{r}(t)$ em função do tempo t na forma:

$$\vec{r}(t) = \overbrace{R\cos(\underbrace{\Omega t}_{\alpha(t)})}^{x}\,\vec{e}_x + \overbrace{R\sin(\underbrace{\Omega t}_{\alpha(t)})}^{y}\,\vec{e}_y$$

onde $\alpha(t) = \Omega t$ é o ângulo que $\vec{r}(t)$ faz com $\vec{e}_x$



onde $R = \|\vec{r}(t)\|$

A velocidade $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} =$

$$-R\Omega\sin(\Omega t)\,\vec{e}_x + R\Omega\cos(\Omega t)\,\vec{e}_y$$

$$= \underbrace{-\Omega y}_{v_x(x,y)}\,\vec{e}_x + \underbrace{\Omega x}_{v_y(x,y)}\,\vec{e}_y = \vec{v}(x,y)$$

$$= \frac{d\alpha}{dt}\left(-y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y\right)$$

Assim $\vec{v}(x,y)$ é o campo vetorial da velocidade associado a uma rotação sólida de um meio contínuo (que pode ser um fluido), e que em cada instante t, rodou $\alpha(t)$ rad.

Assim
$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = \dfrac{d\alpha}{dt}(\emptyset + \emptyset) = \emptyset \\[2ex] \operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y\dfrac{d\alpha}{dt} & x\dfrac{d\alpha}{dt} & 0 \end{vmatrix} = 2\dfrac{d\alpha}{dt}\vec{e}_z = 2\Omega\,\vec{e}_z = \text{Vorticidade,} \end{cases}$$

a qual dá uma medida da velocidade de rotação dos vórtices, redemoinhos ou turbilhões