## Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

### Série de Exercícios 6

1 – O sistema de coordenadas ortogonais esféricas é $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$, segundo a figura anexa, onde $\varphi$ equivale à longitude, $\theta$ à colatitude e $r$ o módulo do vetor posição. As equações de transformação são: $x = x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$ ; $y = x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$ ; $z = x_3 = r\cos\theta$.

a) Calcule os fatores de escala $h_r = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right\|, h_\theta = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\|, h_\varphi = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right\|$.

b) Exprima o elemento infinitesimal do vetor posição, ou seja $\overrightarrow{dr}$, em função dos versores das linhas coordenadas $\overrightarrow{e_r} = vers(\frac{\partial\vec{r}}{\partial r})$, $\overrightarrow{e_\theta} = vers(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta})$ e $\overrightarrow{e_\varphi} = vers(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi})$ e das variações infinitesimais $dr, d\theta, d\varphi$ das coordenadas curvilíneas esféricas.

c) Exprima os elementos de superfície ortogonais, respetivamente a $\overrightarrow{e_r}$, a $\overrightarrow{e_\theta}$, a $\overrightarrow{e_\varphi}$, em função de $dr, d\theta, d\varphi$. Calcule com base nessa expressão a área da calote polar terrestre que se estende de $\theta = 0$ (pólo Norte) a $\theta = \alpha$. Tome raio da Terra =R = 6370 km.

d) Exprima o elemento de volume em função de $dr, d\theta, d\varphi$.

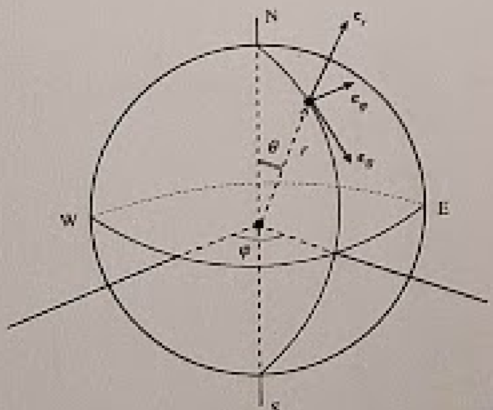
e) Calcule o volume no interior da calote polar referida na alínea c).

f) Exprima o gradiente de um campo escalar $\Psi(r,\theta,\varphi)$. Verifique como se particulariza esse para um campo zonalmente simétrico ou seja sem dependência na longitude $\varphi$.

g) Exprima a divergência de um campo vetorial $\vec{F} = F_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + F_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + F_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$. Particularize para o caso de um campo puramente radial $\vec{F} = F_r(r)\overrightarrow{e_r}$ e isotrópico.

h) Exprima o rotacional do campo vetorial $\vec{F} = F_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + F_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + F_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$.

i) Num campo de velocidades $\vec{v} = v_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + v_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + v_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$, as componentes $v_r, v_\theta, v_\varphi$ dizem-se as componentes vertical, meridional e zonal. Zonalmente simétrico diz-se do campo sem dependência em $\varphi$ (equivalente à longitude). Considere então um campo de velocidades puramente zonal, zonalmente simétrico, i.e. $\vec{F} = F_\varphi(r,\theta)\overrightarrow{e_\varphi}$ e calcule a sua divergência e rotacional (vorticidade).




2) Um sistema de coordenadas ortogonais em 2D, vulgarmente usada em eletrostática é dado por: $q_1 = u = xy$ ; $q_2 = v = x^2 - y^2$.

a) Desenhe as linhas coordenadas.

b) Verifique que se trata de um sistema de coordenadas ortogonais.

c) Calcule os fatores de escala.

d) Calcule a expressão do gradiente de um campo escalar $\Psi(u,v)$.

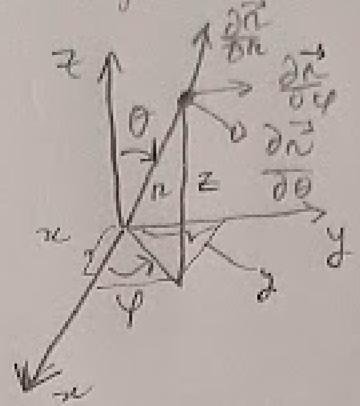
e) Calcule a expressão da divergência de um campo vetorial $\vec{F}(u,v)$ expresso na base $\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}$.

# Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra

## Série 6 – Resolução

(1) Consideremos as coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$




O vetor posição é

$$\vec{r}(\theta,\varphi,r) = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + \vec{e}_z$$

O elemento infinitesimal de vetor posição é:

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi$$

As coordenadas esféricas são ortogonais, i.e. os vetores $\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}$ constituem uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Calculemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + r\cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - r\sin\theta\,\vec{e}_z \\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_x + r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_y \end{cases}$$

É fácil verificar que $\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = 0$ e

portanto $r, \theta, \varphi$ são coordenadas ortogonais

a) Fatores de escala

$$h_r^2 = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right\|^2 = \sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta = 1$$

$$h_\theta^2 = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\|^2 = r^2\cos^2\theta\,(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1}) + r^2\sin^2\theta = r^2$$

$$h_\varphi^2 = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right\|^2 = r^2\sin^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\sin^2\theta$$

b) Sendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \underbrace{\left\|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right\|}_{h_r} \underbrace{\operatorname{vers}\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right)}_{\vec{e}_r} = h_r \vec{e}_r \\ \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = h_\theta \vec{e}_\theta \\ \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = h_\varphi \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

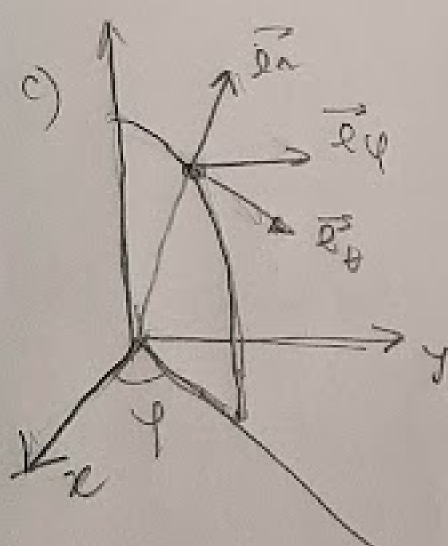
onde $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ são versores tangentes às linhas coordenadas de $r, \theta, \varphi$ respetivamente ou sejam as curvas onde $r$ cresce ($\theta, \varphi =$ ctes), $\theta$ cresce ($r, \varphi =$ ctes) e $\varphi$ cresce ($r, \theta =$ ctes.) e que são radiais, meridianos e paralelos (na geometria terrestre).
Assim:

$$d\vec{r} = h_r \vec{e}_r + h_\theta \vec{e}_\theta + h_\varphi \vec{e}_\varphi$$

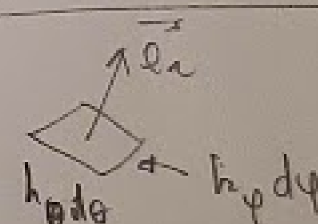
onde $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ constituem uma base ortonormada local.

---

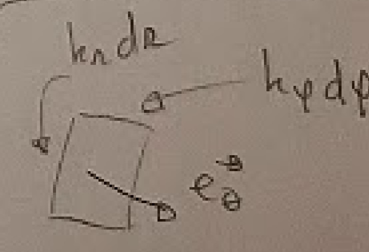
c)



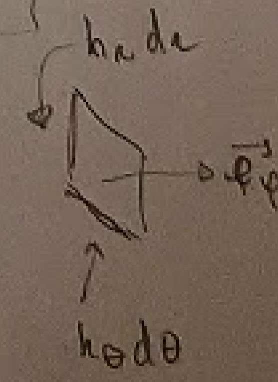

$dS_r = h_\theta h_\varphi \, d\theta \, d\varphi$
$=$ elemento de superfície $\perp$ a $\vec{e}_r$
$= r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$



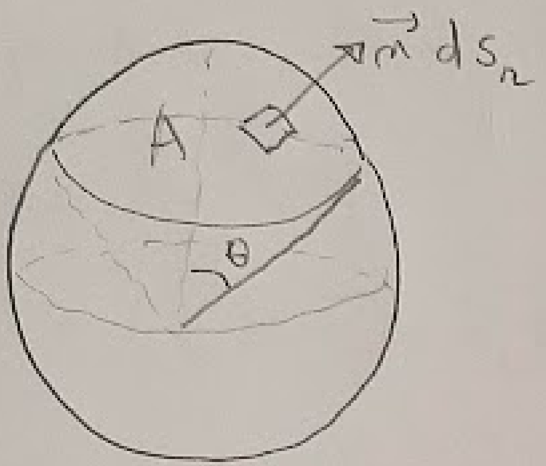

$dS_\theta = h_r h_\varphi \, dr \, d\varphi$
$=$ elemento de superfície $\perp$ a $\vec{e}_\theta$
$= r \sin\theta \, dr \, d\varphi$




$dS_\varphi = h_r h_\theta \, dr \, d\theta$
$=$ elemento de superfície $\perp$ a $\vec{e}_\varphi$
$= r \, dr \, d\theta$



Área da calote polar terrestre que se estende desde o polo Norte até à colatitude $\theta$




A calote polar é parametrizada por $\vec{r}(\theta,\varphi) =$

$(R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$

$\theta \in [0,\alpha]$

$\varphi \in [0,2\pi]$

$R = R_T =$ raio da Terra $= 6370$ km

A área é: $A = \int_{0\,(\varphi)}^{2\pi}\int_{0\,(\theta)}^{\alpha} dS_r = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} R_T^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$

$= 2\pi R_T^2 \cdot -\cos\theta\Big|_0^{\alpha} = 2\pi R_T^2(1-\cos\alpha)$

---

d) Elemento de volume $dV = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta\right\| \cdot \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}dr\right\| \cdot \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi\right\|$

$= h_\theta h_r h_\varphi\, d\theta\, dr\, d\varphi = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

e) O volume $V$ da calote polar desde o centro da Terra até à superfície é: $V = \int_0^{R_T}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} dv = \int_0^{R_T}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

$= \frac{r^3}{3}\Big|_0^{R_T} \cdot 2\pi \cdot -\cos\theta\Big|_0^{\alpha} = \frac{2\pi R_T^3}{3}(1-\cos\alpha)$

No caso $\alpha = \pi$ (polo sul) vem $V = \frac{4}{3}\pi R_T^3 =$ volume da esfera

f) Num campo escalar $\psi(r,\theta,\varphi)$, o seu diferencial

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} d\varphi \text{, o qual iguala}$$

o produto interno de $d\vec{r}$ por $\nabla \psi = \text{grad}\, \psi$

$$d\psi = d\vec{r} \cdot \nabla \psi$$

$$= (h_r\, dr\, \vec{e}_r + h_\theta\, d\theta\, \vec{e}_\theta + h_\varphi\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi) \cdot \nabla \psi$$

Sendo os versores $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ ortonormados tem-se que

$$\nabla \psi = \frac{1}{h_r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3}\vec{e}_3$$

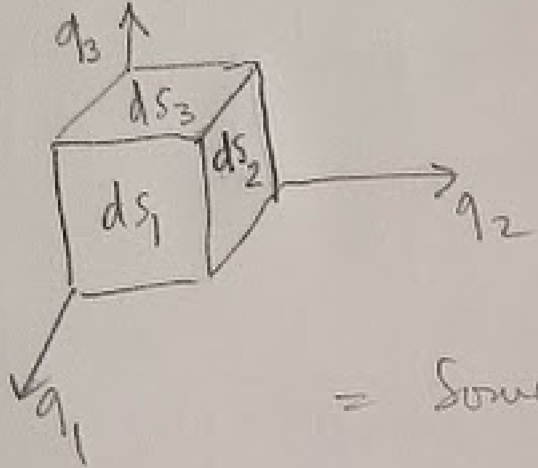
---

g) De um modo geral para coordenadas curvilíneas ortogonais $q_1, q_2, q_3$, a que estão associados fatores de escala $h_1, h_2, h_3$ e versores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ a divergência de um campo vetorial $\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3$

é: $$\text{div}\,\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3h_1h_2)\right]$$

A expressão de $\operatorname{div}\vec{F}$ é obtida aplicando o teorema do fluxo-divergência a um volume infinitesimal $dV$ cúbico e faces de áreas $dS_1 = h_2 h_3\, dq_2\, d_3$,

$dS_2 = h_1 h_3\, dq_1\, dq_3$, $dS_3 = h_1 h_2\, dq_1\, dq_2$




Assim $\operatorname{div}\vec{F}\, dV =$

$= \operatorname{div}\vec{F}\, h_1 h_2 h_3\, dq_1\, dq_2\, d_3 =$

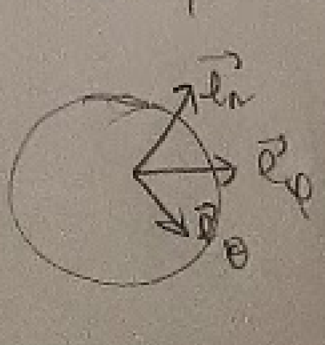
$=$ Soma dos fluxos nas 6 faces $=$

$$= \frac{\partial}{\partial q_1}(dS_1\, F_1)\, dq_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}(dS_2\, F_2)\, dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(dS_3\, F_3)\, dq_3$$

$$= dq_1\, dq_2\, dq_3 \left[ \frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 F_3) \right]$$

Logo, dividindo por $dV$ vem o resultado.

No caso particular das coordenadas esféricas tome-se $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = r$, de modo que $\vec{e}_1 = \vec{e}_\theta$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_r$ constituem um triedro direto, isto é $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$




sendo $h_1 = h_\theta = r$

$h_2 = h_\varphi = r \sin\theta$

$h_3 = h_r = 1$

Tem-se então a expressão da divergência de

$$\vec{F} = F_\theta \vec{e}_\theta + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_r \vec{e}_r$$

onde $F_\theta$ = componente meridional

$F_\varphi$ = componente zonal

$F_r$ = componente radial

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta}(r \sin\theta\, F_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r F_\varphi) + \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta\, F_r) \right]$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta\, F_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 F_r}{\partial r}$$

No caso de um campo radial ou seja $\vec{F} = F_r \vec{e}_r$

e isotrópico ou seja $F_r = F_r(r)$, i.e. só depende de $r$,

vem:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial F_r \cdot r^2}{\partial r} = \frac{dF_r}{dr} + \frac{2F_r}{r}$$

———————— x ————————

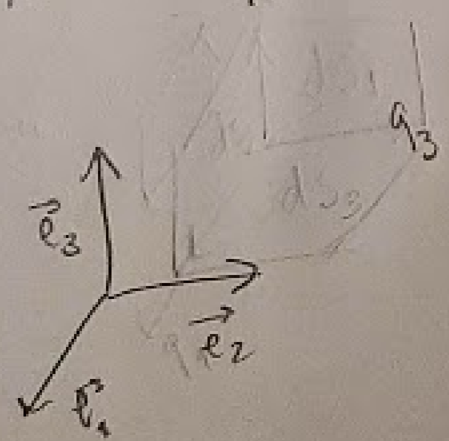
h) Para coordenadas curvilíneas ortogonais $q_1, q_2, q_3$ tal como descrito na alínea g), a expressão do rotacional do campo vetorial $\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3$ é:

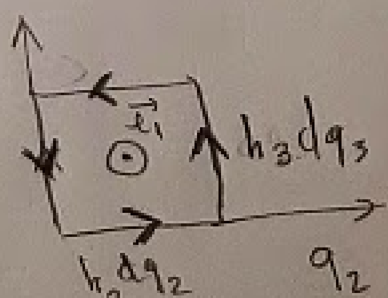
$$\text{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 h_1 & \vec{e}_2 h_2 & \vec{e}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 F_2)\right) + \frac{\vec{e}_2}{h_1 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_3 F_3)\right)$$

$$+ \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 F_1)\right)$$

Tal é obtido, aplicando o teorema de Stokes a superfícies infinitesimais $dS_1 \perp \vec{e}_1$, $dS_2 \perp \vec{e}_2$ e $dS_3 \perp \vec{e}_3$




$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$

$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$

$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$

Assim $\text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{e}_1 \, h_2 h_3 \, dq_2 \, dq_3$ = fluxo infinitesimal do rotacional =

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3 h_3 dq_3)\, dq_2}_{A} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_3}(F_2 h_2 dq_2)\, dq_3}_{B}$$

onde A = soma dos integrais de caminho nos lados direito e esquerdo

B = soma dos integrais de caminho nos lados superior e inferior.

Dividindo a expressão por $h_2 h_3 \, dq_2 \, dq_3$ obtém-se a componente segundo $\vec{e}_1$ de rot $\vec{F}$ ou seja

$$\text{rot}\vec{F}\cdot\vec{e}_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2 h_2)\right]$$

as outras componentes segundo $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ obtêm-se aplicando o teorema de Stokes a $dS_2$ e $dS_3$ respectivamente.

———————— x ————————

Aplicando a expressão geral do rotacional às coordenadas esféricas com
$$\begin{cases} q_1 = \theta, & q_2 = \varphi, & q_3 = r \\ F_1 = F_\theta, & F_2 = F_\varphi, & F_3 = F_r \\ h_1 = r, & h_2 = r\sin\theta, & h_3 = 1 \end{cases}$$

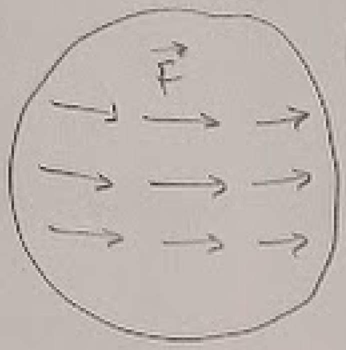
vem
$$\text{rot}\,\vec{F} = \frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta F_\varphi)\right] + \frac{\vec{e}_\varphi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}(F_r)\right]$$

$$+ \frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial\, r\sin\theta F_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial\, rF_\theta}{\partial\varphi}\right] =$$

$$= \frac{\vec{e}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right] + \frac{\vec{e}_\varphi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right] + \frac{\vec{e}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial \sin\theta F_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]$$

i)

No caso particular de um campo vetorial de velocidades zonal zonalmente simétrico (i.e sem dependência na longitude $\varphi$) tem-se $\vec{F} = \vec{v} = F_\varphi(r,\theta)\,\vec{e}_\varphi$. Esquematicamente tem-se




onde $F_r = F_\theta = 0$

O seu rotacional vem:

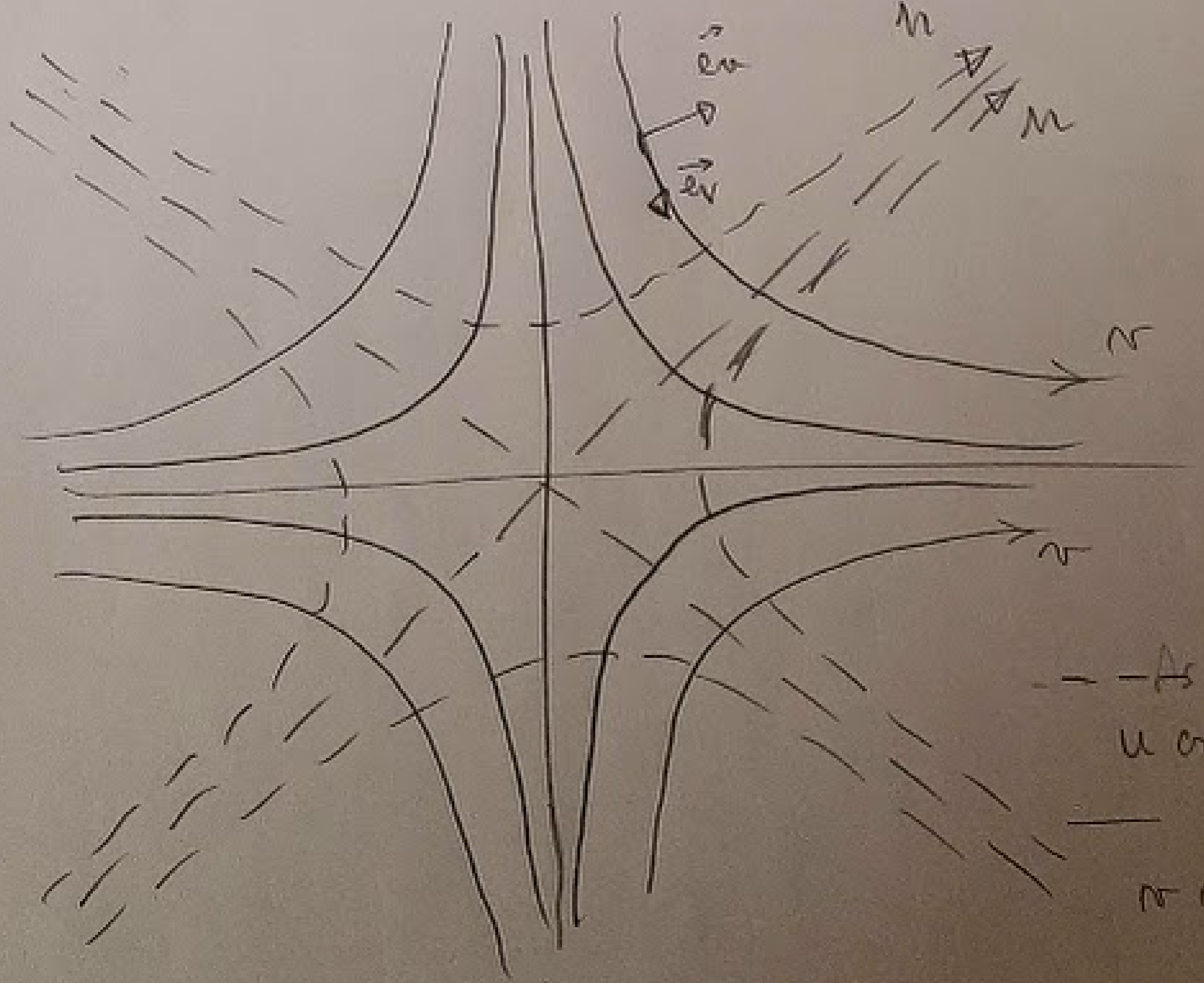
$$\operatorname{rot}\vec{F} = -\frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial rF_\varphi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_r}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta\, F_\varphi}{\partial\theta}$$

$$= -\frac{F_\varphi\,\vec{e}_\theta}{r} - \vec{e}_\theta\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_r}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\theta} + \frac{F_\varphi}{r}\cot\theta\,\vec{e}_r$$

$$= \vec{e}_\theta\left[-\frac{F_\varphi}{r} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\right] + \vec{e}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\theta} + \frac{F_\varphi\cot\theta}{r}\right]$$

2) Seja um sistema bidimensional (2D) $\begin{cases} q_1 = u = xy \\ q_2 = v = x^2-y^2 \end{cases}$

a)




- - As linhas de u crescente ($v$ = cte)

— linhas de v crescente ($u$ = cte)

h) Pode provar-se que se $\nabla q_i \cdot \nabla q_j = 0$ $(i \neq j)$ então $\nabla q_i$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ são colineares e portanto

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = 0$ se $i \neq j$ e portanto $q_1, q_2$

constituirão um conjunto de coordenadas curvilíneas ortogonais.

Comecemos por mostrar que $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$ = (pela regra da derivação em cadeia)

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = \nabla q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$$

ou seja $\nabla q_i$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$ são ortogonais onde

$$\begin{cases} \text{vers } \nabla q_i = \vec{e}^{\,i} = \text{versores contravariantes} = \dfrac{\nabla q_i}{\|\nabla q_i\|} \text{ (perpendiculares a } q_i = \text{cte)} \\ \text{vers } \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \vec{e}_j = \text{versores covariantes} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dfrac{1}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right\|} \text{ (colineares com linhas coordenadas)} \end{cases}$$

e portanto $\vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

---

se $\vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}^{\,j} = \delta_{ij}$ (coord. ortogonais) então $\vec{e}^{\,i}$ são uma b.o.n. (base ortonormada)

e portanto $$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \sum \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \vec{e}^{\,k}\right) \vec{e}^{\,k} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \vec{e}^{\,i}\right) \vec{e}^{\,i} = \frac{1}{\|\nabla q_i\|} \vec{e}^{\,i}$$

logo $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = 0$ se $i \neq j$ | $= \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right\| \vec{e}_i$

donde $\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right\| = h_i$ = fator de escala $= \frac{1}{\|\nabla q_i\|}$

e além disso $\vec{e}^{\,i} = \vec{e}_i$ ou seja os vetores covariantes e contravariantes coincidem no caso de coordenadas ortogonais. Nesse caso $\|\nabla q_i\| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right\|} = \frac{1}{h_i} \Rightarrow h_i = \frac{1}{\|\nabla q_i\|}$

c)

No caso particular estudado tem-se

$q_1 = u = xy$

$q_2 = v = x^2 - y^2$

$\nabla q_1 = y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$

$\nabla q_2 = 2x\vec{e}_x - 2y\vec{e}_y$

Logo $\nabla q_1 \cdot \nabla q_2 = 2xy - 2xy = 0$ e portanto $q_1, q_2$ são ortogonais. Os fatores de escala vem:

$$h_1^2 = \frac{1}{\|\nabla q_1\|^2} = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{r^2} = h_{u}^2 \text{ onde } r = \|\vec{r}\| = (x^2+y^2)^{1/2}$$

$$h_2^2 = \frac{1}{\|\nabla q_2\|^2} = \frac{1}{4(x^2+y^2)} = \frac{1}{4r^2} = h_v^2$$

$h_1 = \frac{1}{r}$ ; $h_2 = \frac{1}{2r}$. Mostra-se a partir da inversão de variáveis que $x^2 = \frac{v + \sqrt{v^2+4u^2}}{2}$ ; $y^2 = \frac{-v+\sqrt{v^2+4u^2}}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 = \sqrt{v^2+4u^2}$

d) Vamos calcular a expressão do gradiente de

$\psi(u,v) = \psi(q_1, q_2)$ em coordenadas ortogonais

Tem-se:

$$\operatorname{grad} \psi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\vec{e}_2$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{2r}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\vec{e}_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v^2+4u^2}}\left[\frac{\partial \psi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial v}\vec{e}_v\right]$$

———————— x ————————

e) Vamos calcular a expressão da divergência de

$$\vec{F}(u,v) = F_u(u,v)\,\vec{e}_u + F_v(u,v)\,\vec{e}_v$$

Usando a expressão de 1g) para a divergência de $\vec{F}$ em coordenadas ortogonais tem-se:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(F_1 h_2)}{\partial q_1} + \frac{\partial(F_2 h_1)}{\partial q_2}\right] =$$

$$= \frac{1}{h_1}\frac{\partial F_1}{\partial q_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial F_2}{\partial q_1} + \frac{F_1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{F_2}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}$$

$$= \underbrace{r\frac{\partial F_u}{\partial u} + 2r\frac{\partial F_v}{\partial v}}_{\text{componente cartesiana}} + \underbrace{\frac{4r}{2}F_u\frac{\partial r^{-1}}{\partial u} + 4r F_v\frac{\partial r^{-1}}{\partial v}}_{\text{componente curvilínea de } \operatorname{div}\vec{F}}$$

Sabendo que $r^4 = v^2 + 4u^2$ vem $\begin{cases} \dfrac{\partial r^4}{\partial u} = 4r^3 \dfrac{\partial r}{\partial u} = 8u \\ \dfrac{\partial r^4}{\partial v} = 4r^3 \dfrac{\partial r}{\partial v} = 2v \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial u} = \dfrac{2u}{r^3}, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} = \dfrac{v}{2r^3} \end{cases}$$

Assim nos termos da componente anarilhmea de div $\vec{F}$ vem

$$\frac{4r}{2} F_u \frac{\partial r^{-1}}{\partial u} = 2r F_u \cdot \frac{-1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial u} = -\frac{2F_u}{r} \cdot \frac{2u}{r^3} = -\frac{4F_u u}{r^4}$$

$$4r F_v \frac{\partial r^{-1}}{\partial v} = \frac{-4r F_v}{r^2} \frac{\partial r}{\partial v} = -\frac{4F_v}{r} \cdot \frac{v}{2r^3} = \frac{-2F_v v}{r^4}$$

logo

$$\operatorname{div} \vec{F} = r\left[\frac{\partial F_u}{\partial u} + 2\frac{\partial F_v}{\partial v}\right] - \frac{2}{r^4}\left[2F_u u + F_v v\right]$$