

FACULDADE DE CIÊNCIAS
DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

ANÁLISE MATEMÁTICA III

2025/26

pergunta modelo

Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$.

Prove que f é difeomorfismo de classe C^1 ,
ou seja, que $f \in C^1$ e existe inversa $f^{-1} \in C^1$.

É óbvio que f é de classe C^1 (até C^∞).

passo 1 provaremos que f é bijectiva de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$

Observamos que $f'(x) = 1 + e^x > 0$, portanto
 f é estritamente crescente, portanto f é injectiva.

Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, o que garante que f é sobrejectiva

passo 2 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo bijectiva, resulta que
existe $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

passo 3 provaremos que $f^{-1} \in C^1$

Basta provar que qualquer $y^* \in \mathbb{R}$ tem uma vizinhança
 V tal que f , restringido a V , é de classe C^1 .

Seja então $y^* \in \mathbb{R}$ arbitrário e seja $x^* = f^{-1}(y^*)$

Sabemos que $f'(x^*) \neq 0$. Pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança U de x^* tal que $V = f(U)$ é vizinhança de $f(x^*) = y^*$ e tal que $f: U \rightarrow V$ é difeomorfismo de classe C^1 (até C^∞). Resulta que $f^{-1}: V \rightarrow U$ é de classe C^1 , o que termina a demonstração.