

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

ANÁLISE MATEMÁTICA III

2025/26

pergunta modelo

Enuncie o teorema do ponto fixo.

Demostre a unicidade do ponto fixo.

Teorema (do ponto fixo, ou da contração)

Seja (X, d) um espaço métrico completo.

Seja $T: X \rightarrow X$ uma contração.

Então T tem um único ponto fixo em X .

demonstração (da unicidade)

Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem dois pontos fixos, x_1 e x_2 , $x_1 \neq x_2$.

Sabemos que $T(x_1) = x_1$ e $T(x_2) = x_2$.

Por hipótese, T é uma contração, ou seja, existe uma constante $L > 0$, $L < 1$, tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq L d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

$$\text{Então } d(x_1, x_2) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq L d(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow (1-L) d(x_1, x_2) \leq 0 \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{1-L}_{>0} d(x_1, x_2) \leq 0 \Rightarrow d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ absurdo}$$

Portanto o ponto fixo é único.