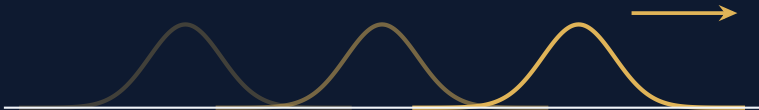


Soluções da equação da onda

Ondas viajantes e ondas harmónicas



Três perguntas

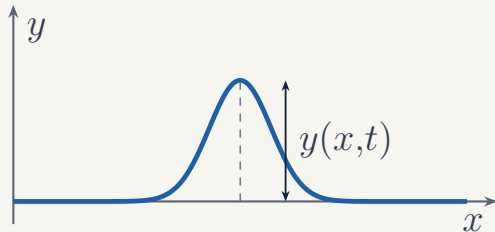
- Uma mão agita a ponta de uma corda esticada: sobe depressa, desce devagar e pára. Pouco depois, olha-se para o impulso na corda. O lado mais afastado da mão é íngreme ou suave?
- Na «onda» de um estádio de futebol, ninguém sai do seu lugar. Então o que é que dá a volta ao estádio, e a que velocidade?
- A 100 m, os graves e os agudos de uma orquestra chegam ao mesmo tempo. Porquê? E se os agudos fossem mais rápidos?

PONTO DE PARTIDA

A equação da onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- $y(x,t)$: perturbação do meio.
- É linear e de segunda ordem em t e em x .
- Precisa de duas condições iniciais: $y(x,0)$ e $\partial y / \partial t (x,0)$.



Perfil de uma corda num instante t .

ONDAS VIAJANTES

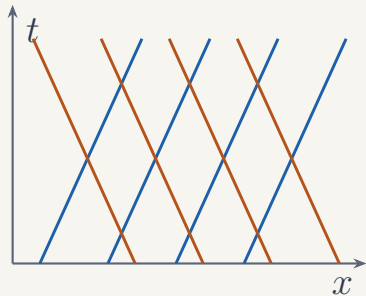
A solução geral

Com $\xi = x - vt$ e $\eta = x + vt$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Integrando (solução de d'Alembert):

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

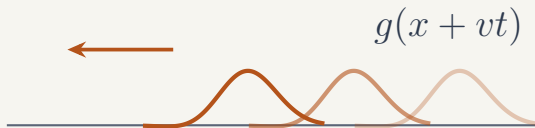
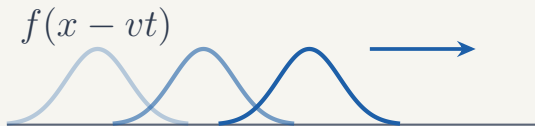


Rectas $x - vt$ constante (azul)
e $x + vt$ constante (laranja).

ONDAS VIAJANTES

Sentido de propagação

- Em $f(x - vt)$, um ponto do perfil mantém $x - vt$ constante: $dx/dt = +v$.
- Em $g(x + vt)$: $dx/dt = -v$.
- As duas partes são independentes.

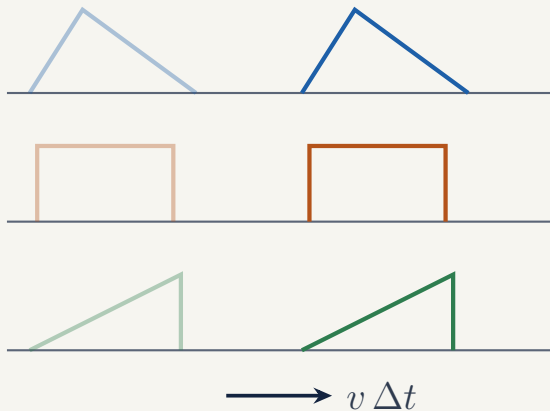


Três instantes igualmente espaçados.

ONDAS VIAJANTES

O perfil não se deforma

- A equação não impõe forma nenhuma ao perfil.
- Todos os pontos do perfil avançam com a mesma velocidade v .
- Por isso a forma conserva-se.



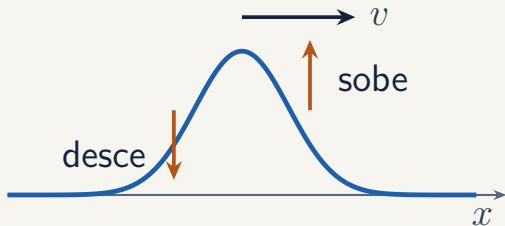
ONDAS VIAJANTES

Velocidade do meio e velocidade da onda

Para $y = f(x - vt)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x}$$

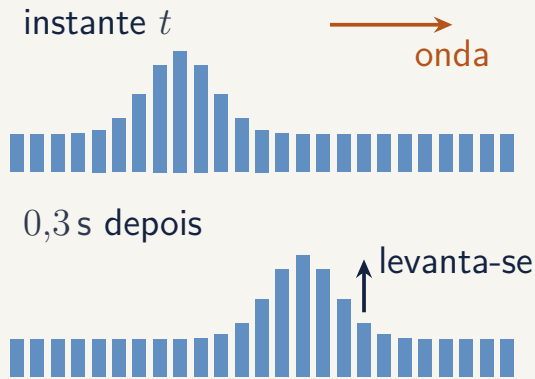
- A frente sobe e a traseira desce.
- O ponto mais inclinado é o mais rápido.
- v é a velocidade do perfil.



RESPOSTA

A onda num estádio

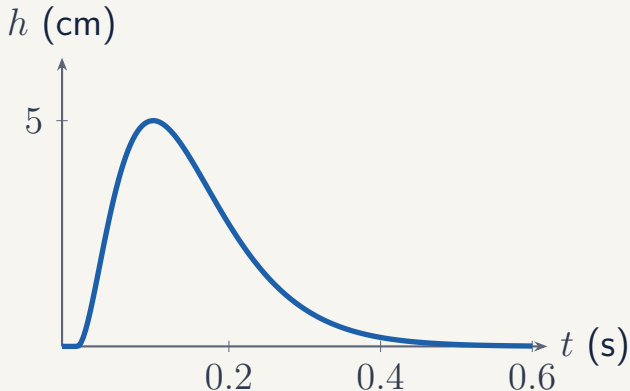
- Cada espectador só se levanta e se senta: é o meio.
- O que dá a volta é o padrão: é a onda.
- Cerca de 20 lugares por segundo: $v \approx 12 \text{ m s}^{-1}$.
- Um espectador move-se na vertical a cerca de 2 m s^{-1} .



ONDAS VIAJANTES

Uma onda gerada pela mão

- Uma mão segura a extremidade $x = 0$ de uma corda esticada e muito longa.
- A mão faz um só movimento: sobe depressa, desce devagar e fica parada.
- A altura da mão é $h(t)$.



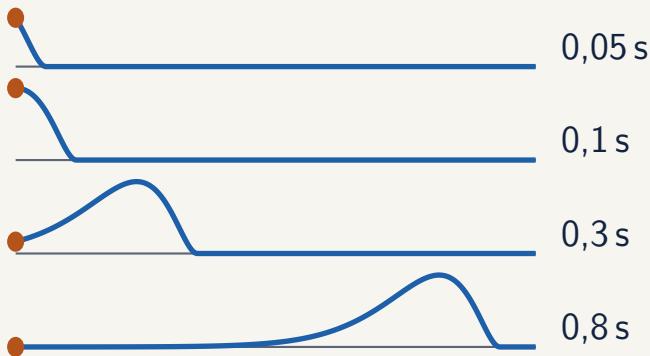
ONDAS VIAJANTES

A corda em quatro instantes

Cada ponto repete o movimento da mão, com atraso x/v :

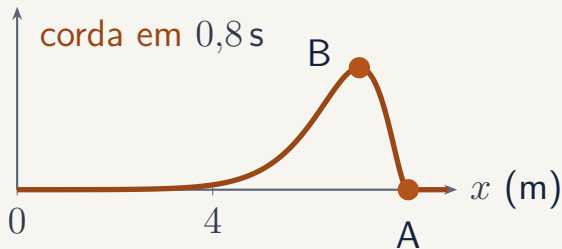
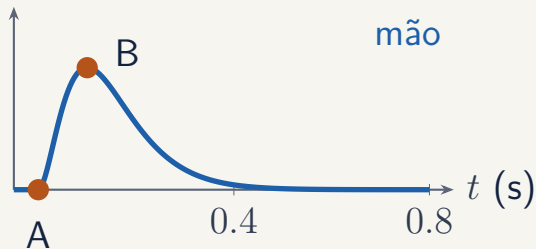
$$y(x,t) = h\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Aqui $v = 10 \text{ m s}^{-1}$. A mão está a laranja.



RESPOSTA

Do movimento da mão ao perfil da corda



- A: início do movimento, em $t = 0$. Já percorreu $v \times 0,8 \text{ s} = 8 \text{ m}$.
- B: máximo, em $t = 0,1 \text{ s}$. Percorreu só $v \times 0,7 \text{ s} = 7 \text{ m}$.
- Entre A e B cabe a subida rápida: a frente do impulso é íngreme.

ONDAS VIAJANTES

Condições iniciais

Dados o perfil inicial $y(x,0) = y_0(x)$ e a velocidade inicial $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = w_0(x)$:

$$y(x,t) = \frac{y_0(x - vt) + y_0(x + vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} w_0(x') dx'$$

- As condições iniciais fixam f e g de forma única.
- O valor em (x,t) só depende do que se passava entre $x - vt$ e $x + vt$.

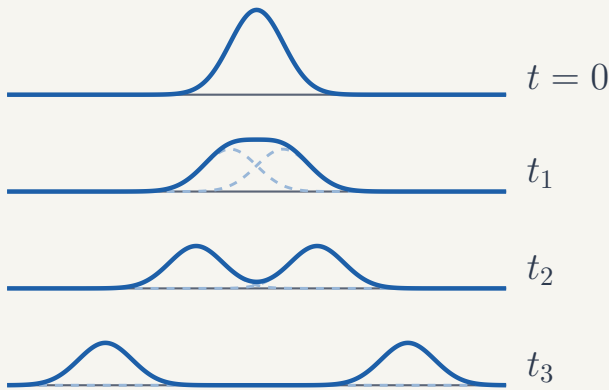
ONDAS VIAJANTES

Uma corda deformada e largada

Afasta-se a corda do equilíbrio, com o perfil $y_0(x)$, e larga-se sem velocidade ($w_0 = 0$):

$$y = \frac{1}{2}y_0(x-vt) + \frac{1}{2}y_0(x+vt)$$

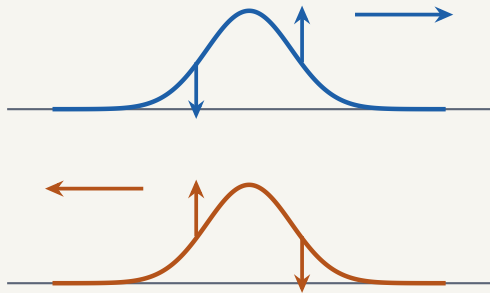
A deformação divide-se em dois impulsos com metade da altura, que se afastam com velocidade v .



ONDAS VIAJANTES

Porque é que a deformação se divide

- Para a direita:
 $\partial y / \partial t = -v \partial y / \partial x$.
- Para a esquerda:
 $\partial y / \partial t = +v \partial y / \partial x$.
- Com duas metades iguais, as velocidades anulam-se: a corda parte do repouso.



As duas metades em $t = 0$ e as respectivas velocidades.

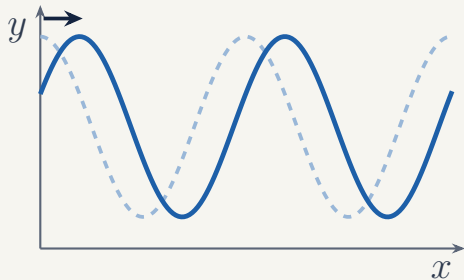
ONDAS HARMÔNICAS

A onda harmónica

$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \phi)$$

Como $\partial^2 y / \partial t^2 = -\omega^2 y$ e $\partial^2 y / \partial x^2 = -k^2 y$, a equação da onda dá $\omega^2 = v^2 k^2$:

$$\omega = v k$$



Instantes t (tracejado) e $t + \Delta t$.

ONDAS HARMÔNICAS

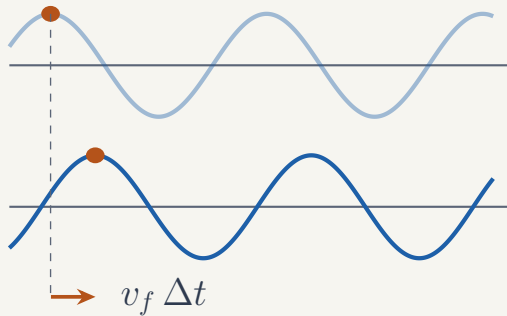
Fase e velocidade de fase

$$\Phi(x,t) = kx - \omega t + \phi$$

Uma crista mantém a fase constante e desloca-se com

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

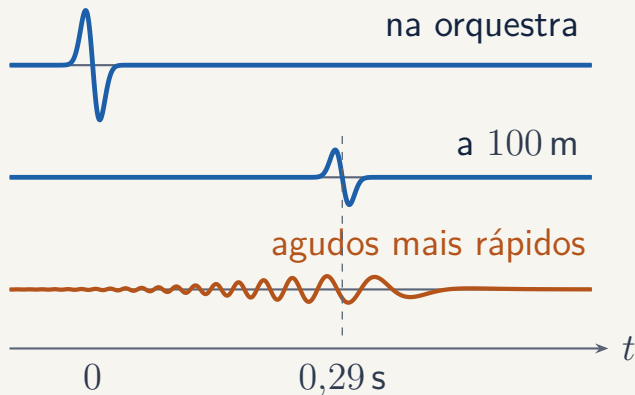
Aqui, $v_f = v$ para qualquer ω .



RESPOSTA

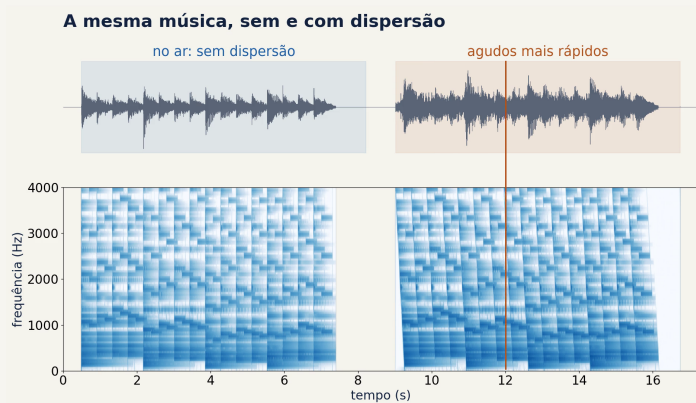
A orquestra ao longe

- O ataque de uma nota é curto: tem muitas frequências.
- Com $\omega = vk$, todas têm $v_f = v$: o ataque chega igual, só atrasado.
- Agudos mais rápidos chegariam primeiro: o ataque chegaria esticado.



RESPOSTA

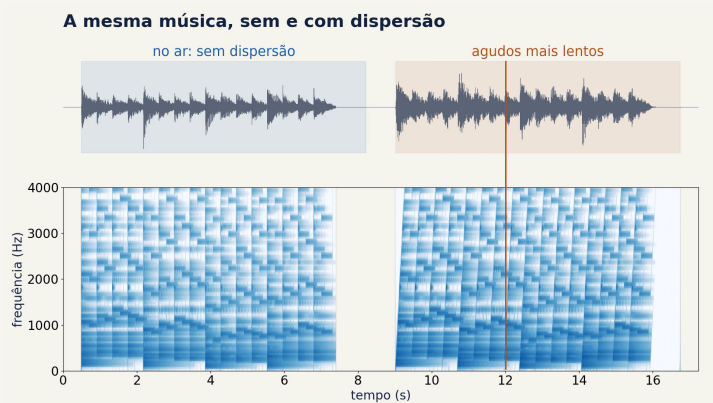
A mesma música com agudos mais rápidos



Primeiro sem dispersão; depois os agudos chegam antes.

RESPOSTA

A mesma música com agudos mais lentos



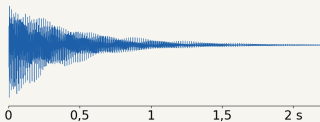
Agora os graves chegam primeiro.

RESPOSTA

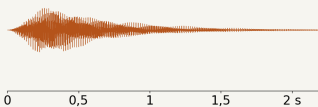
O ataque de um som

O mesmo som, com e sem ataque

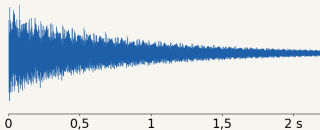
Acorde dedilhado: com ataque



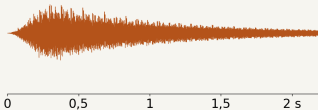
Acorde dedilhado: sem ataque



Sino: com ataque



Sino: sem ataque



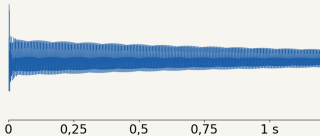
As mesmas notas, com e sem o início curto de cada som.

RESPOSTA

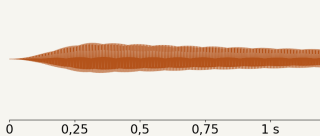
Dois instrumentos sem ataque

Dois instrumentos: com ataque distinguem-se, sem ataque quase não

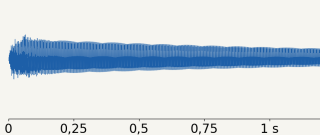
Instrumento percutido: com ataque



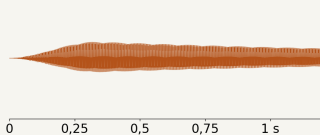
Instrumento percutido: sem ataque



Instrumento soprado: com ataque



Instrumento soprado: sem ataque



Com ataque distinguem-se; sem ataque ficam quase iguais.

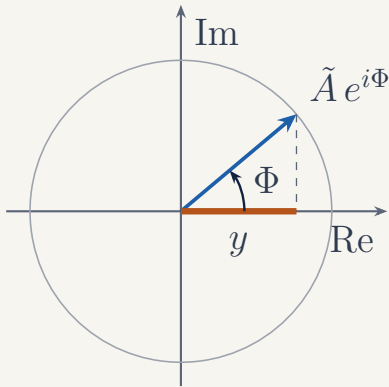
ONDAS HARMÔNICAS

Representação complexa

Pela fórmula de Euler,
 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$:

$$y = \operatorname{Re} \{ \tilde{A} e^{i(kx - \omega t)} \}, \quad \tilde{A} = A e^{i\phi}$$

- $|\tilde{A}|$ é a amplitude e $\arg \tilde{A}$ a fase inicial.
- A grandeza física é a parte real.



ONDAS HARMÔNICAS

Porque se usam números complexos

Com $\tilde{y} = \tilde{A} e^{i(kx - \omega t)}$, derivar é multiplicar:

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = ik \tilde{y}, \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = -i\omega \tilde{y}$$

A equação fica algébrica:

$$(-i\omega)^2 = v^2 (ik)^2 \implies \omega^2 = v^2 k^2$$

- Ao derivar, senos e co-senos trocam entre si; a exponencial não.
- Como a equação é linear e real, a parte real de uma solução complexa também é solução.
- No fim, toma-se a parte real.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Uma corda longa ($\mu = 5,0 \text{ g m}^{-1}$, $F_T = 80 \text{ N}$) é afastada do equilíbrio com o perfil $y_0(x) = a e^{-x^2/b^2}$ ($a = 4,0 \text{ mm}$, $b = 2,0 \text{ cm}$) e largada sem velocidade.

- (a) Calcule a velocidade de propagação.
- (b) Escreva $y(x,t)$ para $t > 0$.
- (c) Quando estão os centros dos impulsos a $1,0 \text{ m}$ um do outro?
- (d) Após a separação, qual é a velocidade máxima da corda?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $v = \sqrt{F_T/\mu} = \sqrt{80/5,0 \times 10^{-3}} = 126 \text{ m s}^{-1}$

(b) Parte do repouso, logo

$$y(x,t) = \frac{a}{2} e^{-(x-vt)^2/b^2} + \frac{a}{2} e^{-(x+vt)^2/b^2}$$

(c) Os centros estão em $\pm vt$: $2vt = 1,0 \text{ m}$, logo $t = 4,0 \text{ ms}$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(d) Para o impulso que vai para a direita, com $u = x - vt$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x} = v \frac{a u}{b^2} e^{-u^2/b^2}$$

O máximo é em $u = b/\sqrt{2}$, o ponto de maior inclinação:

$$\left| \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{\max} = \frac{v a}{\sqrt{2e} b} = 11 \text{ m s}^{-1}$$

Cerca de 12 vezes menos do que a velocidade da onda.

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Num laboratório, um motor com um excêntrico move a extremidade $x = 0$ de uma corda muito longa segundo $y(0,t) = A \sin \omega t$, a partir de $t = 0$. Antes, a corda está em repouso. Dados: $A = 5,0 \text{ mm}$, $f = 20 \text{ Hz}$, $F_T = 50 \text{ N}$, $\mu = 5,0 \text{ g m}^{-1}$.

- (a) Calcule v , k e λ .
- (b) Escreva a onda nas formas real e complexa.
- (c) Descreva o movimento do ponto $x = 12,5 \text{ m}$ desde $t = 0$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) $v = \sqrt{F_T/\mu} = 100 \text{ m s}^{-1}, \quad \lambda = v/f = 5,0 \text{ m}$
 $k = 2\pi/\lambda = 1,26 \text{ rad m}^{-1}$

(b) Com $y = h(t - x/v)$ e $\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2)$:

$$y = A \sin(\omega t - kx) = A \cos(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}) = \text{Re} \{ iA e^{i(kx - \omega t)} \}$$

A amplitude complexa é $\tilde{A} = iA$: a fase inicial é $\pi/2$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(c) A perturbação chega ao ponto ao fim de $x/v = 0,125$ s.

- Para $t < 0,125$ s, o ponto está parado.
- Depois, com $\omega \times 0,125 \text{ s} = 5\pi$:

$$y(12,5 \text{ m}, t) = A \sin(\omega t - 5\pi) = -A \sin \omega t$$

O ponto oscila em oposição de fase com a extremidade: está a $2,5 \lambda$ dela.

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Cada batimento cardíaco lança uma onda de pressão ao longo das artérias. A diferença entre os percursos até à carótida e até à femoral é $d = 0,55 \text{ m}$, e a onda chega à femoral 75 ms depois.

- (a) Calcule a velocidade da onda de pulso.
- (b) Com artérias mais rígidas, $v = 12 \text{ m s}^{-1}$. Qual é o novo atraso?
- (c) Na carótida, a pressão sobe do mínimo ao máximo em $0,10 \text{ s}$. Que comprimento de artéria ocupa essa subida?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) $v = d/\Delta t = 0,55/0,075 = 7,3 \text{ m s}^{-1}$

(b) $\Delta t = d/v = 0,55/12 = 46 \text{ ms}$

(c) Como $p = h(t - x/v)$, uma duração τ no tempo ocupa $v\tau$ no espaço:

$$L = v\tau = 7,3 \times 0,10 = 0,73 \text{ m}$$

É mais do que d : a subida começa na femoral antes de terminar na carótida.