

Ondas planas, cilíndricas e esféricas

A geometria das frentes de onda



Três perguntas

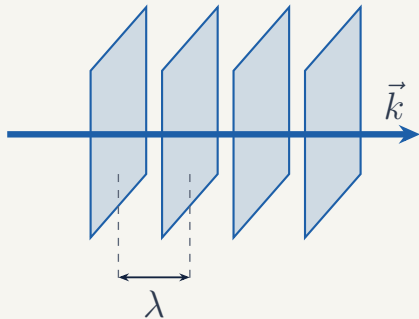
- Porque é que a ondulação chega à praia com cristas quase rectas e paralelas?
- De olhos fechados, sabemos de que lado vem um som. Como é que o cérebro o consegue, se cada ouvido só mede a pressão num ponto?
- Nos navios antigos, falava-se da ponte para a casa das máquinas através de um simples tubo. Porque é que a voz chegava quase sem enfraquecer?

ONDA PLANA

Frentes de onda planas

$$\psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)$$

- Frentes: planos perpendiculares a $\vec{k}$.
- Amplitude igual em todo o espaço.



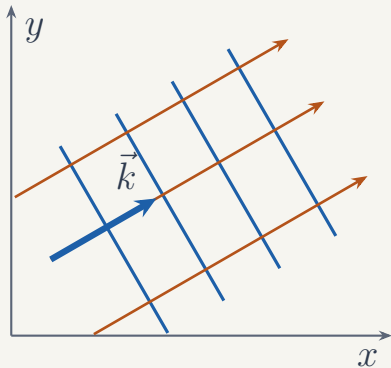
ONDA PLANA

O vector de onda

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Aponta no sentido de propagação.
- Pode ter qualquer direcção:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$



Frentes (azul) e raios (laranja).

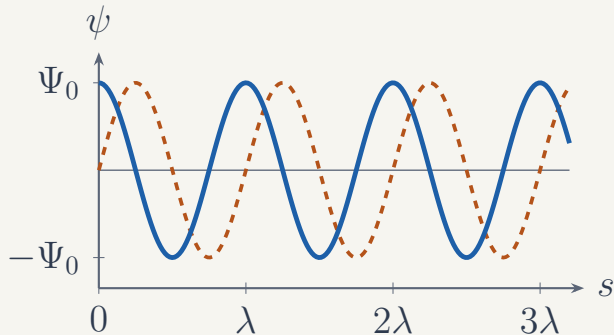
ONDA PLANA

Perfil ao longo de $\vec{k}$

Ao longo de $\vec{k}$, com coordenada s :

$$\psi = \Psi_0 \cos(ks - \omega t + \phi_0)$$

- É a onda harmónica em 1D.
- Avança com $v = \omega/k$.



Tracejado: $t = T/4$.

ONDA PLANA

A onda plana satisfaz a equação da onda

Em três dimensões:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Na onda plana, $\nabla^2 \psi = -k^2 \psi$ e $\partial^2 \psi / \partial t^2 = -\omega^2 \psi$:

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{v}$$

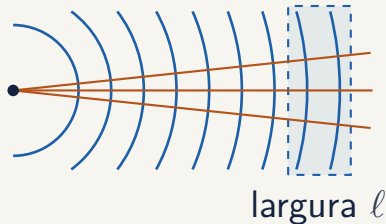
- A direcção de $\vec{k}$ é livre.
- Só o módulo de $\vec{k}$ fica fixado pela frequência.

ONDA PLANA

Uma fonte distante

- Uma fonte pontual emite frentes esféricas.
- Longe da fonte, o raio R das frentes é enorme.
- Numa região de largura ℓ , a frente é quase um plano.

Quanto se afasta a frente do plano?



ONDA PLANA

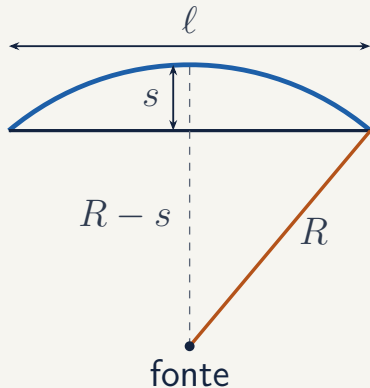
Quanto se afasta a frente do plano

Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo da figura:

$$s = R - \sqrt{R^2 - (\ell/2)^2} = R \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{4R^2}} \right]$$

Como $\ell \ll R$, usa-se $\sqrt{1 - \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon/2$:

$$s \approx R \frac{\ell^2}{8R^2} = \frac{\ell^2}{8R}$$

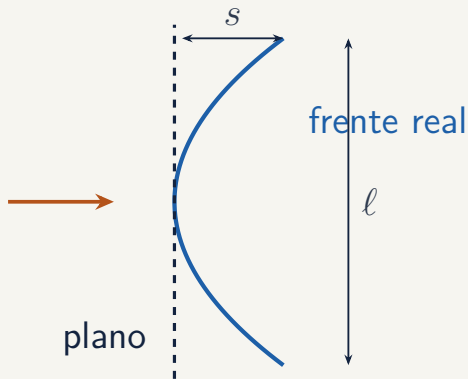


ONDA PLANA

O erro de fase nas bordas

- Um receptor de largura ℓ recebe a frente curva.
- Nas bordas, a frente está s atrás do plano.
- Um atraso de caminho s é uma diferença de fase:

$$\Delta\Phi = k s = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\ell^2}{8R}$$



ONDA PLANA

Quando se pode tratar a onda como plana

- $\Delta\Phi \ll 2\pi$: todo o receptor vê a mesma fase.

- $\Delta\Phi \sim \pi$: a aproximação falha.

Com $\Delta\Phi < \pi/4$, isto é, $s < \lambda/8$:

$$R \gg \frac{\ell^2}{\lambda}$$

- Receptor maior: é preciso estar muito mais longe (ℓ^2).
- λ menor: a exigência é maior.
- O limite exacto é convenção; conta a escala ℓ^2/λ .

RESPOSTA

A ondulação chega com cristas rectas

Tempestade a $R = 1500$ km, praia com $\ell = 1$ km:

$$s = \frac{\ell^2}{8R} = \frac{(10^3)^2}{8 \times 1,5 \times 10^6} \approx 8 \text{ cm}$$

- Em 1 km, a crista desvia-se só 8 cm: ao largo, as cristas são rectas.
- Falta explicar porque ficam paralelas à praia.



ONDA PLANA

Outros exemplos de ℓ^2/λ

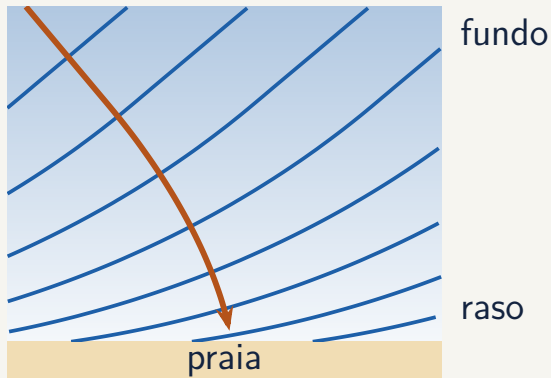
	ℓ	λ	ℓ^2/λ	distância real
Praia	1 km	150 m	7 km	1500 km
Telescópio	1 m	500 nm	2000 km	estrelas: anos-luz
Microfone	2 cm	34 cm	1 mm	alguns cm

Nos três casos $R \gg \ell^2/\lambda$: a onda chega como plana.

RESPOSTA

As cristas rodam junto à costa

- Em água pouco funda, $v \approx \sqrt{gh}$: a onda é mais lenta onde é menos funda.
- Numa crista oblíqua, a parte mais perto da costa atrasa-se.
- A crista roda; a direcção de propagação (laranja) curva para a costa.



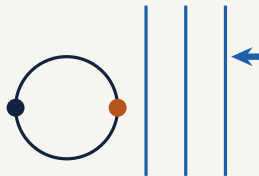
RESPOSTA

Como sabemos de onde vem um som

- Fonte distante: as frentes chegam planas à cabeça.
- Em frente: a frente chega aos dois ouvidos ao mesmo tempo.
- Ao lado: chega primeiro ao ouvido mais próximo (laranja).
- O cérebro mede esse atraso Δt .



em frente



ao lado

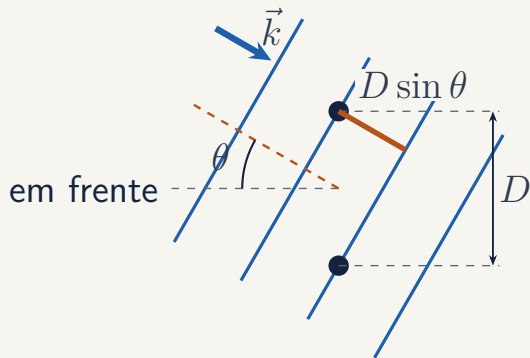
RESPOSTA

O atraso entre os dois ouvidos

θ : ângulo entre a direcção em frente e a direcção de onde vem o som; D : distância entre os ouvidos.

O ouvido mais afastado está $D \sin \theta$ mais longe:

$$\Delta t = \frac{D \sin \theta}{v}$$



RESPOSTA

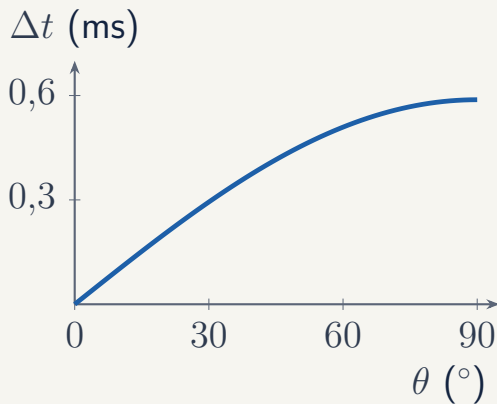
O atraso máximo

O atraso é máximo com a fonte de lado, $\theta = 90^\circ$:

$$\Delta t_{\max} = \frac{D}{v}$$

Com $D \approx 0,2 \text{ m}$ e $v \approx 340 \text{ m s}^{-1}$:

$$\Delta t_{\max} \approx \frac{0,2}{340} \text{ s} \approx 0,6 \text{ ms}$$



RESPOSTA

Onde está a fonte e com que precisão

Duas grandezas diferentes:

- θ : **onde está a fonte**, medido a partir da direcção em frente.
- $\delta\theta$: **a menor variação de direcção que o ouvido detecta**, isto é, o menor ângulo entre duas fontes que ainda se distinguem.

Mudar a direcção da fonte de $\delta\theta$ muda o atraso de

$$\delta t = \frac{d(\Delta t)}{d\theta} \delta\theta = \frac{D \cos \theta}{v} \delta\theta \quad \Rightarrow \quad \delta\theta = \frac{v \delta t}{D \cos \theta}$$

RESPOSTA

Que precisão consegue o ouvido

O cérebro detecta diferenças de tempo até $\delta t \approx 10 \mu\text{s}$.

Para uma fonte em frente, $\cos \theta = 1$:

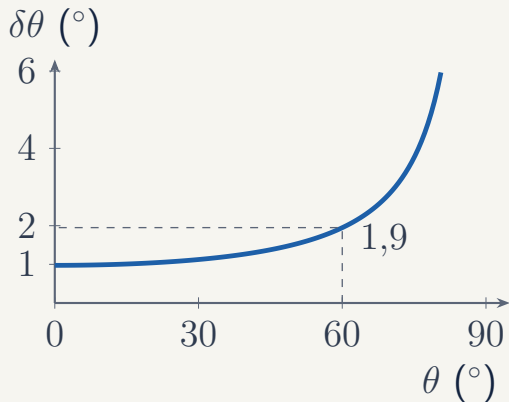
$$\delta\theta = \frac{v \delta t}{D} = \frac{340 \times 10 \times 10^{-6}}{0,2} \approx 0,017 \text{ rad} \approx 1^\circ$$

Duas fontes à nossa frente separadas por cerca de 1° já são ouvidas em direcções diferentes.

Valor medido (ângulo mínimo audível, em frente): 1 a 2 graus.

RESPOSTA

A precisão depende da direcção



- Em frente: precisão máxima, $\approx 1^\circ$.
- De lado, $\cos \theta \approx 0$: Δt quase não muda; precisão má.
- Frente e trás dão o mesmo Δt .

Por isso viramos a cabeça.

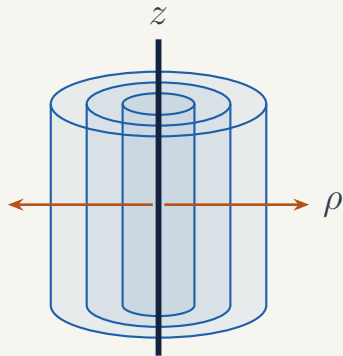
ONDA CILÍNDRICA

Frentes de onda cilíndricas

Fonte linear longa, segundo z :

$$\psi(\rho, t) = F(\rho) \cos(k\rho - \omega t + \phi_0)$$

- ρ : distância ao eixo.
- Frentes: cilindros $\rho = \text{const.}$

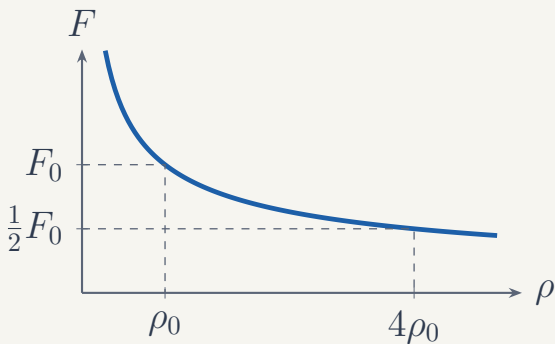


ONDA CILÍNDRICA

Como diminuir a amplitude

- Como num oscilador, a energia é proporcional a F^2 .
- Por segundo, a mesma energia atravessa cada cilindro, de área $2\pi\rho L$.

$$F^2 2\pi\rho L = \text{const} \Rightarrow F \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$



Quadruplicar ρ reduz F a metade.

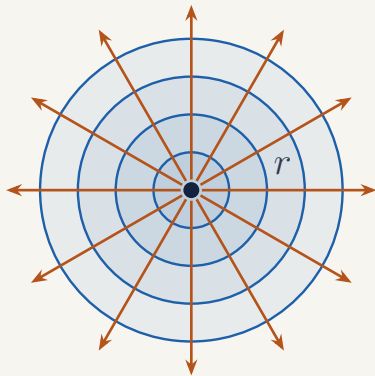
ONDA ESFÉRICA

Frentes de onda esféricas

Fonte pontual, igual em todas as direcções:

$$\psi(r,t) = F(r) \cos(kr - \omega t + \phi_0)$$

- Frentes: esferas $r = \text{const.}$
- $kr - \omega t$: diverge; $kr + \omega t$: converge.



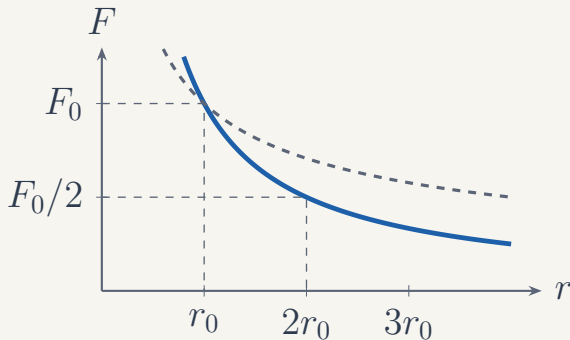
ONDA ESFÉRICA

Como diminui a amplitude

A mesma energia por segundo atravessa todas as esferas, de área $4\pi r^2$:

$$F^2 \times 4\pi r^2 = \text{const}$$

$$F(r) \propto \frac{1}{r}$$



Tracejado: onda cilíndrica.

ONDA ESFÉRICA

A onda esférica é solução

Com simetria esférica,
 $\nabla^2\psi = \frac{1}{r} \partial_r^2(r\psi)$, e $r\psi$ obedece à
equação em 1D:

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2}$$

$$\psi(r,t) = \frac{f(r - vt)}{r} + \frac{g(r + vt)}{r}$$

- O factor $1/r$ resulta directamente da equação.
- f : onda que diverge da fonte.
- g : onda que converge para um foco.

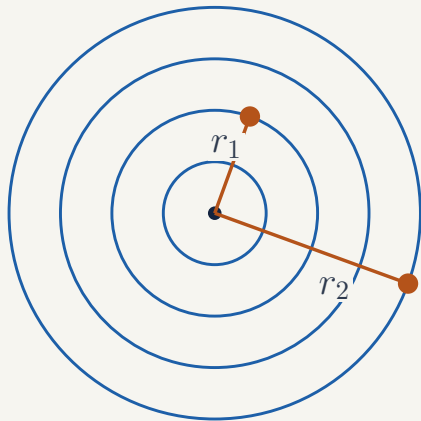
ONDA ESFÉRICA

Fase e distância à fonte

Na onda esférica, num instante fixo, a fase é

$$\Phi(r) = kr - \omega t$$

- Todos os pontos à mesma distância r têm a mesma fase.
- Cada comprimento de onda λ soma 2π à fase.



Cristas separadas de λ .

ONDA ESFÉRICA

Dois pontos a distâncias diferentes

A diferença de fase entre dois pontos a distâncias r_1 e r_2 da fonte é

$$\Delta\Phi = k(r_2 - r_1) = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

- $r_2 - r_1 = \lambda, 2\lambda, \dots$: oscilam em fase.
- $r_2 - r_1 = \lambda/2, 3\lambda/2, \dots$: oscilam em oposição de fase.

O ponto mais afastado repete o movimento do outro, com atraso

$$\Delta t = \frac{r_2 - r_1}{v}$$

SÍNTESE

Comparação das três geometrias

	Plana	Cilíndrica	Esférica
Fonte	distante ou extensa	linear	pontual
Frentes	planos	cilindros	esferas
Fase	$\vec{k} \cdot \vec{r}$	$k\rho$	kr
Amplitude	constante	$\propto 1/\sqrt{\rho}$	$\propto 1/r$

RESPOSTA

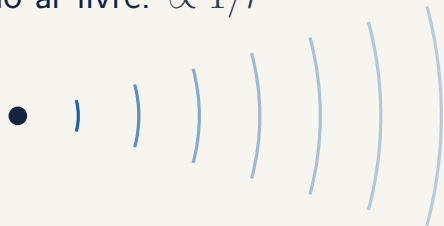
A voz num tubo

- No tubo, a onda não se pode espalhar: é plana e a amplitude mantém-se.
- Ao ar livre, a onda é esférica: a 30 m, a amplitude é 30 vezes menor do que a 1 m.
- O estetoscópio usa o mesmo princípio.

no tubo: amplitude constante



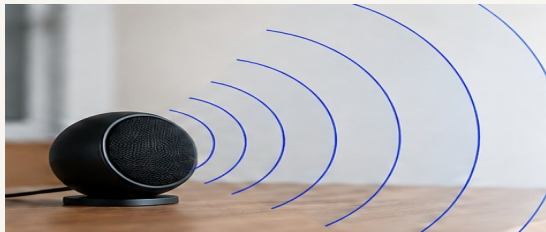
ao ar livre: $\propto 1/r$



SÍNTESE

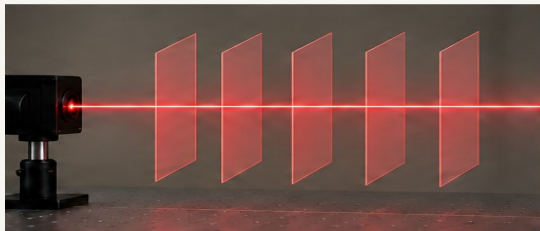
Fontes reais

Fonte pequena: $D \ll \lambda$



Um altifalante de 10 cm a 200 Hz ($\lambda \approx 1,7\text{ m}$) emite frentes quase esféricas.

Fonte extensa: $D \gg \lambda$



Um feixe laser com 1 mm de largura tem frentes quase planas ao longo de metros.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Uma onda plana harmónica propaga-se no plano xy , numa direcção que faz 30° com o eixo x . Tem $\lambda = 0,80 \text{ m}$, $f = 5,0 \text{ Hz}$ e amplitude $2,0 \text{ cm}$, com fase nula na origem em $t = 0$.

- (a) Calcule as componentes de $\vec{k}$ e v .
- (b) Escreva $\psi(x,y,t)$.
- (c) Calcule a diferença de fase entre a origem e $(0,40 \text{ m}, 0,30 \text{ m})$.
- (d) Com que velocidade avança a fase ao longo de x ? E de y ?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $k = 2\pi/\lambda = 7,85 \text{ rad m}^{-1}, \quad v = \lambda f = 4,0 \text{ m s}^{-1}$

$$k_x = k \cos 30^\circ = 6,80 \text{ rad m}^{-1}, \quad k_y = k \sin 30^\circ = 3,93 \text{ rad m}^{-1}$$

(b)

$$\psi = 0,020 \cos(6,80 x + 3,93 y - 10\pi t) \quad (\text{SI})$$

(c) $\Delta\Phi = k_x x + k_y y = 2,72 + 1,18 = 3,90 \text{ rad}$

Um pouco mais do que π : quase em oposição de fase.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(d) Ao longo de x (y fixo), a fase é constante se $k_x dx = \omega dt$:

$$v_x = \frac{\omega}{k_x} = \frac{31,4}{6,80} = 4,6 \text{ m s}^{-1}, \quad v_y = \frac{\omega}{k_y} = 8,0 \text{ m s}^{-1}$$

Ambas são maiores do que $v = 4,0 \text{ m s}^{-1}$. São intersecções de uma frente com um eixo, não o movimento de energia: a onda propaga-se segundo $\vec{k}$, com v .

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Numa fábrica vibram uma tubagem muito longa (fonte linear) e uma bomba compacta (fonte pontual). A 2,0 m de cada uma, as amplitudes são iguais.

- (a) Calcule, para cada fonte, a razão das amplitudes a 8,0 m e a 2,0 m.
- (b) A que distância cai cada amplitude para 10 %?
- (c) A tubagem tem 40 m: é linear até 20 m e pontual depois. Qual é a amplitude relativa a 200 m?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) Fonte linear: $F \propto 1/\sqrt{\rho}$, logo $\sqrt{2/8} = 0,50$.

Fonte pontual: $F \propto 1/r$, logo $2/8 = 0,25$.

(b) Fonte linear: $\sqrt{2/\rho} = 0,10$, $\rho = 200$ m.

Fonte pontual: $2/r = 0,10$, $r = 20$ m.

A fonte linear faz-se sentir dez vezes mais longe.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(c) Em duas etapas:

- de 2 m a 20 m, como cilíndrica: $\sqrt{2/20} = 0,32$;
- de 20 m a 200 m, como esférica: $20/200 = 0,10$.

$$\frac{F(200 \text{ m})}{F(2 \text{ m})} = 0,32 \times 0,10 = 0,032$$

Cerca de três vezes menos do que previa o modelo de fonte linear infinita.

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Na elastografia, uma excitação ao longo de uma linha no fígado gera ondas de corte cilíndricas, com $v = \sqrt{\mu/\rho}$ e $\rho = 1060 \text{ kg m}^{-3}$. Num fígado são, a 100 Hz, $v = 2,0 \text{ m s}^{-1}$.

- (a) Calcule λ e a diferença de fase entre 5,0 mm e 15 mm da linha.
- (b) Qual é a razão das amplitudes nesses pontos?
- (c) Num fígado fibrótico, a fase varia π entre 5 mm e 25 mm. Compare μ nos dois casos.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) $\lambda = v/f = 2,0 \text{ cm}, \quad k = 2\pi/\lambda = 314 \text{ rad m}^{-1}$

$$\Delta\Phi = k \Delta\rho = 314 \times 0,010 = 3,14 \text{ rad} = \pi$$

Os dois pontos oscilam em oposição de fase.

(b)

$$\frac{F(15 \text{ mm})}{F(5 \text{ mm})} = \sqrt{\frac{5}{15}} = 0,58$$

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(c) Agora $\lambda/2 = 20 \text{ mm}$, logo $\lambda = 4,0 \text{ cm}$ e $v = \lambda f = 4,0 \text{ m s}^{-1}$.

$$\mu = \rho v^2 : \quad \mu_{\text{são}} = 4,2 \text{ kPa}, \quad \mu_{\text{fibrótico}} = 17 \text{ kPa}$$

Duplicar v quadruplica μ : medir a fase ao longo de ρ dá a rigidez do tecido.