EXAME TOPOLOGIA 24.01.09

(1) Existe um homeomorfismo entre $[0,1]$ e S^1 ?

<u>resposta</u> não

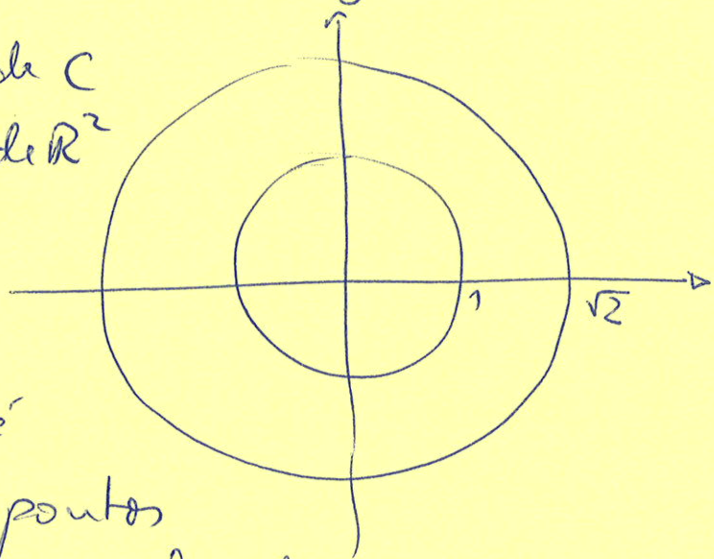
Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe $f : [0,1] \to S^1$ homeomorfismo.
Seja $x = 0.5$, seja $P = f(x) = f(0.5) \in S^1$
$[0,1] \setminus \{x\} = [0, 0.5[\cup]0.5, 1[$ é desconexo
mas $S^1 \setminus \{P\}$ é conexo, contradição.

(2) Seja $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$

Calcule o diâmetro de C

a) na métrica induzida de $\mathbb{R}^2$

b) na métrica geodésica



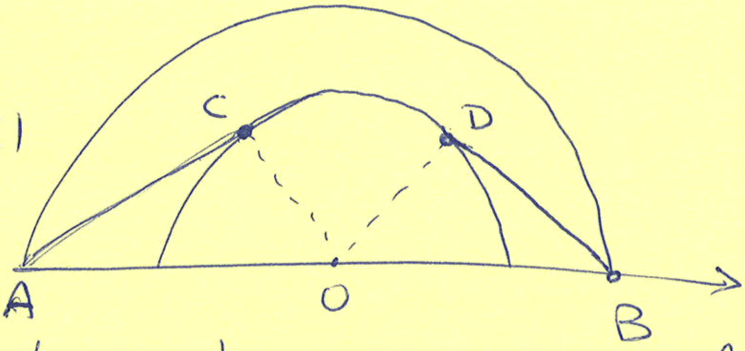
<u>resposta</u>

a) O diâmetro de C é a distância entre dois pontos diametralmente opostos na fronteira exterior, por exemplo $A(-\sqrt{2},0)$, $B(\sqrt{2},0)$; $\operatorname{diam} C = 2\sqrt{2}$

b) O diâmetro de C é igual à distância entre os mesmos pontos A e B mas na métrica geodésica

EXAME TOPOLOGIA 24.01.09

(2) (continuação)



$d(A,B) = |AC| + |CD| + |DB|$

$= 1 + \frac{\pi}{2} + 1$

(3) Enuncie e demonstre o teorema do ponto fixo.

Teorema Seja X um espaço métrico completo. Seja $f: X \to X$ uma contracção. Então f possui um único ponto fixo em X

demonstração Ver apontamentos das aulas

(4) Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f: X \to Y$ uma função contínua. Se $E \subset X$ é um conjunto fechado, $f(E) \subset Y$ é necessariamente fechado? Se $F \subset Y$ é um conjunto fechado, $f^{-1}(F) \subset X$ é necessariamente fechado?

resposta Seja $F \subset Y$ um conjunto fechado. Resulta que $Y \setminus F$ é aberto; pela continuidade de f, $f^{-1}(Y \setminus F)$ é aberto. Mas $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ portanto $f^{-1}(F)$ é fechado em X.

Se $E \subset X$ é um conjunto fechado, $f(E) \subset Y$ pode não ser fechado. Por exemplo, seja $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ $f(x,y) = x$ (projecção)

EXAME TOPOLOGIA 24.01.09

(4) (continuação)

Seja $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$, fechado.

Temos que $f(E) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ não fechado

(5) Seja X um conjunto infinito. Seja $\mathcal{T}$ a família de todos os subconjuntos de X cujo complemento é finito. Acrescente $\emptyset$ e X.

a) $\mathcal{T}$ é uma topologia sobre X?

<u>resposta</u> sim, todos os axiomas são verificados. Note-se que a união finita de conjuntos finitos é um conjunto finito; a intersecção arbitrária de conjuntos finitos é um conjunto finito

b) $(X, \mathcal{T})$ é espaço de Hausdorff?

<u>resposta</u> não. Note-se que em X não existem dois abertos (não vazios) disjuntos. Se existissem, a união dos seus complementos seria igual a X. Mas os complementos de abertos são finitos enquanto que X é infinito.

c) $(X, \mathcal{T})$ é espaço conexo?

<u>resposta</u> sim. Pelo mesmo argumento como na alínea b, X não possui uma partição de abertos.

EXAME TOPOLOGIA 24.01.09

5 (continuação)

d) $(X, \mathcal{J})$ é espaço compacto

<u>resposta</u> sim. Seja (A_i) uma cobertura com abertos de X. Seja A_0 um deles. Então $X \setminus A_0$ é um conjunto finito:

$$X \setminus A_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Para cada k de 1 a n, existe i_k tal que $x_k \in A_{i_k}$. Então $(A_0, A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n})$ constitui uma subcobertura finita de X, q.e.d.