

Série de Exercícios 5

1 – Uma folha fina de metal tem a forma da superfície $z = f(x, y) = 1 + x + 2y$ com $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$ ou seja sobre a isosuperfície do campo escalar $\Psi(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$. Se a densidade areolar (kg/m^2) for $\rho(x, y, z) = x^2yz$, calcule a massa da folha. Use a fórmula dos Integrais de superfície de $\rho(x, y, z)$ sobre isosuperfícies:

$\iint \rho(x, y, f(x, y)) \|\nabla\Psi\| dx dy$. Resposta: $\frac{2560\sqrt{6}}{9}$.

2 – Calcule o fluxo de massa em (kg/s) através da superfície $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \infty, x = 0$ no sentido de x crescente, associado ao campo de velocidades horizontal $\vec{v}_H = U\vec{e}_x =$ (ou vento horizontal \vec{v}_H) e campo de densidades $\rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-Cz}$ onde $U > 0, \rho_0 > 0$ e $C > 0$ são constantes. Esse campo de densidade na vertical (ou perfil da densidade) decresce exponencialmente em altitude z sendo uma boa aproximação da variação da densidade na atmosfera. A densidade de fluxo de massa é o produto $\vec{F} = \rho\vec{v}_H$ tendo de calcular o fluxo desse vetor \vec{F} através da referida superfície no sentido de x crescente. Discuta e calcule o fluxo no caso em que o vento horizontal faz um ângulo α com a normal à superfície.

3 – Um cilindro de metal condutor de calor é definido pelas equações: $x^2 + y^2 \leq 1; 1 \leq z \leq 4$. Admita o campo escalar de temperatura $T(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$. O campo vetorial da densidade de fluxo de calor (W/m^2) pelo processo de difusão térmica é $\vec{F}(x, y, z) = -k\nabla T$ onde $k = 55 \frac{\text{W}}{\text{Km}} > 0$ é a condutibilidade térmica neste caso particular. A densidade de fluxo de calor aponta no sentido contrário ao do gradiente de temperatura ou seja no sentido da máxima variação negativa da temperatura. Diz-se que um material é bom ou mau condutor de calor conforme k seja elevado (e.g. metais) ou baixo (e.g. cortiça, esferovite, ar). Calcule o fluxo exportador de calor (ou seja para fora do cilindro) nas três faces do cilindro: inferior (Sinf) superior (Ssup) e lateral (Slat). Resposta: $55\frac{\pi}{2}, -55\frac{\pi}{2}, -1650\pi$ W respectivamente. Sugestão: Use coordenadas cilíndricas ρ, θ, z , para parametrizar as superfícies.

Verifique que o teorema do fluxo-divergência se verifique calculando o integral de volume de $\text{div}\vec{F}$. O teorema do fluxo-divergência ou teorema de Gauss da divergência afirma que o fluxo Φ para o exterior (ou exportador) de uma superfície S fechada de um campo vetorial \vec{F} iguala o integral de volume da divergência de \vec{F} (ou seja $\text{div}(\vec{F})$) ao longo do volume V no interior da superfície S (localmente, o interior situa-se sempre no sentido contrário do versor normal \vec{n} exterior à superfície. Assim o teorema escreve-se:

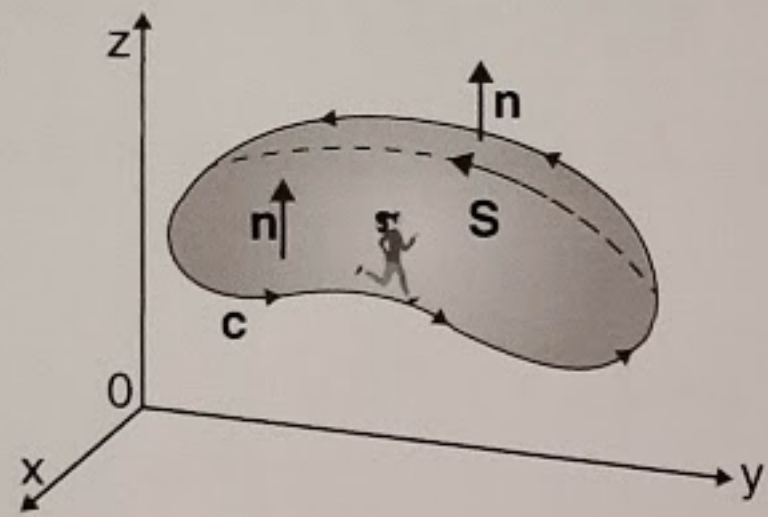
$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div}(\vec{F}) dV$$

Se a superfície S for descrita parametricamente por $\vec{r}(u, v)$ então o elemento infinitesimal do vetor área é $\vec{n} dS = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv$, enquanto o elemento infinitesimal de volume é dV .

4- Calcule a circulação Γ do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (xy, x^2 + y^2 + z^2, yz)$ ao longo da linha fronteira do paralelogramo de vértices $P_1=(0,0,1), P_2=(2,0,-1), P_3=(2,1,-2)$ e $P_4=(0,1,0)$, e no sentido $P_1 P_2 P_3 P_4$. Para tal use o teorema de Stokes para calcular essa circulação Γ . Sugestão: Comece por parametrizar a superfície plana que une os vértices do paralelogramo (verifique desde já que é uma superfície plana). O teorema de Stokes afirma que a circulação Γ de um campo \vec{F} (ou seja o integral de linha cíclico) ao longo de uma curva fechada C iguala o fluxo do campo vetorial do rotacional de \vec{F} ($\text{rot } \vec{F}$) através de qualquer superfície S cujo bordo seja C . Em termos da expressão matemática, escreve-se:

$\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{t} dl = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ onde \vec{t} é o versor tangente à curva e $dl = \|d\vec{r}\|$ é o elemento infinitesimal de arco, \vec{n} é o versor normal à superfície, dS é o elemento infinitesimal de superfície.

A curva C é parametrizada por $\vec{r}(t)$ e $\vec{t} dl = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt = d\vec{r}$. A superfície S é parametrizada por $\vec{r}(t) = \vec{r}(t, u)$ e $\vec{n} dS = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} dt du$, onde u é um parâmetro que cresce positivamente para dentro da superfície como mostra a figura anexa.



Série 5 - Resolução

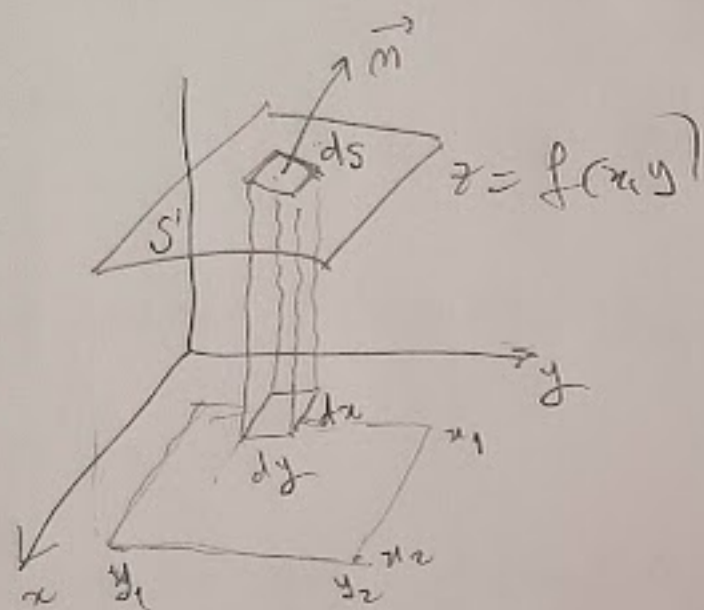
①

Considereemos uma superfície S parametrizada na

forma $\vec{r}(x, y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \underbrace{f(x, y)}_z \vec{e}_z$ ou seja

o gráfico da função bivariable (ou bidimensional 2D) $f(x, y)$

para $x \in [x_1, x_2]$
 $y \in [y_1, y_2]$



O integral M da função escalar $p(x, y, z)$ ao longo de S vem:

$$M = \iint_S p(x, y, z) ds$$

$$\text{onde } ds = \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\|}_{\vec{a}^2} dx dy$$

$$\text{Calculamos } \vec{a}^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \vec{e}_z$$

Tem-se que $\vec{a} = \nabla \psi$ onde $\psi(x, y, z) = z - f(x, y)$ 4/13

$$\text{De facto } -\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad 1 = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Assim $dS = \|\nabla \psi\| dx dy$, com $\nabla \psi = \nabla \psi(x, y, f(x, y))$

E portanto o integral de superfície do campo escalar $\rho(x, y, z)$ vem:

$$M = \int_{(x)} \int_{(y)} \rho(x, y, f(x, y)) \cdot \|\nabla \psi\| dx dy$$

$$\text{Seja então } \rho(x, y, z) = \text{densidade areolar (em } \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}) = x^2 y z$$

A função que define a superfície é $f(x, y) = 1 + x + 2y$

$$\text{onde } \psi(x, y, z) = z - f(x, y) = z - 1 - x - 2y, \quad z \in [0, 4], y \in [0, 2]$$

$$\nabla \psi = +\vec{e}_x - (2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \Rightarrow \|\nabla \psi\| = (1 + 4 + 1)^{1/2} = \sqrt{6}$$

$$\rho(x, y, z) = x^2 y z = x^2 y f(x, y) = x^2 y \cdot (1 + x + 2y) = x^2 y + x^3 y + 2x^2 y^2$$

$$\text{Assim } M = \int_0^4 dx \int_0^2 dy \cdot \rho(x, y, z) \cdot \underbrace{\|\nabla \psi\|}_{\sqrt{6}} =$$

$$= \int_0^4 dx \int_0^2 dy \cdot (x^2 y + x^3 y + 2x^2 y^2) \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6} \left[\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^4 \frac{y^2}{2} \right]_0^2 + \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^4 \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 + 2 \frac{x^3}{3} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \sqrt{6} \cdot \left[\frac{64}{3} \cdot \frac{4}{2} + \frac{256}{4} \cdot \frac{4}{2} + 2 \cdot \frac{64}{3} \cdot \frac{8}{3} \right] = \sqrt{6} \cdot \left[\frac{64 \cdot 2 \cdot 3}{9} + \frac{128 \cdot 9}{9} + \frac{2 \cdot 64 \cdot 8}{9} \right] = \sqrt{6} \cdot \frac{2560}{9}$$

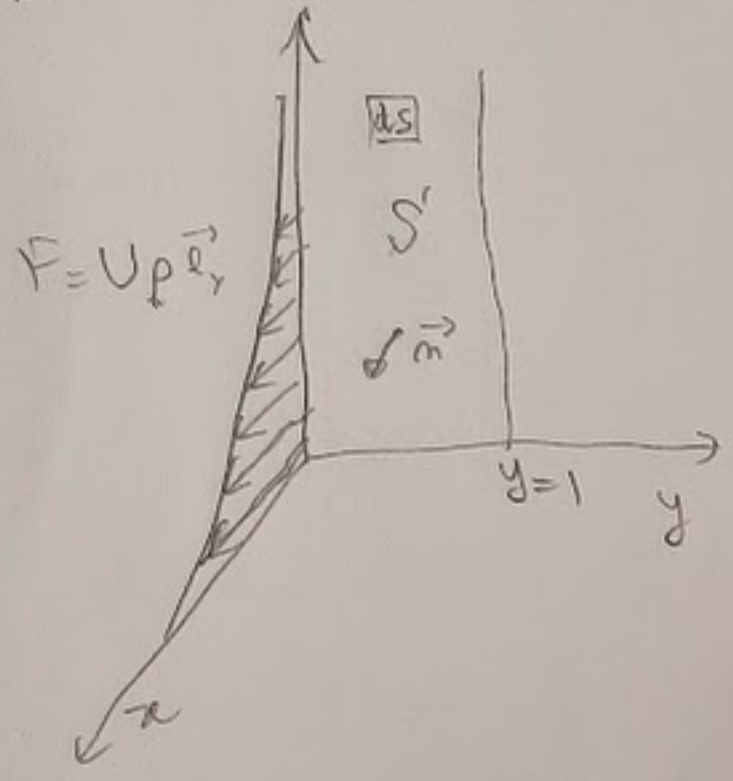
qed

(2)

Representemos a superfície $S = \{(x=0, y \in [0, 1], z \in [0, \infty[)\}$

e o campo $\vec{F}(x, y, z) = U\rho \vec{e}_x =$ densidade de fluxo de
onde $U = cte > 0$, $\rho = \rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-cz}$, $\rho_0 > 0$, $c > 0$
(constantes) massa $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$

vento horizontal $= \vec{v}_H = U\vec{e}_x$



O Fluxo Φ de massa através de S do campo vetorial \vec{F} é:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{m} \, dS =$$

$$= \iint_S \rho \vec{v}_H \cdot \vec{m} \, dS$$

Dado que se pretende calcular o fluxo no sentido de x crescente, então o vetor normal \vec{m} aponta no sentido de \vec{e}_x ou seja $\vec{m} = \vec{e}_x$. Assim

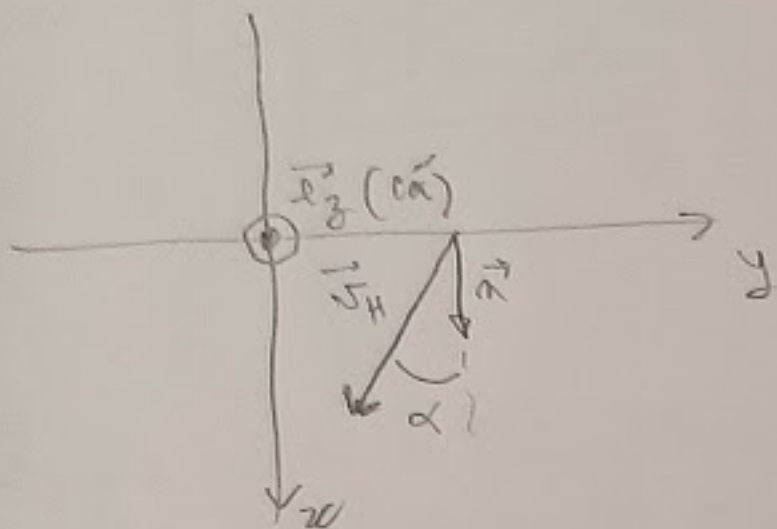
$$ds = dydz \quad \rho \vec{v}_H \cdot \vec{m} = \rho_0 e^{-cz} U \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \rho_0 U e^{-cz}$$

Logo o fluxo Φ é:

$$\Phi = \int_0^1 dy \int_0^\infty dz \cdot \rho_0 U e^{-cz} = \rho_0 U \cdot 1 \cdot \int_0^\infty e^{-cz} dz =$$

$$= \left. \frac{-\rho_0 U}{c} e^{-cz} \right|_0^\infty = \frac{\rho_0 U}{c} (0 - (-1)) = \frac{\rho_0 U}{c} \quad \left(\text{em } \frac{kg}{s}\right)$$

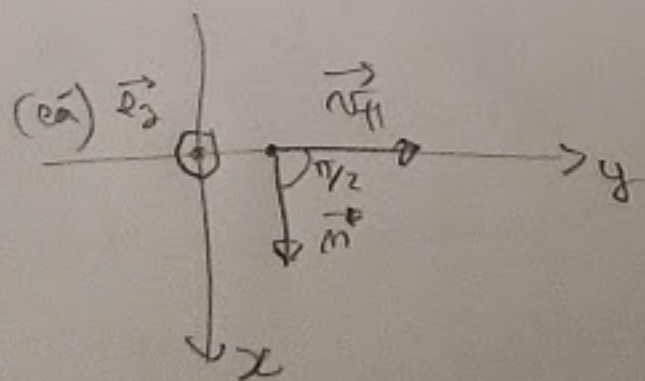
Se o vento horizontal \vec{v}_H fizer um ângulo α em
 normal à superfície tem-se $\vec{v}_H = U \vec{e}$ onde $\|\vec{e}\|=1$ e
 $\angle(\vec{F}, \vec{n}) = \angle(\vec{F}, \vec{e}_x) = \alpha$. Esquematicamente no
 plano x, y tem-se:



$$\text{Então } \vec{v}_H \cdot \vec{n} = \vec{v}_H \cdot \vec{e}_x = U \vec{e} \cdot \vec{e}_x = U \cos \alpha$$

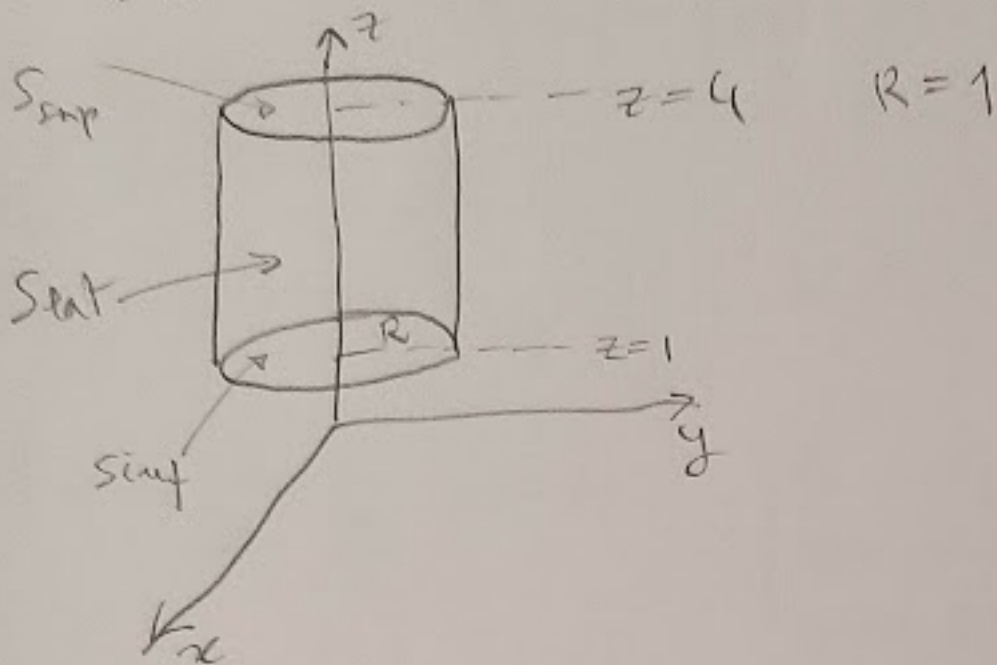
$$\text{Logo o fluxo } \underline{\Phi} = \frac{\rho_0 U}{c} \cos \alpha.$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad ou seja \vec{v}_H tangente à
 superfície S , o fluxo é nulo porque $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.



3

O cilindro do problema está representado esquematicamente na figura. Base = círculo de raio 1 no plano x, y , altura = $h=3$ estendendo-se na coord. z de $z=1$ a $z=4$.



Campo escalar de temperatura: $T(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$

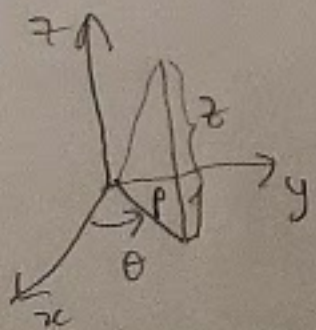
$$\nabla T = \text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = 2xz \vec{e}_x + 2yz \vec{e}_y + (x^2 + y^2) \vec{e}_z$$

o fluxo de calor por difusão térmica por unidade de área e tempo é a densidade de fluxo $\vec{F} = -k \nabla T =$

$$= F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = \underbrace{-2kxz}_{F_x} \vec{e}_x - \underbrace{2kyz}_{F_y} \vec{e}_y - \underbrace{k(x^2 + y^2)}_{F_z} \vec{e}_z$$

Vamos calcular os fluxos Φ_{inf} , Φ_{sup} e Φ_{lat} de calor em (W), respectivamente nas superfícies inferior, superior e lateral.

Dada a simetria do objeto emissão ou recepção de calor, utilizaremos coordenadas cilíndricas: ρ, θ, z



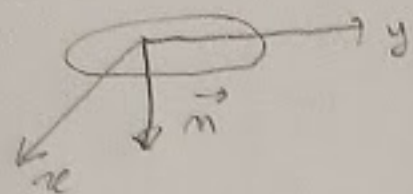
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \\ \theta = \arctg(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

Fluxo Φ_{inf} através da superfície inferior S_{inf}

$$S_{inf} = \{ \vec{r}(p, \theta) = p \cos \theta \vec{e}_x + p \sin \theta \vec{e}_y + z \vec{e}_3 \}$$

$$: p \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], z = 1$$

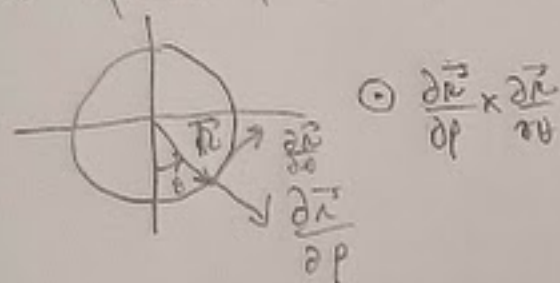


O fluxo $\Phi_{inf} = \iint_{S_{inf}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$

$$\vec{n} \, ds = - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial p} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) d\theta dp = - \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -p \sin \theta & p \cos \theta & 0 \end{vmatrix} d\theta dp = -p \, d\theta dp \, \vec{e}_z$$

$$= \underbrace{p \, d\theta dp}_{dz} \cdot \underbrace{-\vec{e}_z}_{\vec{n}}$$

O sinal negativo (-) aplica-se na superfície inferior de modo que \vec{n} aponte para exterior (ou seja para baixo), $\vec{n} = -\vec{e}_z$.



$$\Phi_{inf} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -F_z \, p \, d\theta dp$$

$$F_z = -k(x^2 + y^2) = -k\rho^2, \text{ logo } \Phi_{inf} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 k\rho^3 \, d\theta dp = k \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 \cdot 2\pi$$

$$= 2\pi k \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi \cdot 55}{2} \text{ (W)}$$

Fluxo Φ_{sup} através da superfície superior S_{sup} .

A superfície S_{sup} é idêntica a S_{inf} com a diferença de $z=4$

$$\vec{n} \, ds = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial p} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) d\theta dp = p \, d\theta dp \, \vec{e}_z \text{ ou seja } \vec{n} = \vec{e}_z$$

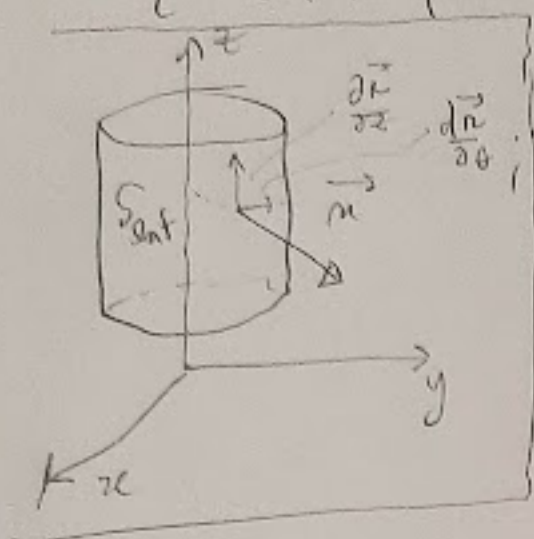
apontando para cima (exterior) e portanto

$$\Phi_{sup} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 F_z \, p \, d\theta dp = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 k\rho^3 \, d\theta dp = -\frac{\pi \cdot 55}{2} \text{ (W)}$$

Fluxo Φ_{lat} sobre superfície lateral $S_{\text{lat}} =$

9/13

$$= \int \vec{r}(\theta, z) = \rho \cos \theta \vec{e}_x + \rho \sin \theta \vec{e}_y + z \vec{e}_z : \theta \in [0, 2\pi], z \in [1, 4], \rho = 1$$



$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\vec{n} \, ds = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right) d\theta dz = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\theta dz = (p=1)$$

$$= \underbrace{(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)}_{\vec{n}} \underbrace{1}_{ds} d\theta dz$$

Logo $\Phi_{\text{lat}} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \int_0^{2\pi} \int_1^4 (F_x \cos \theta + F_y \sin \theta) d\theta dz$

$$= -k \int_0^{2\pi} \int_1^4 \underbrace{(2z x \cos \theta + 2z y \sin \theta)}_{2z(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2z} d\theta dz = -k \cdot 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^4 z dz =$$

$$= -2k \cdot 2\pi \cdot \left. \frac{z^2}{2} \right|_1^4 = -2\pi k \cdot \underbrace{(16-1)}_{15} = -30\pi k = -30.55 k =$$

$$= -1650\pi \text{ (w)}. \text{ Logo o fluxo total } \Phi = \Phi_{\text{inf}} + \Phi_{\text{sup}} + \Phi_{\text{lat}} =$$

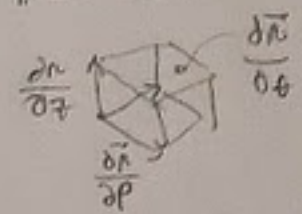
$$= \pi \frac{55}{2} - \pi \frac{55}{2} - 1650\pi = -1650\pi \text{ (w)}.$$

Em alternativa ao cálculo dos fluxos sobre a totalidade da superfície envolvente do cilindro, podemos aplicar o teorema do fluxo-divergência de Gauss.

Assim o fluxo Φ é:

$\Phi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV$. Mostremos que Φ coincide com o valor obtido anteriormente ou seja -1650π (W).
O elemento infinitesimal de volume em \mathbb{R}^3 é

$$dV = \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| \, d\rho \, d\theta \, dz$$



ou seja, é calculado genericamente para qualquer sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 como o produto do (valor absoluto do produto misto das derivadas de \vec{r} em relação às coordenadas) pelo produto dos elementos infinitesimais das coordenadas.

Dee em coordenadas esféricas vem:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho > 0$$

logo $dV = \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$

Por outro lado no caso concreto do problema

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} (-k \operatorname{grad} T) = -k \Delta T = -k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = -2kz - 2kz + \rho = -4kz$$

logo $\Phi = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_1^4 \operatorname{div} \vec{F} \, dV = -4k \int_1^4 z \, dz \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta =$

$$= -4k \left. \frac{z^2}{2} \right|_1^4 \cdot \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^1 \cdot 2\pi = -4 \cdot 55 \cdot \left(\frac{16-1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = -4 \cdot 55 \cdot 15 \cdot \frac{\pi}{2} = -1650\pi \text{ (W) confere!}$$

④ Representemos a superfície S no espaço e os

11/13

vértices P_1, P_2, P_3, P_4 do paralelogramo S .

Verifiquemos que $S = \square(P_1, P_2, P_3, P_4)$

é de facto um paralelogramo.

Para tal mostremos que

$$\vec{P_2P_3} = \vec{P_1P_4}$$

$$\text{Ora } \vec{P_2P_3} = P_3 - P_2 = (2, 1, -2) - (2, 0, -1) = (0, 1, -1)$$

$$\text{e } \vec{P_1P_4} = P_4 - P_1 = (0, 1, 0) - (0, 0, 1) = (0, 1, -1) \text{ e portanto verifica-se a igualdade.}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0, 1) \\ P_2 &= (2, 0, -1) \\ P_3 &= (2, 1, -2) \\ P_4 &= (0, 1, 0) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (2, 0, -2) \\ \vec{P_2P_3} = P_3 - P_2 = (0, 1, -1) \end{array} \right.$$

Seja $u \in [0, 1]$, o parâmetro que descreve $\vec{P_1P_2}$ ou seja $\vec{r} = P_1 + u \vec{P_1P_2}$ ($u \in [0, 1]$) e $v \in [0, 1]$, o parâmetro que descreve $\vec{P_2P_3}$ ou seja $\vec{r} = P_2 + v \vec{P_2P_3}$ ($v \in [0, 1]$)

Assim qualquer ponto de S é descrito parametricamente

$$\begin{aligned} \text{por } \vec{r}(u, v) &= P_1 + u \vec{P_1P_2} + P_2 + v \vec{P_2P_3} = \\ &= (0, 0, 1) + u(2, 0, -2) + (2, 0, -1) + v(0, 1, -1) = (\underbrace{2+2u}_x, \underbrace{v}_y, \underbrace{-2u-1}_z) = \\ &= (x, y, z) \end{aligned}$$

O fluxo do rotacional de \vec{F} vale:

12/13

$$\Gamma = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{m} \, ds = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{a} = \text{circulação ao longo de } C$$

$$\text{Calculamos } \vec{m} \, ds = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv = \text{Fluxo de rot } \vec{F} \text{ através de } S$$

$$= (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \times \vec{p}_2 \vec{p}_3) du dv = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} du dv =$$

$$= (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) du dv + (1, 2, 2) du dv$$

Calculamos $\text{rot } \vec{F}$.

$$\text{Ora } \vec{F} = \underbrace{xy}_{f_x} \vec{e}_x + \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{f_y} \vec{e}_y + \underbrace{(yz)}_{f_z} \vec{e}_z$$

$$\text{donde } \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

$$= \vec{e}_x (z - 2z) + \vec{e}_y (0 - 0) + \vec{e}_z (2x - x) =$$

$$= -z \vec{e}_x + x \vec{e}_z = (-z, 0, x)$$

Pela parametrização da superfície tem-se

$$\text{Como } \begin{cases} x = 2 + 2u \\ y = v \\ z = -2u - v \end{cases}$$

13/13

$$\text{Logo } \text{rot } \vec{F} = (-z, 0, x) = (2u + v, 0, 2 + 2u)$$

O elemento infinitesimal do integral da superfície

$$\begin{aligned} \vec{e} \quad \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= (2u + v, 0, 2 + 2u) \cdot (1, 2, 2) \, du \, dv \\ &= (2u + v + 0 + 2 \cdot (2 + 2u)) \, du \, dv = \\ &= (4 + 6u + v) \, du \, dv \end{aligned}$$

Finalmente o integral será:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^1 \int_0^1 (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) \, ds = \int_0^1 \int_0^1 (4 + 6u + v) \, du \, dv = \\ &= 4 + 6 \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{v^2}{2} \Big|_0^1 = 4 + 3 + \frac{1}{2} = 7,5 = 15 \end{aligned}$$

Nota: O procedimento para calcular Γ segue as seguintes

- etapas:
- 1) Parametrizar $S = \{ \vec{r}(u, v) \}$ onde u, v = parâmetros
 - 2) Calcular $\vec{n} \, ds$
 - 3) Calcular $\text{rot } \vec{F}$ em função de (x, y, z) e (u, v)
 - 4) Calcular $\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ em função de (u, v)
 - 5) Calcular o integral no domínio dos parâmetros u, v