

FACULDADE DE CIÊNCIAS
DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

ANÁLISE MATEMÁTICA III

2025/26

pergunta modelo

Considere a sucessão de funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$$

- a) Prove que, para cada n fixo, f_n é de classe C^1
 - b) Calcule o limite pontual de f_n .
 - c) A convergência de f_n é uniforme?
 - d) Calcule o limite pontual de f'_n .
 - e) A convergência de f'_n é uniforme?
-

a) É óbvio que f_n é contínua em $\mathbb{R}$

(o denominador nunca se anula)

É óbvio que f_n é derivável em cada $x > 0$:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} = 1 - \frac{1}{1+nx}$$

$$f'_n(x) = \frac{n}{(1+nx)^2}$$

e também em cada $x < 0$:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1-nx} = 1 - \frac{1}{1-nx}$$

$$f'_n(x) = \frac{n}{(1-nx)^2}$$

Resta verificar que f_n é derivável em $x=0$.

A derivada à direita é

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\varepsilon} (f_n(\varepsilon) - f_n(0)) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{n\varepsilon}{1+n\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{n}{1+n\varepsilon} = n$$

A derivada à esquerda é

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon < 0}} \frac{1}{\varepsilon} (f_n(\varepsilon) - f_n(0)) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon < 0}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{n\varepsilon}{1-n\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon < 0}} \frac{n}{1-n\varepsilon} = n$$

As duas derivadas laterais existem, são finitas e são iguais entre si, portanto f_n é derivável em $x=0$ e $f'_n(0) = n$.

Unificando as fórmulas obtidas acima, podemos afirmar que $f'_n(x) = \frac{n}{(1+n|x|)^2}$

Esta expressão é obviamente contínua (o denominador nunca se anula) pelo que $f_n \in C^1$

b) Podemos re-escrever $f_n(x)$ como $\frac{x}{\frac{1}{n} + |x|}$

Nesta forma, é visível que $f_n(x) \rightarrow 1$ para $x > 0$ fixo, $f_n(x) \rightarrow -1$ para $x < 0$ fixo, enquanto que $f_n(0) \rightarrow 0$

Portanto, f_n converge pontualmente para

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

c) Se a convergência fosse uniforme, o limite seria uma função contínua. Portanto, a convergência não é uniforme

d) Podemos re-escrever $f'_n(x)$ como

$$f'_n(x) = \frac{n}{\left(n\left(\frac{1}{n} + |x|\right)\right)^2} = \frac{n}{n^2\left(\frac{1}{n} + |x|\right)} = \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{1}{n} + |x|}$$

Portanto, para cada $x \neq 0$, $f'_n(x) \rightarrow 0$ (x fixo)

Por outro lado, $f'_n(0) = n \rightarrow +\infty$

Portanto, não existe $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja limite pontual de f'_n

e) Pela alínea anterior, o limite pontual não existe, portanto não faz sentido questionar se a convergência é uniforme.

Poderíamos questionar a convergência uniforme das restrições de f'_n a $\mathbb{R} - \{0\}$ mas este seria um outro exercício.