Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 7

1 – Mostre que para um número complexo genérico z tem-se as seguintes expressões das funções trigométricas inversas:

a) $\arcsin(z) = -i \ln(\mathrm{i}z \pm \sqrt{1-z^2})$. Sugestão: use $\sin a = z = \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}$ e $a = \arcsin(z)$

b) $\arccos(z) = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2-1})$. Sugestão: use $\sin a = z = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}$ e $a = \arccos(z)$

2- Calcule na forma cartesiana e polar os seguintes números complexos:

a) $\exp(2+i)$
b) $(3+i)^{-1}$
c) $\ln(2-2/i)$
d) $\arcsin(2)$.

3 – Sabendo que $\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$; $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ e tomando $z = x+iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$, mostre que:

a) $|\sin z|^2 = \sin x^2 + (\sinh y)^2$
b) $|\cos z|^2 = \cos x^2 + (\sinh y)^2$
c) $|\sinh z|^2 = \sinh x^2 + (\sin y)^2$
d) $|\cosh z|^2 = \sinh x^2 + (\cos y)^2$

4 – Resolva as seguintes equações:

a) $z^5 + i = 0$
b) $\frac{1}{1+\exp(z)} = i$

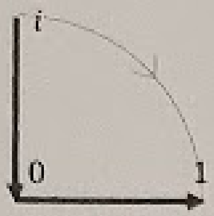
5 – Considere uma função complexa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ de variável complexa $= x+iy$ onde $u, v, x. y \in \mathbb{R}$. As condições de diferenciabilidade de $f(z)$ são as condições de Cauchy-Riemann (CCR): $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Nesse caso a derivada $\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. Uma função diz-se analítica em torno de z_0 se $\frac{df}{dz}$ existir para $|z - z_0| < \delta$ para um certo $\delta > 0$.

a) Encontre a função analítica $f(z)$ tal que $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ e mostre que $f(z) = z^3$.
b) Calcule as derivadas de $f(z)$ de ordem 1,2, 3 e 4 e mostre que o desenvolvimento de Taylor em torno de $z = 0$ de ordem 3 é exato ou seja: $f(z) = f(0) + f'(z) + \frac{f''(0)z^2}{2} + \frac{f'''(0)z^3}{6}$.
c) Calcule a derivada de $f(z) = \sin(z)$ na representação cartesiana e polar. Mostre que as CCR se verificam.

6 – Considere a função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Mostre que $lap(u) = lap(v) = 0$. Desse modo, mostre que o campo 2D $\vec{F_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y$ é um campo solenoidal (ou de divergência nula) e que o campo $\vec{F_2} = -\frac{\partial v}{\partial y}\vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial x}\vec{e}_y$ é irrotacional (rotacional nulo).

7- Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em todo o plano complexo e $P(z)$ é a primitiva de $f(z)$, ou seja que verifica $\frac{dP(z)}{dz} = f(z)$, tem-se que o integral $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dP}{dz} dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) = P(z_2) - P(z_1)$.

a) Mostre que $P(z) = \int_0^x \left(u(x',0) + iv(x',0)\right)dx' + \int_0^y \left(-v(x,y') + iu(x,y')\right)dy'$.



b) Mostre que a primitiva de $f(z) = z$ é $P(z) = \frac{z^2}{2}$. Calcule o integral $\int_i^1 z\, dz$ ao longo do percursos indicados na figura (forma direta) e usando a primitiva mostrando a igualdade dos resultados.

8 – As igualdades de Cauchy escrevem-se:

I) Se $f(z)$ analítica no interior de uma curva fechada C, então: $\oint_C f(z)dz = 0$

II) Se $f(z)$ analítica no interior Int(C)de uma curva fechada C e $z_0 \in Int(C)$, então: $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$.

a) Mostre que $\oint_C \frac{f^{(n)}(z)}{z-z_0} dz = n! \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i f^{(n)}(z_0)$.

9 – O desenvolvimento de Laurent é uma generalização do desenvolvimento de Taylor e permite expandir uma função $f(z)$ em torno de um ponto isolado z_0 no qual a função é divergente ou não está definida (e.g. $\frac{1}{z}$, $sin\left(\frac{1}{z}\right)$ em $z = z_0 = 0$). O desenvolvimento de Laurent é: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ onde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ onde $z_0 \in Int(C)$. Se $a_n \neq 0$ para algum $n \leq -1$, a função é singular em z_0. O coeficiente $a_{-1} = a_{-1}(z_0)$ diz-se o resíduo relativo ao ponto singular z_0.

Se $a_n = 0$ para $n \leq -1$, a função é analítica em $Int(C)$ e a função coincide com o desenvolvimento de Taylor sendo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ com $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

O teorema dos resíduos permite calcular integrais cíclicos ao longo de curvas C no interior das quais pode haver um conjunto de R singularidades isoladas $z_1, z_2, \dots, z_R$. Assim mostra-se que:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{R} a_{-1}(z_k)$$

a) Desenvolva os primeiros três termos de Laurent da função $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ em torno da origem.

b) Calcule a parte real e imaginária do integral $\oint_C f(z)dz$ ao longo da curva de raio 1 no plano complexo recorrendo ao Teorema dos resíduos.

Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra

Série 7 – Resolução

1

a) Tem-se que $\sin a = \dfrac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$. De facto

$$\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} = \frac{(\cos a + i \operatorname{sen} a) - (\cos a - i \operatorname{sen} a)}{2a} = \frac{2i \operatorname{sen} a}{2i} = \operatorname{sen} a$$

Seja $b = e^{ia}$, $\sin a = \dfrac{b - \frac{1}{b}}{2i} = \dfrac{b^2 - 1}{2bi} = z$

Nota $\frac{1}{i} = -i$.

$$\Leftrightarrow b^2 + b(-2iz) - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2}$$

$= iz \pm \sqrt{1-z^2}$, como $b = e^{ia} \Rightarrow a = \frac{1}{i} \ln b = -i \ln b =$

$$= \boxed{-i \ln\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) = \arcsin z} = \arcsin(\sin a) = a$$

q.e.d.

b) $$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} = \frac{b + \frac{1}{b}}{2} = \frac{b^2+1}{2b} = z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 2bz + 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4}}{2} =$$

$$= z \pm \sqrt{z^2 - 1} \Leftrightarrow a = -i \ln b = -i \ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right) =$$

$$= \arccos z = -i \ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

As fórmulas de 1 a) e 1 b) permitem calcular funções trigonométricas de ângulos complexos e funções trigonométricas inversas $\sin^{-1}$ e $\cos^{-1}$ de um número complexo, mesmo reais fora de $[-1, 1]$.

(*) Forma cartesiana de número complexo $z \in \mathbb{C}$:

$z = x + iy$ onde $x, y \in \mathbb{R}$ sendo

$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ (respetivamente a parte

real e imaginária de z

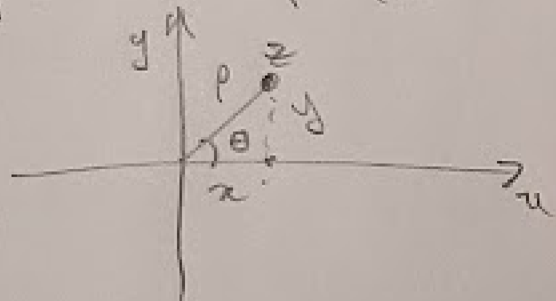
(*) Forma polar do número complexo $z \in \mathbb{C}$:

$$z = \rho \operatorname{cis} \theta = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \underbrace{(\rho \cos\theta)}_{x} + i\underbrace{(\rho \operatorname{sen}\theta)}_{y}$$

on $\rho = |z|$ = módulo ou amplitude de z

$\theta = \arg(z)$ = argumento de z

No plano complexo ou de Argand temos



$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

a)
$$z = \exp(2+i) = \underbrace{e^2}_{\rho} e^{i \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \rho = e^2 = |z| \\ \theta = 1 \text{ (rad)} = \arg z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = e^2 \cos 1 = x \\ \operatorname{Im} z = e^2 \sin 1 = y \end{cases}$$

b)
$$z = \frac{1}{3+i} = \frac{(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-i}{9-(i)^2} = \frac{3-i}{10} = \underbrace{\frac{3}{10}}_{x} + i\underbrace{\left(-\frac{3}{10}\right)}_{y}$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z = \frac{3}{10} \\ y = \operatorname{Im} z = \frac{-3}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \rho = |z| = \sqrt{\frac{9}{100} \times 2} = \sqrt{2}\,\frac{3}{10} \\ \theta = \operatorname{arc}\operatorname{tg}(-1) = -\pi/4 \end{array}$$

c) $z = \ln\left(2 - \frac{2}{i}\right) = \ln\left[2\left(1 - \frac{1}{i}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(\frac{i-1}{i}\right)$

Seja $a = \frac{i-1}{i} = -i(i-1) = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

donde $\ln a = \ln\sqrt{2} + i\pi/4 = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4} = \ln\left(\frac{i-1}{i}\right)$

logo $z = \underbrace{\frac{3}{2}\ln 2}_{x} + i\underbrace{\frac{\pi}{4}}_{y}$; $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$

$z = \rho e^{i\theta}$; $\rho = \left[\frac{9}{4}\ln^2 2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right]^{1/2}$

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi \cdot 2}{4 \cdot 3\ln 2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{6\ln 2}\right)$

---

d) $\arcsin(2) = -i\ln(2i \pm \sqrt{1-4}) = -i\ln(2i \pm \sqrt{3}i) =$

$= -i\ln[(2\pm\sqrt{3})i] = -i\left(\ln(2\pm\sqrt{3}) + \underbrace{\ln i}_{i\pi/2}\right) = -i\left(\ln(2\pm\sqrt{3})\right) + \pi/2$

$= \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{x} + \underbrace{\left(-\ln(2\pm\sqrt{3})\right)}_{y} = \rho e^{i\theta}$

$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$; $\rho = \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \ln(2\pm\sqrt{3})^2\right]^{1/2}$

$\theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\ln(2\pm\sqrt{3})\,2}{\pi}\right)$

(3) Sabe-se que $\begin{cases} \sinh z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \text{seno hiperbólico} \\ \cosh z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \text{cosseno hiperbólico} \end{cases}$

Seja $z = x+iy$;

a) $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \dfrac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} = \dfrac{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}}{2i}$

$\overline{\sin z} = \dfrac{e^{-ix}e^{-y}-e^{ix}e^{y}}{2\cdot -i}$

$|\sin z|^2 = \sin z\,\overline{\sin z} = \dfrac{1}{4}\left(e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}\right)\left(e^{-ix}e^{-y}-e^{ix}e^{y}\right)$

$= \dfrac{1}{4}\left(e^{-2y}+e^{2y}-e^{2ix}-e^{-2ix}\right) = \underbrace{\left(\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)^2}_{\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{4}-\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2}_{-\frac{e^{2ix}}{4}-\frac{e^{-2ix}}{4}+\frac{1}{2}}$

$= (\sinh y)^2 + (\sin x)^2$ q.e.d.

b) $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \dfrac{e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^{y}}{2}$

$\overline{\cos z} = \dfrac{e^{-ix}e^{-y}+e^{ix}e^{y}}{2}$

$|\cos z|^2 = \ldots\ldots = (\sinh y)^2 + (\cos x)^2$ qed (demonstração idêntica a a))

c) $\sinh z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{(x+iy)}-e^{-(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{x}e^{iy}-e^{-x}e^{-iy}}{2}$

$\overline{\sinh z} = \dfrac{e^{x}e^{-iy}-e^{-x}e^{iy}}{2}$

$|\sinh z|^2 = \sinh z \cdot \overline{\sinh z} = \frac{1}{4}\left(e^{x}e^{iy}-e^{-x}e^{-iy}\right)\left(e^{x}e^{-iy}-e^{-x}e^{iy}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}-e^{-2iy}-e^{2iy}\right) =$

$$= \underbrace{\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2}_{\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}-\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\right)^2}_{\frac{-e^{2iy}-e^{-2iy}}{4}+\frac{1}{2}} = (\sinh x)^2 + (\sin y)^2$$

qed

---

d) $\cosh z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{x}e^{iy}+e^{-x}e^{-iy}}{2}$

$\overline{\cosh z} = \dfrac{e^{x}e^{-iy}+e^{-x}e^{iy}}{2}$

$|\cosh z|^2 = \cosh z \cdot \overline{\cosh z} = \frac{1}{4}\left(e^{x}e^{iy}+e^{-x}e^{-iy}\right)\left(e^{x}e^{-iy}+e^{-x}e^{iy}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}+e^{2iy}+e^{-2iy}\right)$

$$= \underbrace{\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2}_{\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x})-\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right)^2}_{\frac{e^{2iy}+e^{-2iy}}{4}+\frac{1}{2}} = (\sinh x)^2 + (\cos y)^2$$

qed

4

a) $z^5 + i = 0 = P(z)$

Pelo Teorema fundamental da álgebra (Gauss), qualquer polinómio $P(z)$ de grau n, tem n raízes complexas (contando com as multiplicidades ou número de vezes que cada raiz é repetida), i.e.

$$P(z) = \alpha(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1}) = \alpha\prod_{i=0}^{n-1}(z-z_i)$$

com $\alpha \neq 0$ e $P(z_i)=0$ $(i=1,\dots n)$

Assim $z^5+i=0$ tem $n=5$ raízes complexas

$$\Leftrightarrow z^5 = -i = e^{-i\pi/2} = e^{-i\pi/2}\cdot\underbrace{e^{i2\pi n}}_{1} \quad \text{onde } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = e^{\frac{-i\pi}{10}}\, e^{\frac{i2\pi n}{5}} = e^{i\left(-\pi/10 + \frac{2\pi n}{5}\right)}, \quad n = 0,\dots n-1$$

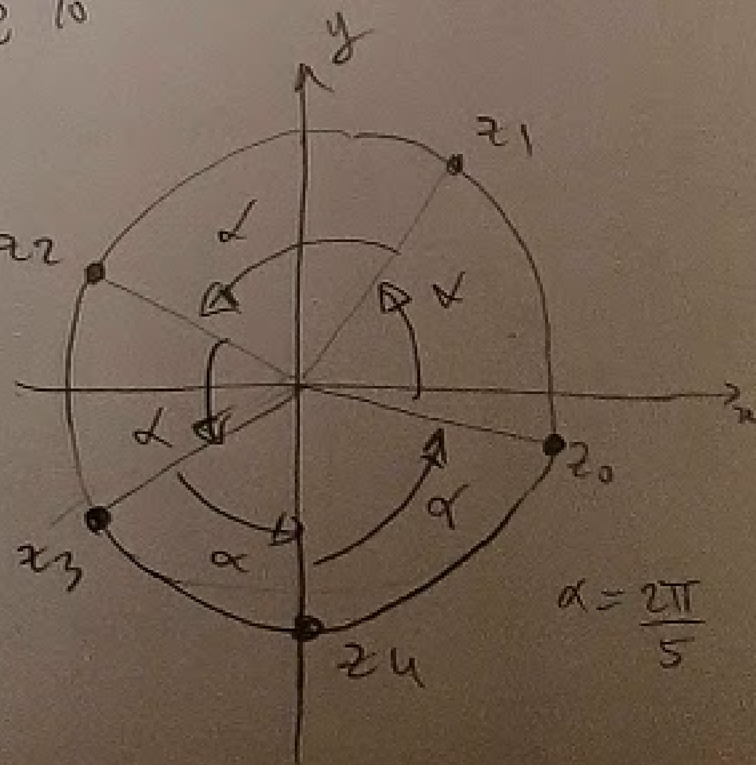
ou seja $z_0 = e^{-i\pi/10}$

$$z_1 = e^{i\left(-\pi/10 + \frac{4\pi}{10}\right)} = e^{\frac{3\pi}{10}}$$

$$z_2 = e^{\frac{7\pi}{10}}$$

$$z_3 = e^{11\pi/10}$$

$$z_4 = e^{15\pi/10}$$



As raízes estão separadas de $\frac{2\pi}{n}$ rad onde

n = grau do polinómio, neste caso $\frac{2\pi}{5}$ rad.

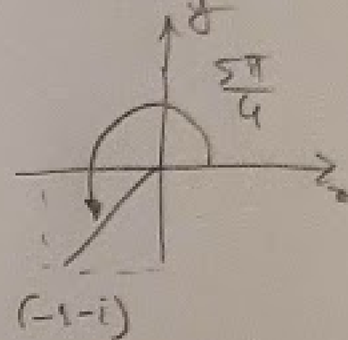
---

h) $\frac{1}{1+e^{z}} = i \Leftrightarrow 1 = i + ie^{z} \Leftrightarrow \frac{1-i}{i} = e^{z} = e^{(z + 2\pi m i)}$

$z + 2\pi m i = \ln\left(\frac{1-i}{i}\right) = \ln(-i-1) = \ln\left(e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$

$= i\frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow z = i\left(2\pi m + \frac{5\pi}{4}\right), \; m \in \mathbb{Z}$

$= \frac{5\pi}{4}$



---

(5) $z = x + iy$

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ onde $x, y, u, v \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} u = \operatorname{Re} f, & v = \operatorname{Im} f \\ x = \operatorname{Re} z, & y = \operatorname{Im} z \end{cases}$

As condições de diferenciabilidade ou de Cauchy-Riemann (CCR) de $f(z)$, i.e. existência de derivada $\frac{df}{dz}$ são:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Neste caso $\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$

$= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial x}$

a) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = 3x^2y - \frac{3y^3}{3} + a(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \frac{da}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy \Rightarrow a(x) = 0$

logo $v(x,y) = 3x^2y - y^3$

$f(z) = u + iv = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$

Calcule-se $z^3 = (x+iy)^3 = (x^2 + 2iyx - y^2)(x+iy) =$

$= x^3 + x^2iy + 2iyx^2 - 2y^2x - y^2x - iy^3$

$= (x^3 - 3y^2x) + i(-y^3 + 3x^2y) = f(z)$

h) $f(z) = z^3$

$f'(z) = 3z^2 = 3(x+iy)^2 = 3(x^2 - y^2 + 2xyi) = 3(x^2-y^2) + 6xyi$

$= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{3x^2-3y^2} + i \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{6xy}$

$f''(z) = 6z$

$f'''(z) = 6$

$f^{IV}(z) = 0$

Donde o desenvolvimento de Taylor em torno de $z_0 = 0$ é =

$g(z) = \underbrace{f(z_0)}_{0} + \underbrace{f'(z_0)}_{0} z + \underbrace{f''(z_0)}_{0} \frac{z^2}{2} + \underbrace{f'''(z_0)}_{6} \frac{z^3}{6} + \underbrace{f^{IV}(z_0)}_{\emptyset} \frac{z^4}{24} + \cdots$

$= z^3 = f(z)$

ou seja o desenvolvimento de Taylor converge $\forall z \in \mathbb{C}$

c) $z = x+iy$

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} =$$

$$= \frac{\left(e^{ix} e^{-y} - e^{-ix} e^{y}\right)}{2} \cdot -i$$

$$= e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) \cdot \frac{-i}{2} + e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x) \frac{i}{2}$$

$$= i \cos x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) + \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right)$$

$$= \underbrace{\operatorname{sen} x \cosh y}_{u} + i \underbrace{\cos x \operatorname{senh} y}_{v}$$

Vamos verificar as CCR

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cosh y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = -\frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \end{cases}$$

A derivada é: $\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

Verifiquemos que $\frac{df}{dz} = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} =$

$$= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix} e^{-y} + e^{-ix} e^{y}}{2}$$

$$= \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x) e^{-y} + (\cos x - i \operatorname{sen} x) e^{y}}{2} = \cos x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - i \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

ou seja $\frac{d \operatorname{sen} z}{dz} = \cos z$ tal como em funções reais.

(6) $z = x+iy$

Seja $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

Se as CCR se verificarem tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \text{ logo}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$= \text{lap } u = 0$

Igualmente

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \text{lap } v = 0$$

ou seja $u(x,y)$ e $v(x,y)$ tem laplacianos nulos ou seja obedecem à equação de laplace.

Consideremos o campo vetorial $\vec{f_1}(x,y) = \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{f_{1x}} \vec{e_x} + \overbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}^{f_{1y}} \vec{e_y}$

A sua divergência é: $\text{div } \vec{f_1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$

$= \frac{\partial f_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial f_{1y}}{\partial y} = \text{lap } u = 0 \Rightarrow \vec{f_1}$ é solenoidal.

Consideremos o campo vetorial $\vec{f_2}(x,y) = -\overbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}^{f_{2x}} \vec{e_x} + \overbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}^{f_{2y}} \vec{e_y}$

O seu rotacional é:

$$\text{rot } \vec{f_2} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_{2x} & f_{2y} & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial f_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial f_{2x}}{\partial y}\right)}_{\vec{e_3}} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}_{\text{lap } v = 0} \vec{e_3} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{f_2}$ é irrotacional

7

a) Seja $f(z) = u + iv$, analítica, i.e. $\frac{df}{dz}$ existe $\forall_z \in \mathbb{C}$

$P(z)$ verifica $\frac{dP}{dz} = f(z)$. f verifica as CCR $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

onde $P(z) = P(x,y) = \int_0^x [u(x',0) + iv(x',0)]dx' + \int_0^y [-v(x,y') + iu(x,y')]dy'$

$$= \underbrace{\left[\int_0^x u(x',0)dx' - \int_0^y v(x,y')dy\right]}_{u_1(x,y)} + i\left[\underbrace{\int_0^x v(x',0)dx + \int_0^y u(x,y')dy'}_{v_1(x,y)}\right]$$

$= u_1 + iv_1$

Verifiquemos que $P(z)$ é diferenciável ou seja verificam as CCR

Calculemos as derivadas de u_1, v_1:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = u(x,0) - \int_0^y \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{-\frac{\partial u}{\partial y}}(x,y')dy \; ; \; \frac{\partial v_1}{\partial x} = v(x,0) + \int_0^y \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\partial v}{\partial y}}(x,y')dy'$$

$$= u(x,0) + u(x,y) - u(x,0) \; ; \; \frac{\partial v_1}{\partial x} = v(x,0) + v(x,y) - v(x,0)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = u(x,y) \qquad ; \; \frac{\partial v_1}{\partial x} = v(x,y)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -v(x,y) \qquad ; \; \frac{\partial v_1}{\partial y} = u(x,y)$$

Logo $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$ e $\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}$ verificando as CCR

Além disso $\frac{dP}{dz} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} = u + iv = f(z)$

ou seja, efetivamente $P(z)$ é a primitiva de $f(z)$.

Se $f(z)$ é analítica, $\forall z \in \mathbb{C}$ então

$I = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = P(z_2) - P(z_1)$ e portanto o integral I

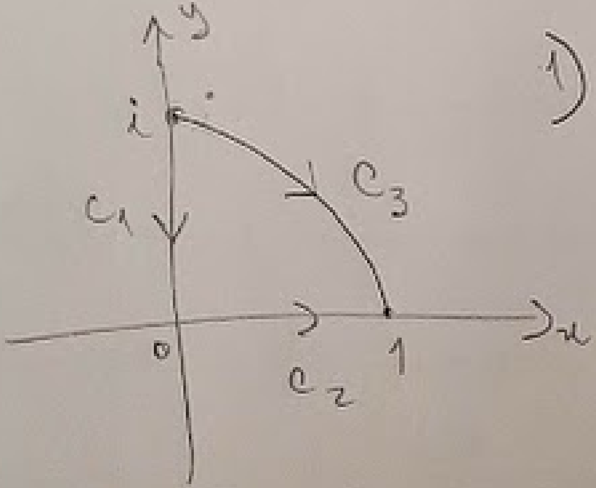
só depende dos limites de integração, tal como no teorema fundamental do cálculo integral em que $z_1, z_2, f(z)$ são reais.

b) Seja $f(z) = z$

$P(z) = \frac{z^2}{2}$

logo o integral $I = \int_i^1 z\, dz = \frac{z^2}{2}\Big|_i^1 = \frac{1}{2} - \frac{i^2}{2} = 1$

Calculamos esse integral através de integrais de caminho



1) $\int_i^1 z\, dz = \underbrace{\int_{C_1} z\, dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{C_2} z\, dz}_{I_2}$

Em C_1, $z = iy$, $dz = i\,dy$

$\int_{C_1} z\, dz = \int_1^0 iy \cdot i\, dy = -\int_1^0 y\, dy =$

$= \int_0^1 y\, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

Em C_2; $z = x$, $dz = dx$

$\int_{C_2} z\, dz = \int_0^1 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

logo $I_1 + I_2 = 1 = I$ (verifica I)

Vamos calcular o integral de caminho ao longo do arco C_3 de raio 1.

Em C_3, $z = e^{i\theta}$, $dz = i e^{i\theta} d\theta$

$$I_3 = \int_{C_3} z\, dz = \int_{\pi/2}^{0} e^{i\theta} \cdot i e^{i\theta} d\theta = i \int_{\pi/2}^{0} e^{2i\theta} d\theta =$$

$$= i \left[\int_{\pi/2}^{0} \cos 2\theta \, d\theta + i \int_{\pi/2}^{0} \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta \right]$$

$$= - \int_{\pi/2}^{0} \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta + i \int_{\pi/2}^{0} \cos 2\theta \, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta - i \int_{0}^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta$$

Verifiquemos que $I_3 = 1$ e portanto que $\begin{cases} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta = 1 = I_{3_1} \\ \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta = 0 = I_{3_2} \end{cases}$

O integral complexo I fornece dois integrais reais $I_{3,1}$ e $I_{3,2}$ que não necessitam de ser calculados através de integrais de funções reais, o que representa uma grande vantagem dos integrais complexos, o de fornecer integrais reais "difíceis" recorrendo a integrais complexos "simples".

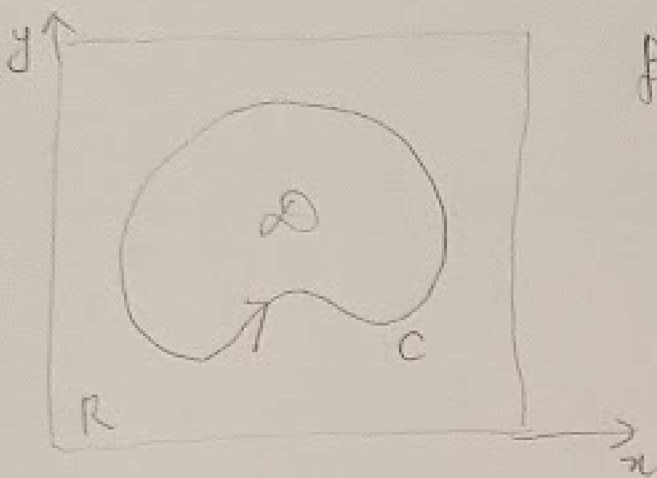
Façamos a prova

$$I_{3_1} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta = -\frac{\cos 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}(\underbrace{\cos \pi}_{-1} - \underbrace{\cos 0}_{1}) = 1$$

$$I_{3_2} = \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\sin \pi - \sin 0) = 0$$

8

Igualdade de Cauchy



$f(z)$ analítica numa região R que inclui curva fechada C, logo a integral cíclica $\oint f(z)\,dz = \emptyset$

$= P(z)\Big|_{z_1}^{z_1} = \emptyset$, onde $z_1 \in C$ e

$\dfrac{dP(z)}{dz} = f(z)$, $P(z)$ é a primitiva

Se $z_0 \in \partial\mathcal{D}$ onde $\partial\mathcal{D} = C =$ Fronteira $\mathcal{D} = Fr(\partial\mathcal{D})$

então $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ é analítica numa região R_1 que não inclui z_0

logo $\displaystyle\oint_{C\cup C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \emptyset =$ no limite em que $C_1 \to \emptyset$

$$= \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

O integral em C_1 que rodeia z_0 pode ser: $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$

$dz = \rho i e^{i\theta}$

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{\rho} e^{-i\theta} \cdot \rho i e^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} f(z)\,d\theta$$

No limite $\rho \to 0$, vem $\displaystyle\lim_{\rho\to 0} \oint \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\,2\pi i$

logo $\displaystyle\oint \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$

a) Calculemos a derivada da igualdade de Cauchy em $z = z_0$. Vem então:

$$\oint \frac{d}{dz_0}\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right) dz = \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz = 2\pi i \frac{df}{dz_0} = 2\pi i f'(z_0)$$

Mostremos o resultado geral por indução matemática.
O resultado verifica-se para $n=1$. Mostremos que se verifica para n, então verifica-se para $n+1$.

$$\frac{d}{dz_0}\left[n! \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\right] = 2\pi i f^{(n+1)}(z_0) \quad \left(\text{Hipótese para } n\right)$$

$$= n! \oint \frac{f(z)\cdot(n+1)}{(z-z_0)^{n+2}}\, dz = (n+1)! \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}\, dz \quad \left(\begin{array}{c}\text{resultado} \\ \text{para} \\ n+1\end{array}\right)$$

Logo o resultado verifica-se $\forall n$ ou seja:

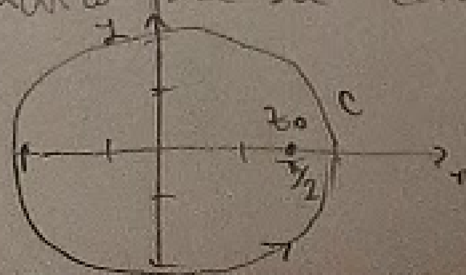
$$\boxed{n! \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = 2\pi i f^{(n)}(z_0)}$$

onde $f^{n}(z_0)$ é a n-ésima derivada de f em z_0.

Aplicação: $f(z) = \sin z$

Por exemplo $\displaystyle\oint \frac{\sin(z)}{(z-\pi/2)^2}\, dz = 2\pi i \underbrace{f''(\pi/2)}_{-\sin(\pi/2)} = -2\pi i$

O integral acima pode ser calculado ao longo da curva $z = 2e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$



a qual inclui $z_0 = \pi/2$ no seu interior

9 a) Seja $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$. $f(z)$ tem uma singularidade na origem $z_0 = 0$, dado que $\lim_{z \to 0} |f(z)| = \infty$. Vamos obter o desenvolvimento de Laurent da $f(z)$ em torno de $z_0 = 0$, ou seja $f(z) = \dots \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z +$

$+ a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$

Para tal consideremos o desenvolvimento de Taylor de $e^z =$

$= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$, logo

$e^z - 1 = z + \frac{z}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots = z\Big(1 + \underbrace{\frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots}_{\alpha}\Big) = z(1+\alpha) =$

$= z(1 - (-\alpha))$

Assim $f(z) = \frac{1}{z(1-(-\alpha))} = \frac{1}{z(1-t)}$ onde $t = -\alpha$

Para $|t| < 1$ tem-se $\frac{1}{1-t}$ = soma dos termos da série geométrica de razão t $= 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$

Logo $f(z) = \frac{1}{z}(1 + t + t^2 + t^3 + \dots) = \frac{1}{z}(1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots)$

$= \frac{1}{z} - \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha^2}{z} - \frac{\alpha^3}{z} + \dots$

Ora $\alpha = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \dots = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + O(z^4)$

Logo $\alpha^k = O(z^k)$ = termo dominado por z^k $(z \to 0)$

ou seja $\lim_{z\to 0} \left|\frac{\alpha^k}{z^k}\right| < \infty$

ou seja α^k é um polinómio e z cujo monómio de menor grau é k.

$$\alpha^2 = \left(\frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{6} + \dots\right) = \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{6} + O(z^4)$$

$\alpha^3 = \frac{z^3}{8} + O(z^4)$ Calculando os termos $\frac{\alpha^k}{z}$ vem:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{6} + \frac{z^2}{24} + O(z^3)\right)$$

$$+ \left(\frac{z}{4} + \frac{z^2}{6} + O(z^3)\right) - \left(\frac{z^2}{8} + O(z^3)\right) =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + z\underbrace{\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{12}} + z^2\underbrace{\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)}_{\phi} + O(z^3)$$

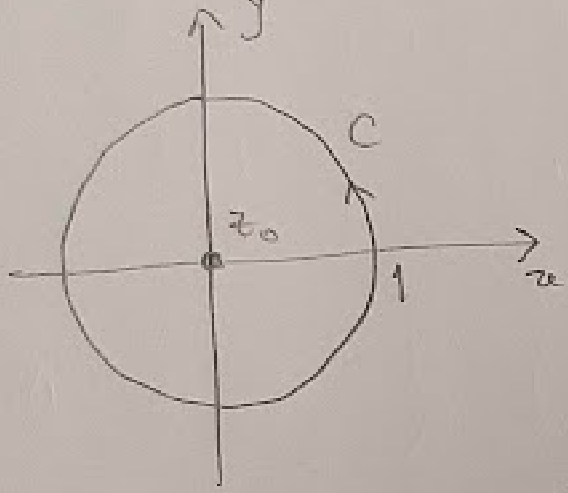
$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{12} + O(z^3)$ = Desenvolvimento de Laurent de $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ (3 primeiros termos) em torno de $z_0 = 0$.

f) A função $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ tem uma única singularidade em $z=0$. O resíduo associado é o coeficiente do desenvolvimento de Laurent em torno desse ponto $z=0$.

Ou seja $f(z) = \dfrac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

onde se verifica que $a_{-1}(0) = 1$

Assim o integral $\oint f(z)\,dz$ em torno da curva C de raio 1 vem $I = \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1} = 2\pi i$



Ao longo de C, tem-se $z = e^{i\theta}$, $dz = i e^{i\theta}\,d\theta$, logo

$$\oint f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, i e^{i\theta}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta}}{e^{(e^{i\theta})} - 1}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{i(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}{\exp(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) - 1}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{e^{\cos\theta}\cdot(\cos(\text{sen}\,\theta) + i\,\text{sen}(\text{sen}\,\theta)) - 1}\,d\theta$$

Assim $\begin{cases} \text{Re}\, I = \text{Re}\,(2\pi i) = 0 \\ \text{Im}\, I = \text{Im}\,(2\pi i) = 2\pi \end{cases}$