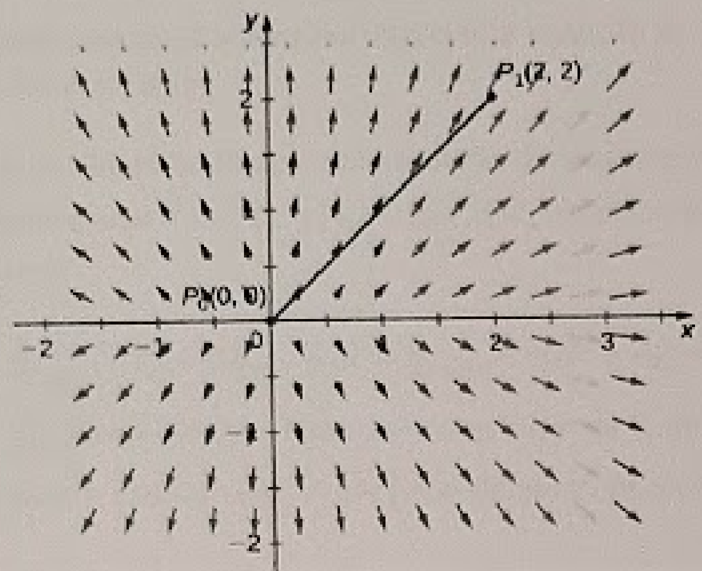
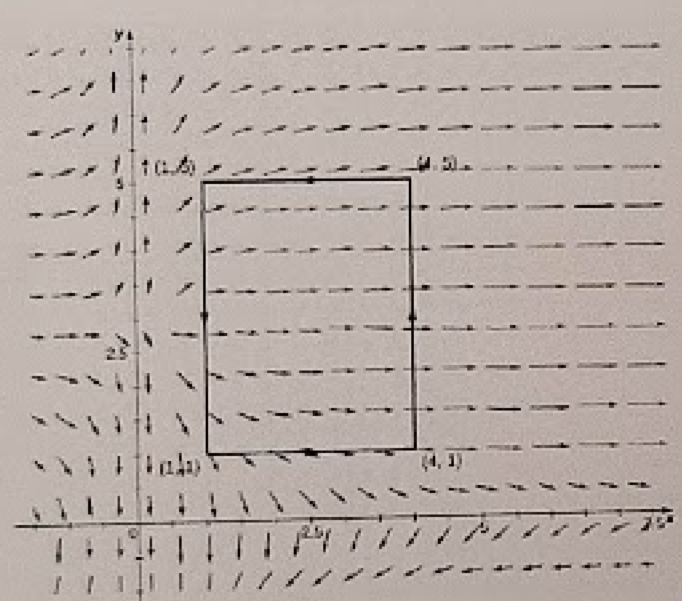
Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 4



1) O integral de linha ao longo de uma curva $C = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in [t_1, t_2]\}$ de um campo vetorial $\vec{F}$ é

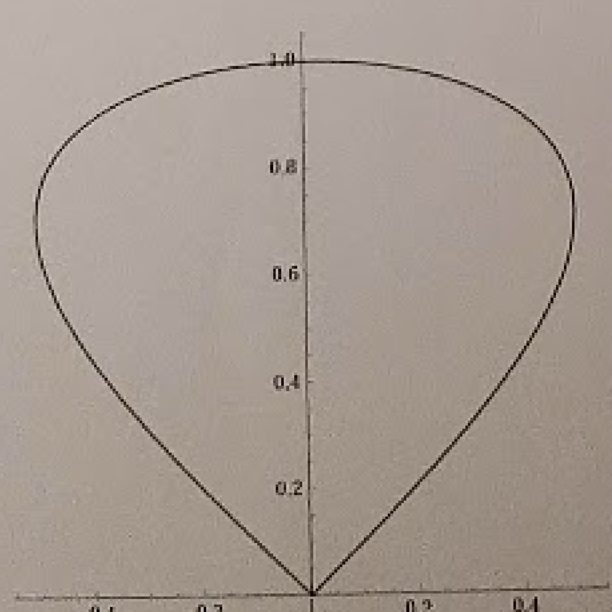
$I = \int_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} dt.$ Aplique a fórmula anterior para calcular I com $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = 2x\,\vec{e}_x + 4y\vec{e}_y = (2x, 4y)$ para o trajeto C que une o pontos P1=(0,0) a P2=(2,2) (ver fig. anexa). Comece por parametrizar a curva $\vec{r}(t)$ em função de t. Resposta: 12.



2) Use o teorema de Green da circulação para calcular o integral cíclico descrito em sentido direto, ao longo da curva plana sobre o plano x,y, com a sequência de vértices (1,1), (4,1), (4,5), (1,5) do campo vetorial:

$\vec{F}(x, y) = x^2 y\,\vec{e}_x + (y - 3)\vec{e}_y$. Compare com o método direto decompondo o integral cíclico na soma de 4 integrais de linha ao longo dos trajetos retilíneos que unem os vértices (pontos) consecutivos do retângulo. Teorema de Green da circulação: $\oint_{C=\partial D}(P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y) \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_{C=\partial D} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_{C=\partial D} P dx + Q dy =$

$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$ = Circulação do campo vetorial $\vec{F}$.



3) O teorema acima permite exprimir a área plana A no plano (x,y) de um domínio D cuja fronteira é uma curva fechada C definida paramétricamente por $C = \{(x(t), y(t)), t \in [t_1, t_2]\}$ na forma:

$$A = \iint_D dx\, dy = \frac{1}{2}\oint_{C=\partial D}(-y dx + x dy) = \int_{t_1}^{t_2}[-y(t)\frac{dx}{dt} + x(t)\frac{dy}{dt}]dt$$

Nota: Utiliza-se $\vec{F} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$ no teorema de Green da circulação.

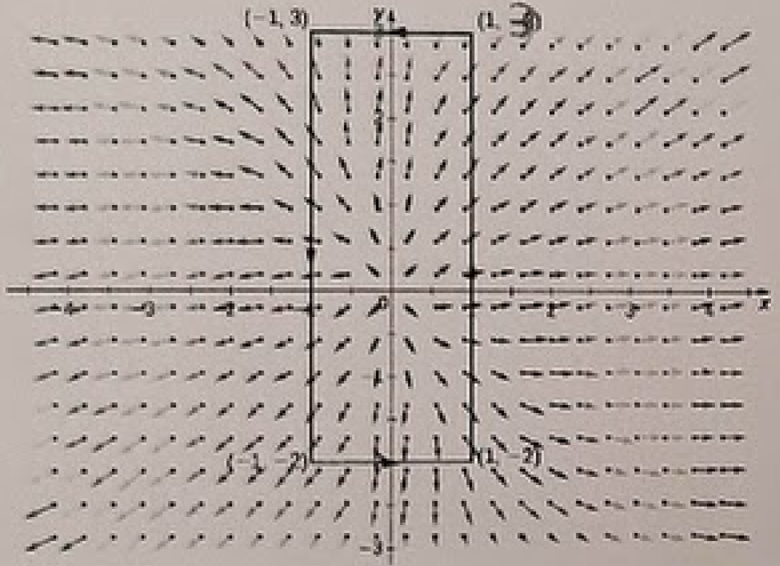
a) Utilizando o resultado acima exprima a área delimitada pela curva: $C = \{(\sin(t)\cos(t), \sin(t)), t \in [0,\pi]\}$ (figura anexa). Resposta 2/3.

b) Utilize a referida formulação para determinar a área no interior de uma elipse de raios maior e menor a, b respetivamente. Comece por escrever a equação da elipse e parametrizar a elipse através de uma variável angular $\theta \in [0,2\pi]$.

4)O teorema de Green do fluxo é um corolário do teorema de Green da circulação e exprime o fluxo de um campo vetorial bidimensional $\vec{F} = P(x,y)\vec{e}_x + Q(x,y)\vec{e}_y$ no plano (x,y) através de uma curva fechada C descrita em sentido direto na forma:

$$\oint_{C=\partial D}(P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y)\cdot\vec{n}\,dl = \oint_{C=\partial D}\vec{F}\cdot(\overrightarrow{dr}\times\vec{e}_z) = \oint_{C=\partial D}(-Qdx + Pdy) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy =$$

$\iint_D div\,\vec{F}\,dx\,dy$ = Fluxo para o exterior de C, do campo vetorial $\vec{F}$ onde $\vec{n}$ é o versor normal apontando para o exterior e $dl = \left\|\overrightarrow{dr}\right\|$ é o elemento de arco.



Utilizando o teorema acima, calcule o fluxo de um campo de velocidades:

$$\vec{v}(x,y) = (5x+y)\vec{e}_x + (x+3y)\vec{e}_y \;\; m/s$$

através do retângulo de vértices (-1,-2), (1,-2), (1,-3) e (-1,3). Resposta: 80 m²/s

Série 4 – Resolução

① O segmento de reta que une $P_1 = (0,0)$ a $P_2 = (2,2)$ no plano (x,y) é: $\vec{r}(t) = \{P_1 + t\,\overrightarrow{P_1P_2},\ t \in [0,1]\}$

onde $\overrightarrow{P_1P_2}$ = vetor que une P_1 a $P_2 = P_2 - P_1 = (2,2) - (0,0) = (2,2)$

Assim $\vec{r}(0) = P_1$, $\vec{r}(1) = P_2$ ou seja

$$\vec{r}(t) = t(2,2) = (2t, 2t) = (x, y)$$

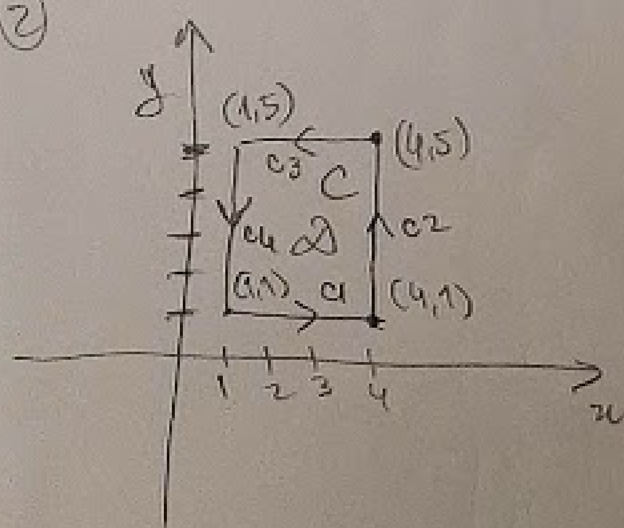
O campo $\vec{F} = \underbrace{f_x(x,y)}_{2x}\vec{e}_x + \underbrace{f_y(x,y)}_{4y}\vec{e}_y = 2x\,\vec{e}_x + 4y\,\vec{e}_y$

$= 4t\,\vec{e}_x + 8t\,\vec{e}_y = \vec{F}(\vec{r}(t)) = (4t, 8t)$

Assim $I = \int_0^1 \underbrace{\vec{F}(\vec{r}(t))}_{(4t,8t)} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{(2,2)}\,dt = \int_0^1 24t\,dt =$

$= 24 \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{24}{2} = 12$ q.e.d.

---

② 

C = trajecto que une

$P_1(1,1) \to P_2(4,1) \to P_3(4,5) \to P_4(1,5)$

$= C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

Campo vetorial

$\vec{F}(x,y) = f_x\,\vec{e}_x + f_y\,\vec{e}_y =$

$= \underbrace{x^2y}_{F_x = P}\,\vec{e}_x + \underbrace{(y-3)}_{F_y = Q}\,\vec{e}_y$

Vamos calcular o integral cíclico $I=\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr} =$

$= \oint_C (P\,dx + Q\,dy)$ pela via direta, dado pela soma dos integrais de caminho nos 4 troços C_1, C_2, C_3, C_4 (obtendo $I_1+I_2+I_3+I_4$) e usando o teorema de Green

$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$. Vamos verificar que

$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$.

via direta $\quad C_1 = \{ \underbrace{P_1}_{(1,1)} + \underbrace{\overrightarrow{P_1P_2}}_{(3,0)}\, t,\ t\in[0,1] \} = \{ (\underbrace{1+3t}_{x}, \underbrace{1}_{y}),\ t\in[0,1] \}$

$$I_1 = \int_{C_1} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_0^1 \underbrace{\vec{F}}_{(f_x,f_y)} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\overrightarrow{P_1P_2}=(3,0)} dt = \int_0^1 3 f_x\, dt =$$

$$= \int_0^1 3x^2 y\, dt = \int_0^1 3(1+3t)^2\cdot 1\, dt = \int_0^1 (3+18t+27t^2)\, dt$$

$$= 3 + 18\cdot\frac{1}{2} + 27\cdot\frac{1}{3} = 3+9+9 = 21$$

$C_2 = \{ \underbrace{P_2}_{(4,1)} + \underbrace{\overrightarrow{P_2P_3}}_{(0,4)}\, t,\ t\in[0,1] \} = \{ (\underbrace{4}_{x}, \underbrace{1+4t}_{y}),\ t\in[0,1] \}$

$$I_2 = \int_{C_2} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_0^1 \vec{F}\cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\overrightarrow{P_2P_3}=(0,4)} dt = \int_0^1 4 f_y\, dt =$$

$$= \int_0^1 4(\underbrace{y-3}_{4t-2})\, dt = \int_0^1 4(4t-2)\,dt = 16\cdot\frac{1}{2} - 8 = 0$$

$$C_3 = \{ \underbrace{P_3}_{(4,5)} + \underbrace{\overrightarrow{P_3P_4}}_{(-3,0)}\, t ,\ t \in [0,1] \} = \{ (\underbrace{4-3t}_{x}, \underbrace{5}_{y}),\ t \in [0,1] \}$$

$$I_3 = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\overrightarrow{P_3P_4} = (-3,0)} dt = \int_0^1 -3 f_x \, dt = \int_0^1 -3 x^2 y \, dt =$$

$$= -3 \int_0^1 (4-3t)^2 \cdot 5 \, dt = -15 \int_0^1 (16 - 24t + 9t^2) \, dt =$$

$$= -15 \cdot (16 - \underbrace{24 \cdot \tfrac{1}{2}}_{12} + \underbrace{9 \cdot \tfrac{1}{3}}_{3}) = -15 \cdot (\underbrace{16 - 12 + 3}) = -7 \cdot 15 = -105$$

$$C_4 = \{ \underbrace{P_4}_{(1,5)} + \underbrace{\overrightarrow{P_4P_1}}_{(0,-4)}\, t ,\ t \in [0,1] \} = \{ (\underbrace{1}_{x}, \underbrace{5-4t}_{y}),\ t \in [0,1] \}$$

$$I_4 = \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\overrightarrow{P_4P_1} = (0,-4)} dt = \int_0^1 -4 f_y \, dt =$$

$$= \int_0^1 -4 (\underbrace{y-3}_{2-4t}) \, dt = -4 \left[\int_0^1 (2-4t) \, dt \right] = -4 \cdot (2 - 4 \cdot \tfrac{1}{2}) = 0$$

Assim $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 21 + 0 - 105 + 0 = -84$

Calculemos o integral recorrendo ao Teorema de Green. Assim $x \in [1,4]$, $y \in [1,5]$

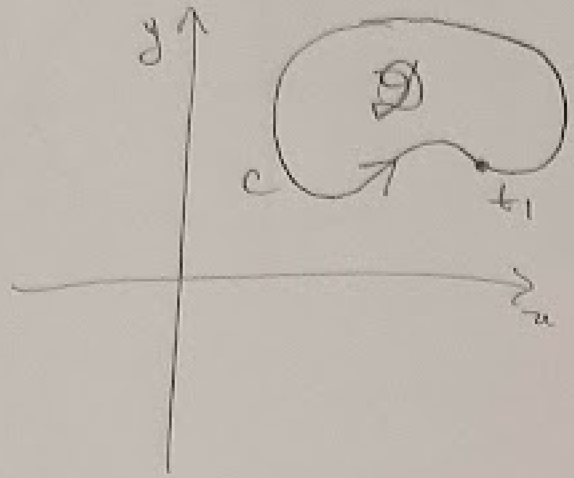
$$I = \int_1^4 dx \int_1^5 dy \cdot \Big(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}}_{\substack{\frac{\partial}{\partial x}(y-3) \\ = 0}} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_{\substack{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) \\ = x^2}} \Big) = \int_1^4 -x^2 dx \underbrace{\int_1^5 dy}_{4} =$$

$$= -4 \int_1^4 x^2 dx = -4 \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^4 = -\frac{4}{3} \cdot (64-1) = \frac{-63 \cdot 4}{3} =$$

$$= -84$$

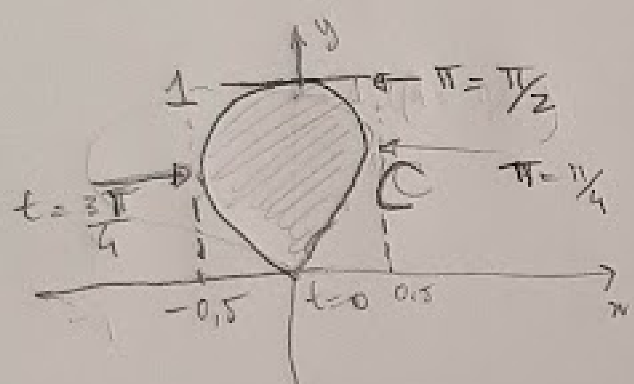
Verifica-se então que os resultados obtidos pela via direta e pelo teorema de Green coincidem tendo esta última muito mais fácil e consequentemente menos susceptível a erros de calculo.

(3) $A = \iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_C \left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right) dt =$



= área no interior da curva fechada C = área de $\mathcal{D}$

(3a) $C = \{ r(t) = \underbrace{\sin t \cos t}_{x(t)}\, \vec{e}_x + \underbrace{\sin t}_{y(t)}\, \vec{e}_y \,,\ t \in [0, \pi] \}$



$\frac{dx}{dt} = \cos^2 t - \sin^2 t$

$\frac{dy}{dt} = \cos t$

logo $-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} = -\sin t\cos^2 t + \sin^3 t + \sin t \cos^2 t$

$= \sin^3 t$

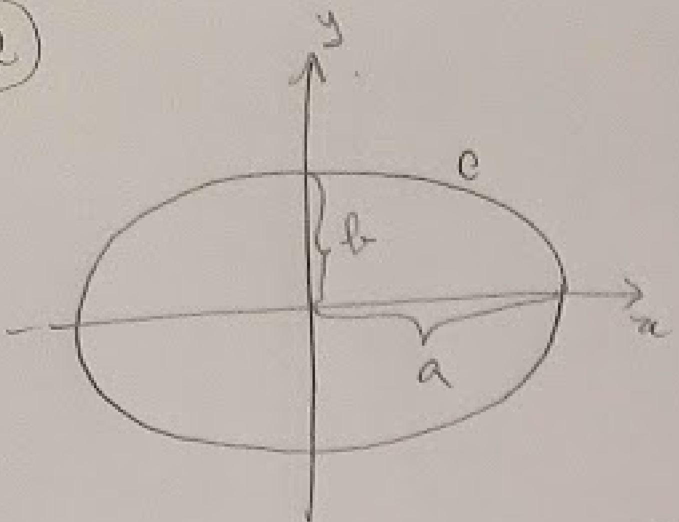
Assim $A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^3 t\, dt = -\frac{1}{2}\int_1^{-1} \sin^2 t\, d\cos t =$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 - \underbrace{\cos^2 t}_{u^2})\, d\underbrace{\cos t}_{u} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du = \frac{1}{2}\left((u)\Big|_{-1}^{1} - \frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \right) =$

$= \frac{1}{2}\left(2 - \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6-2}{3}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1$

Pela figura confirma-se que a área A é inferior à área do quadrado de lado 1, com área 1.

3f



$C = \{ \vec{r}(t) = \overbrace{a \cos t}^{x(t)} \, \vec{e}_x + \overbrace{b \,\text{sen}\, t}^{y(t)} \, \vec{e}_y \, , \; t \in [0, 2\pi] \}$

= elipse com semi-eixos a, b respetivamente nos eixos x e y.

Implicitamente tem-se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Usando a fórmula da área A no interior de C tem-se:

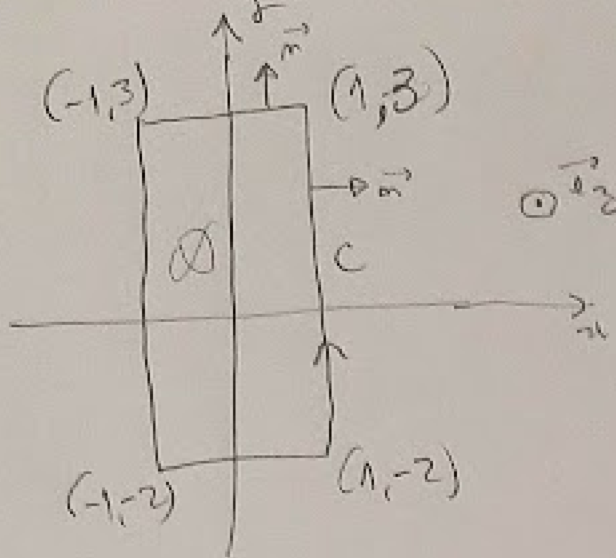
$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(-y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \right) dt$$

onde $\frac{dx}{dt} = -a \sin t$, $\frac{dy}{dt} = b \cos t$, logo

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\underbrace{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}_{ab}) \, dt = \frac{ab \cdot 2\pi}{2} = \pi a b$$

No caso particular do círculo ⊙ em que $a = b = R$, vem $A = \pi R^2$, o que é consistente com a respetiva conhecida área.

(4)



Seja $\vec{F}(x,y) = \underbrace{P(x,y)}_{F_x}\, \vec{e}_x + \underbrace{Q(x,y)}_{F_y}\, \vec{e}_y$ com $\begin{cases} P(x,y) = (5x + y)\ m/s \\ Q(x,y) = (x + 3y)\ m/s \end{cases}$

O Fluxo Φ através da curva C que delimita o retângulo $\mathcal{D}$

é: $\Phi = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\, dl$ que pelo teorema de Green na

forma fluxo é:

$$\Phi = \iint_{\mathcal{D}} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)}_{\text{div}\vec{F}} dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{3} dy \left(\underbrace{5}_{\frac{\partial P}{\partial x}} + \underbrace{3}_{\frac{\partial Q}{\partial y}}\right) =$$

$$= 8 \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} \underbrace{\int_{-2}^{3} dy}_{5} = 80\ m^2 s^{-1}$$

q.e.d.