EXPERIÊNCIA # 3
Estudo de vórtice

Objetivo

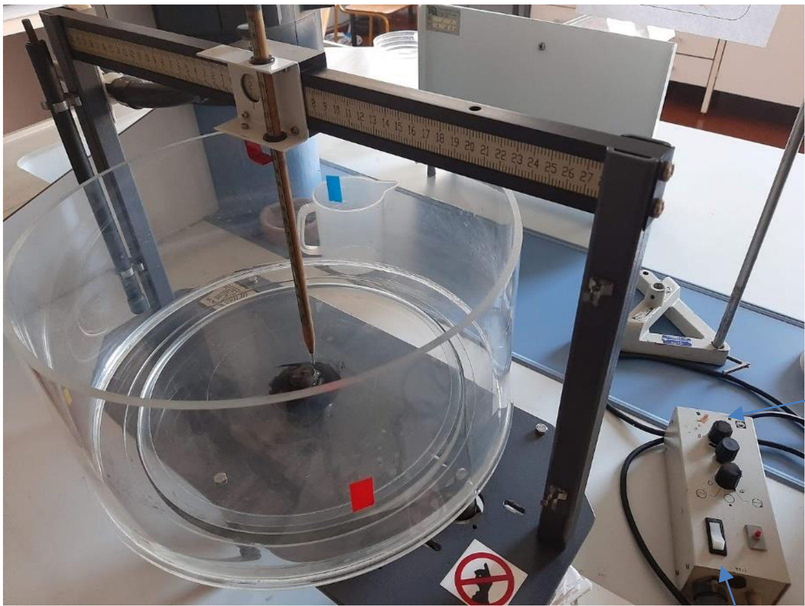
Estudo de vórtice forçado. Medição do perfil da superfície livre e da distribuição da carga total (energia específica total) em função da distância ao centro do movimento.

Descrição geral do equipamento

Tanque transparente apoiado num suporte rotativo. O sistema é colocado em rotação através de um motor eléctrico, controlado por um reóstato (resistência variável). É possível realizar medições da cota da superfície livre e da carga total utilizando um suporte transversal graduado, equipado em alternância com uma sonda vertical e com um tubo de Pitot.

Método experimental

Uma quantidade fixa de água está dentro do tanque em rotação. Sobre o fluido em rotação sólida (isto é como se fosse um sólido em rotação) são medidos o perfil (cota = altitude em m) da superfície livre e a carga (energia/kg em J/kg) em função da distância ao centro de rotação do tanque. Devido à força centrífuga, a água 'empilha-se' ou é projetada junto às pares internas do tanque (efeito centrifugação das máquinas de lavar roupa).



TEORIA

Na equação de Bernoulli a energia específica total, ou *carga total* ("total head") $\mathcal{H}$ (J/kg=m^2s^{-2}) $\left(H = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)$, permanece constante ao longo de uma linha de corrente. No entanto, esta equação não dá informação sobre como é que $\mathcal{H}$ varia de uma linha de corrente para outra.

Nesta experiência vamos analisar um exemplo do tipo de escoamentos em que o movimento das partículas de fluido se faz em torno de um ponto fixo (centro), produzindo uma estrutura dinâmica geralmente designada por vórtice (redemoinho). Pode afirmar-se, que neste tipo de movimentos o módulo da velocidade (celeridade u) das partículas dependerá da distância r ao centro $\left(u = f(r)\right)$. As linhas de corrente são circulares e portanto perpendiculares à direção radial.

A equação dinâmica deste tipo de movimentos exprime o equilíbrio entre o gradiente radial da pressão e a aceleração centrífuga

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dr}(p + \rho g z) = \frac{u^2}{r} \Leftrightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{p}{\rho g} + z\right) = \frac{u^2}{gr} \qquad (1)$$

em que p é a pressão estática a que está sujeito o fluido e ρgz é a pressão devida à força da gravidade. Por definição, a *altura de carga total* $H = \mathcal{H}/g$ é dada por

$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + z \qquad (2)$$

Diferenciando em ordem a r e utilizando (1)

$$\frac{dH}{dr} = \frac{u}{g}\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) \qquad (3)$$

As equações (1) e (3) dão-nos a variação da *carga piezométrica* $\left(\frac{p}{\rho g} + z\right)$ e da altura de carga total H através das linhas de corrente de um vórtice.

Vórtice forçado

Um caso simples com particular interesse é o vórtice forçado, em que o fluido está sujeito a uma rotação "sólida" e por isso $u = \Omega r$, sendo Ω a velocidade angular (*rad*/*s*) de rotação e r a distância ao centro de rotação. No vórtice forçado o escoamento é rotacional, dado que a vorticidade $rot(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} \neq 0$ e H varia através das linhas de corrente. No caso de rotação sólida, o módulo da vorticidade é 2Ω [1]

[1] **Nota** – Um escoamento diz-se rotacional ou irrotacional, consoante o movimento dos elementos de fluido se faz ou não com rotação em torno de si próprios. Podem existir vórtices irrotacionais.

<u>Condições</u>: Ω=*cte*; $u = \Omega \quad r$ (figura em baixo do lado esquerdo).

Pela equação (1) vem

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{p}{\rho g} + z\right) = \frac{\Omega^2 r}{g} \tag{4}$$

pelo que, se integrarmos em *r*, virá

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} + C \tag{5}$$

onde *C* é uma constante de integração. Considerando a pressão atmosférica como a pressão de referência, temos que na superfície livre do fluido *p*=0. Tomando como cota de referência (z=0), a cota da superfície livre no centro, temos *z*=0 em *r=0*. Conclui-se assim que $C = 0$.

A equação (5) permite deste modo obter a <u>forma da superfície livre</u> (superfície em que *p*=0)

$$z = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 \tag{6}$$

Substituindo $u = \Omega \quad r$ na equação (3) vem

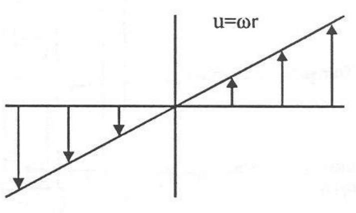
$$\frac{dH}{dr} = \frac{\Omega r}{g}(\Omega + \Omega) = 2\frac{\Omega^2 r}{g} \tag{7}$$

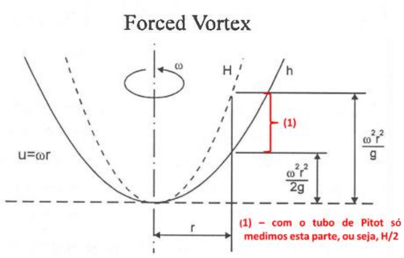
e integrando em *r* obtém-se

$$H = \frac{\Omega^2 r^2}{g} + C' \tag{8}$$

Como à superfície *H*=0 em *r=0* (ver eq. 2), a constante de integração é $C' = 0$. A dependência da <u>altura de carga total</u> com a distância *r* é então descrita por:

$$H = \frac{\Omega^2}{g} r^2 \tag{9}$$





Procedimento experimental

- Ligue o interruptor do motor e rode lentamente o botão do reóstato (botão da parte superior do aparelho) até ao máximo. O tanque cilíndrico adquire uma rotação de aproximadamente 40 rpm (rotações por minuto), correspondente a um período de rotação de 1.5 s. Meça com o cronómetro, o tempo T (em s) de 10 rotações completas (seguindo uma das 3 tiras coloridas coladas no tanque) e obtenha a velocidade angular $\Omega = (10 \times 2\pi)/T$ (rad/s). Atenção às partes móveis do motor. A correia de transmissão do motor ao tanque, pode eventualmente saltar tendo de ser recolocada.

- Instale a ***sonda vertical*** metálica no respetivo suporte e desloque-a lateralmente na horizontal a posição $r = 0$ (centro) medido a posição *r* na régua do suporte transversal, graduada em cm.

- Escolha 10 valores diferentes da distância *r* ao centro do tanque (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 cm) e meça (na escala vertical em cm) para cada valor de *r* o valor de d_s(r) da cota da ponta da sonda metálica. A altura da superfície livre para *r* será $z = d_s(0) - d_s(r)$.

- Substitua a sonda vertical pelo ***tubo de Pitot*** e meça a altura da água (em cm) no interior do tubo para r=15,16,17,18 cm. A abertura inferior do tubo de Pitot deve opor-se à direcção do movimento.

Cálculos

1. Represente graficamente a cota da superfície livre: $z = d_s(0) - d_s(r)$ (fórmula 6) e *H* (fórmula 9) em função de *r* (distância ao centro), a partir de *r*=0.

2. Represente graficamente *z* e *H* em função de r^2

3. A partir dos gráficos obtidos, analise e discuta os resultados obtidos e a validade das relações (6) e (9). Em ambos os casos, faça uma regressão linear e calcule os respetivos declives m. A partir daí infira o valor da velocidade angular e compare-a com a medida diretamente a partir da contagem do número de rotações por minuto (Nota: Ω=2π/período de rotação.

Valores medidos

Medição do perfil da superfície livre

Distância r ao centro (cm)	d_s **(cm)**	**z**
r=0		

Tempo T de 10 rotações (s)	

Medição da altura de carga no tubo de Pitot

Distância ao centro r (cm)	**H (cm)**
r=15 cm	