EXPERIÊNCIA # 4

Momento da força hidrostática sobre uma superfície plana

Objetivo

Estudo do momento de força, exercido pela força hidrostática sobre uma superfície plana submersa, em função do nível de submersão e da inclinação relativamente à vertical.

Descrição geral do equipamento

O dispositivo experimental é constituído por dois reservatórios rigidamente ligados entre si, suspensos de um eixo fixo em torno do qual o conjunto pode rodar. O reservatório do lado esquerdo tem a função de contrapeso e contribui para equilibrar o conjunto para um dado angulo inicial de inclinação. O reservatório do lado direito tem a forma de um sector circular com 90º (quadrante), tendo duas paredes cilíndricas centradas no eixo de suspensão e uma parede plana perpendicular ao painel vertical do dispositivo. Será esta parede plana o objecto de estudo. Existem várias massas marcadas que podem ser colocadas num suporte suspenso no lado esquerdo do conjunto. O painel vertical possui uma escala que permite medir a altura do nível do líquido no interior do quadrante.

Método experimental

Para um dado angulo de inclinação do reservatório do lado direito (quadrante), são estabelecidos os equilíbrios entre valores crescentes da massa colocada no suporte e a quantidade de água colocada no quadrante. As observações permitem determinar a variação do momento do quadrante, relativo ao eixo de suspensão, em função do acréscimo da quantidade de água. Os resultados experimentais podem ser comparados com os valores obtidos a partir da teoria hidrostática.

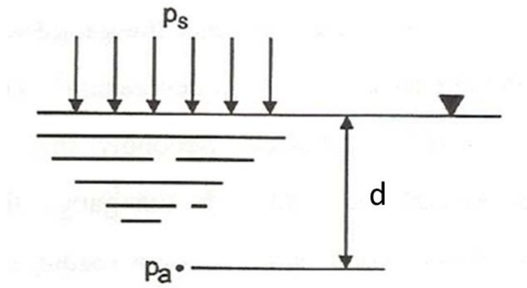
TEORIA

Uma superfície submersa por um fluido está sujeita à acção de forças exercidas pelo fluido. A determinação dessas forças é importante na concepção de tanques de armazenamento, navios, barragens, comportas e outras estruturas hidráulicas. Para fluidos em repouso a força exercida pelo fluido é perpendicular à superfície submersa e é devida à pressão hidrostática.

A pressão hidrostática ou manométrica exercida por um líquido com densidade uniforme ρ à profundidade d abaixo da superfície, é dada por

$$p = \rho\, g\, d \qquad (1)$$

Para obter a pressão absoluta p_a a esse nível, será necessário adicionar a pressão p_s aplicada na superfície do líquido ($p_a = p_s + p$).



A pressão hidrostática aumenta linearmente com a profundidade e gera sobre uma superfície submersa uma força normal proporcional à área A dessa superfície, a força hidrostática $F = pA$.

Considere-se uma placa rectangular plana com largura B, com inclinação θ relativamente á vertical, e que se encontra sujeita de um dos seus lados à acção da pressão exercida por uma coluna de água, cujo valor cresce linearmente com a profundidade. Considere-se ainda que, num caso a placa se encontra parcialmente submersa (Fig. 1a) e que noutro, está completamente submersa e abaixo do nível da superfície da água (Fig. 1b). Pretende-se determinar o momento M da força hidrostática exercida sobre a placa, relativamente a um eixo fixo em O acima do nível da água.

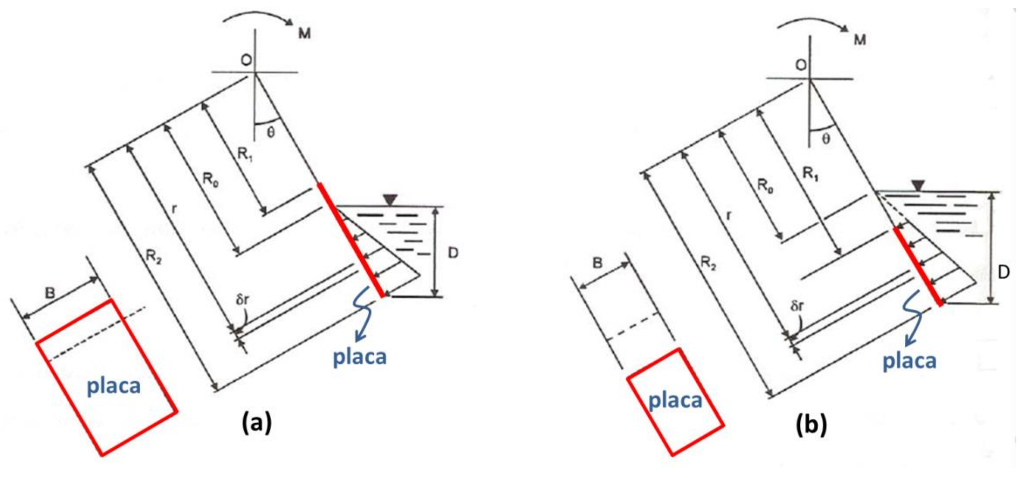


Fig. 1 – Placa rectangular com largura B, comprimento R_2-R_1 e com inclinação θ relativamente á vertical, sujeita de um dos seus lados à acção de uma coluna de água (em (a) a submersão é parcial enquanto em (b) é total). D é a altura de água acima do bordo inferior da placa. R_0, R_1 e R_2 são distâncias relativas ao eixo O medidas segundo a direcção tangente à

superfície da placa e representam, respectivamente, as distâncias à superfície da água, ao bordo superior e ao bordo inferior da placa.

A força hidrostática aplicada num elemento de área $\delta A = B\delta r$ (ver Fig. 1) da placa é

$$\delta F = p\,\delta A = \rho g(r - R_0)cos\theta\, B\delta r \quad (2)$$

Esta força actua com um braço r ao eixo centrado em O, pelo que o seu momento relativamente a este eixo é

$$\delta M = \rho g(r - R_0)cos\theta\, B\delta r\, r \quad (3)$$

O momento da força hidrostática total aplicada sobre a placa, vem então dado por

$$M = \rho g\, B\, cos\theta\, \int r(r - R_0)\, \delta r \ , \quad (4)$$

sendo que a integração opera sobre a extensão submersa da placa, pelo que os limites de integração são diferentes no caso da Fig. 1a e da Fig. 1b.

(i) Quando a placa se encontra parcialmente submersa (Fig. 1a), $R_0 > R_1$ e M vem dado por

$$M = \rho g\, B\, cos\theta\, \int_{R_0}^{R_2} r(r - R_0)\, \delta r =$$
$$= \rho g\, B\, cos\theta \left[\frac{r^3}{3} - \frac{R_0 r^2}{2}\right]_{R_0}^{R_2}$$
$$= \rho g\, B\, cos\theta \left\{\frac{R_2{}^3 - R_0{}^3}{3} - \frac{R_0\left(R_2{}^2 - R_0{}^2\right)}{2}\right\} \quad (5)$$

(ii) Quando a placa se encontra totalmente submersa (Fig. 1b), $R_0 < R_1$ e M vem dado por

$$M = \rho g\, B\, cos\theta\, \int_{R_1}^{R_2} r(r - R_0)\, \delta r =$$
$$= \rho g\, B\, cos\theta \left[\frac{r^3}{3} - \frac{R_0 r^2}{2}\right]_{R_1}^{R_2}$$
$$= \rho g\, B\, cos\theta \left\{\frac{R_2{}^3 - R_1{}^3}{3} - \frac{R_0\left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right)}{2}\right\} \quad (6)$$

As fórmulas (5,6) são casos particulares do momento M da força hidrostática exercida sobre uma área A imersa, fazendo um ângulo θ com a vertical, rodando em torno de um eixo horizontal e com momento de área I_{xc}. O centro geométrico da área imersa está à distância R_c do eixo de rotação e à profundidade h_c em relação à superfície livre. A fórmula genérica de M é:

$$M = \rho g\, cos\theta\, (I_{xc} + R_c h_c A)$$

No caso da placa parcialmente imersa (5), tem-se:

$$I_{xc} = \frac{B(R_2 - R_0)^3}{12} \quad ; \quad A = B(R_2 - R_0) \quad ;$$
$$R_c = \frac{(R_0 + R_2)}{2} \quad ; \quad h_c = \frac{(R_2 - R_0)}{2} \quad (7)$$

No caso da placa totalmente imersa (6), tem-se:

$$I_{xc} = \frac{B(R_2 - R_1)^3}{12} \quad ; \quad A = B(R_2 - R_1) \quad ;$$
$$R_c = \frac{(R_1+R_2)}{2} \quad ; \quad h_c = \frac{(R_2-R_1)}{2} + R_1 - R_0 \qquad (8)$$

Utilizando o dispositivo experimental apresentado, o momento da força hidrostática exercida sobre a placa pode ser medido diretamente, através da determinação do momento do peso das massas colocadas no suporte, e comparado com as expressões analíticas (5) e (6), resultantes da teoria hidrostática.

Procedimento experimental

1 - Se necessário, nivele o dispositivo experimental ajustando os pés da sua base;

2 - Suspenda o suporte de pesos vazio na barra do lado esquerdo do conjunto;

3 - Encha cuidadosamente com água o tanque de contrapeso (tanque do lado esquerdo), até que a parede plana do depósito em quadrante, parede perpendicular ao painel de leitura, fique alinhada verticalmente (θ=0º);

4 – Coloque no suporte de pesos a massa de 20g. Deite água no depósito em quadrante até que o conjunto volte a adquirir a posição inicial com θ = 0º. Tome nota do valor da massa no suporte de pesos e da altura da água no interior do depósito. A altura da água deve ser medida verticalmente, desde o nível do bordo inferior da parede plana até à superfície livre da água;

5 – Repita o ponto anterior para mais 4 valores crescentes da massa, distribuídos no intervalo definido pelo alcance máximo das massas disponíveis (total das massas = 670g). Portanto h é medido para 5 massas crescentes.

6 – Repita os pontos de 2 a 5 para uma inclinação θ = 30º e 5 massas crescentes.

Especificações técnicas do equipamento

R_1 = 100 mm

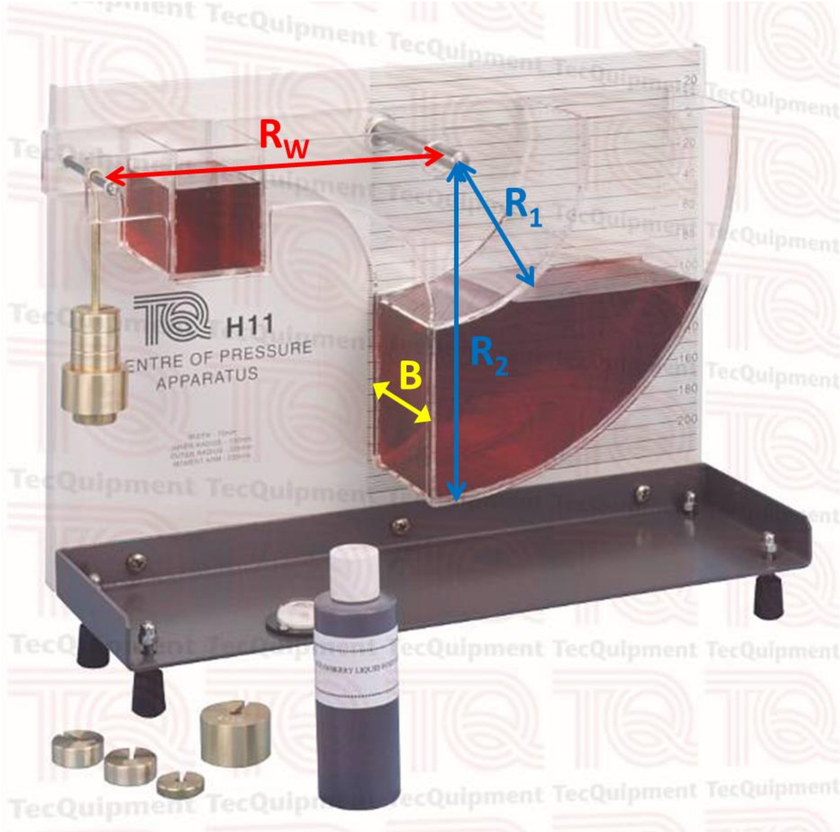
R_2 = 200 mm

B = 75 mm

R_w = 200 mm

ρ = 1000 kg/m^3

massas: 1x20g
5x50g
2x200g



Cálculos e análise dos resultados

Questões

1. Para cada par de observações (*massa, altura de água acima do bordo inferior da parede plana*), obtidos com $\theta = 0º$ e $\theta = 30º$, calcule o momento M do peso da massa colocada no suporte, relativamente ao eixo de suspensão do conjunto, e, calcule ainda a altura de água medida segundo a direcção da parede plana, (R_2-R_0) (ver Fig. 1).
2. Num gráfico, com o momento M em ordenadas e (R_2-R_0) em abcissas, marque todos os valores calculados no ponto anterior.
3. No gráfico obtido, sobreponha o traçado das curvas descritas pelas equações (5) e (6) para $\theta = 0º$ e $\theta = 30º$.
4. Para cada par (M, R_2-R_0), calcule o valor dos dois seguintes parâmetros adimensionais:

   $$h = \frac{R_2 - R_0}{R_2 - R_1} \qquad\qquad m = \frac{M}{M_{ref}}$$

   em que $M_{ref} = \rho g (R_2 - R_0) cos\theta \ \times B(R_2 - R_1) \ \times \frac{R_2 + R_1}{2}$.[1]

   Crie um novo gráfico onde represente m em função de h de acordo com os valores obtidos.

5. Analise e discuta os seus resultados.

[1] M_{ref} representa o momento da força hidrostática sobre a placa, calculado com o valor da pressão hidrostática na base da placa.