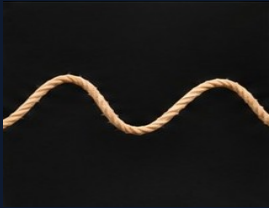


Energia transportada por uma onda

Densidade de energia, fluxo e intensidade



Três perguntas

- Uma onda leva energia de uma ponta à outra de uma corda, mas a corda não sai do sítio. Como é possível?
- Em alto mar, um tsunami tem cerca de um metro de altura e passa despercebido a um barco. Porque chega à costa com vários metros?
- Cada metro quadrado da Terra virado para o Sol recebe cerca de 1,4 kW. Quanta potência emite o Sol no total?

ENERGIA ARMAZENADA

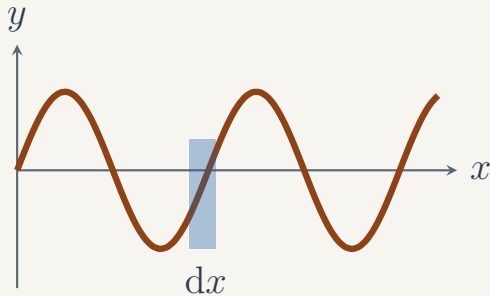
Densidade de energia

Energia por unidade de volume:

$$u(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta V} \quad (\text{J m}^{-3})$$

Numa corda, por unidade de comprimento:

$$u(x, t) = \frac{dE}{dx} \quad (\text{J m}^{-1})$$



ENERGIA ARMAZENADA

Energia de uma onda numa corda

Corda com densidade μ e tensão F_T :

Energia cinética

$$dE_c = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx$$

Energia potencial

$$dU = \frac{1}{2} F_T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} F_T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

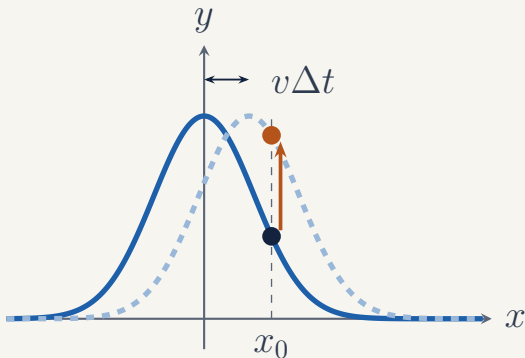
ENERGIA ARMazenada

A velocidade de um ponto da corda

Em Δt , o perfil avança $v\Delta t$. O ponto em x_0 passa a ter a altura que o perfil tinha $v\Delta t$ atrás:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x}$$

O ponto move-se mais depressa onde o perfil é mais íngreme; nas cristas, está parado.



Cheio: instante t ; tracejado: $t + \Delta t$.

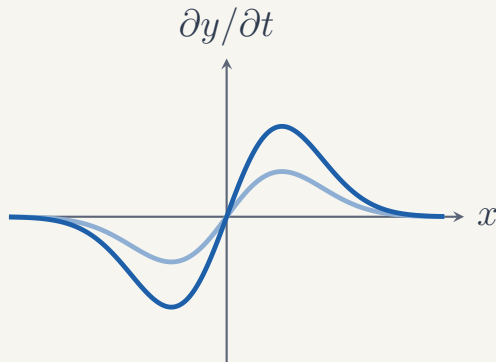
ENERGIA ARMAZENADA

Energia cinética e velocidade do perfil

Substituindo na energia cinética:

$$u_c = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

O mesmo perfil a passar com $2v$ (curva escura) obriga cada ponto a mover-se duas vezes mais depressa: u_c quadruplica.



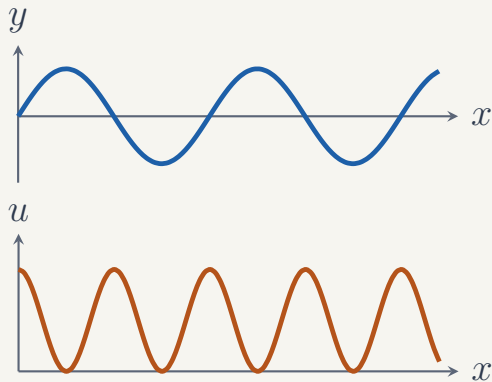
ENERGIA ARMAZENADA

Numa onda progressiva, $E_c = U$

Com $\partial y / \partial t = -v \partial y / \partial x$ e $\mu v^2 = F_T$:

$$\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} F_T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

- Num oscilador, E_c e U alternam.
- Na onda, são máximas ao mesmo tempo, onde $y = 0$.



ENERGIA ARMAZENADA

Densidade de energia média

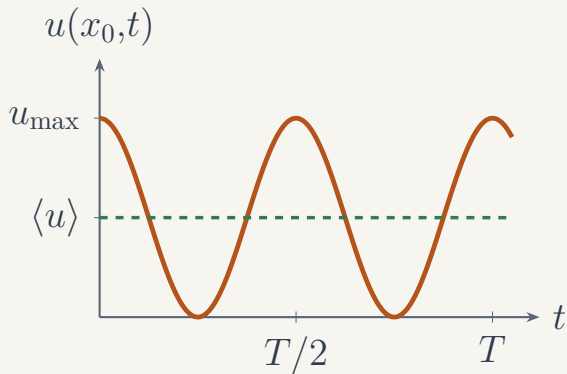
Para $y = A \sin(kx - \omega t)$:

$$u = \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Como $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2$$

Proporcional a A^2 e a ω^2 .



ENERGIA ARMazenada

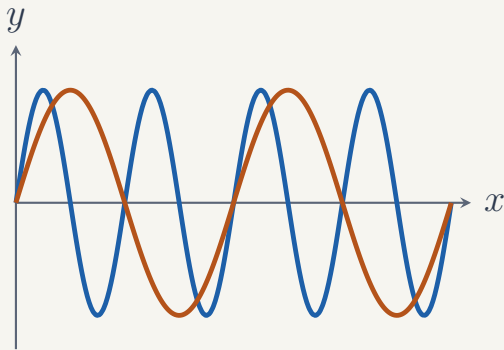
Mesmo perfil ou mesma oscilação?

Com ω e A fixos, cada ponto atinge ωA , qualquer que seja v .

Com $2v$ (laranja), λ duplica e a inclinação cai para metade:

$$\langle u_c \rangle = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2$$

Não depende de v .

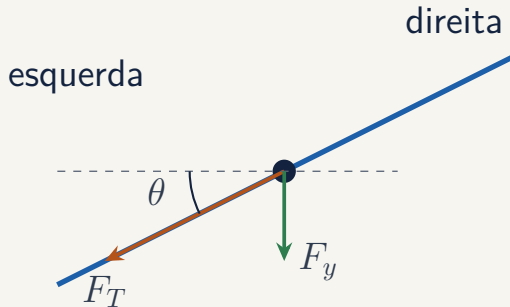


FLUXO E POTÊNCIA

A força entre dois troços da corda

- A parte da esquerda puxa a da direita com a tensão F_T , ao longo da corda.
- Ângulo pequeno:
 $\sin \theta \approx \tan \theta = \partial y / \partial x$.

$$F_y = -F_T \sin \theta \approx -F_T \frac{\partial y}{\partial x}$$



FLUXO E POTÊNCIA

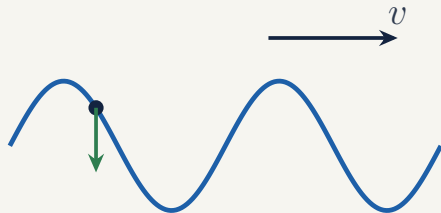
Potência transportada numa corda

Potência = força $\times$ velocidade:

$$P = F_y \frac{\partial y}{\partial t} = -F_T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Onda progressiva: $\partial y / \partial x = -\frac{1}{v} \partial y / \partial t$,
e $F_T = \mu v^2$:

$$P = \mu v \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \geq 0$$

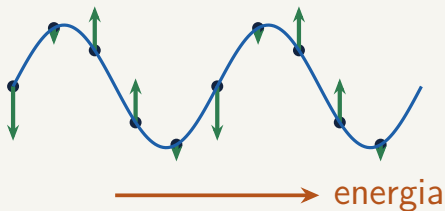


Atrás da crista, a corda desce:
força e velocidade têm o
mesmo sinal.

RESPOSTA

A energia avança, a corda não

- Cada troço só sobe e desce, mas empurra o troço seguinte.
- Força transversal $\times$ velocidade transversal: é trabalho feito sobre o vizinho.
- Esse trabalho passa de troço em troço: a energia avança com v , a matéria fica no sítio.



Os pontos só se movem na vertical.

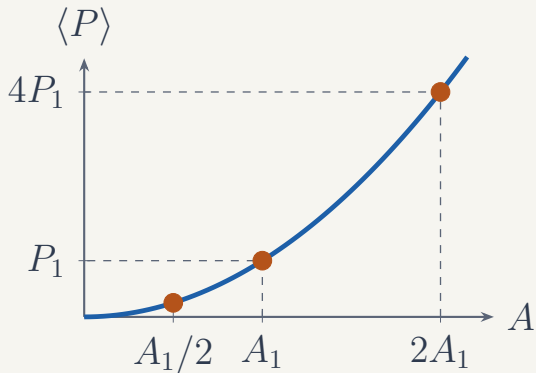
FLUXO E POTÊNCIA

Potência média

Para uma onda harmónica:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 = v \langle u \rangle$$

- A energia avança com a velocidade da onda.
- Duplicar A quadruplica $\langle P \rangle$.



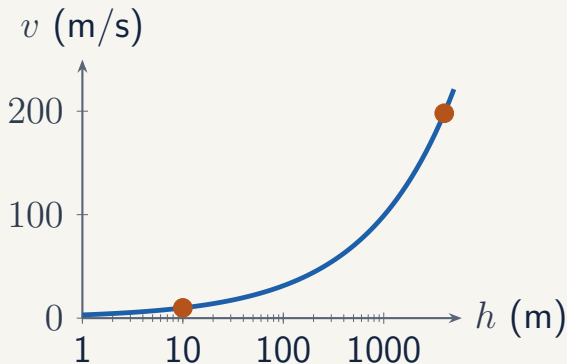
RESPOSTA

O tsunami abranda junto à costa

Um tsunami tem λ de centenas de km, muito maior do que a profundidade h . A velocidade só depende de h :

$$v \approx \sqrt{g h}$$

Ao largo, 200 m s^{-1} ; na costa, 10 m s^{-1} .



RESPOSTA

A potência transportada conserva-se

Energia por unidade de área da superfície: $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \rho g A^2$, independente de h . Por metro de crista:

$$\langle P \rangle = v \langle u \rangle = \frac{1}{2} \rho g A^2 v$$

Sem perdas, a mesma potência passa ao largo (1) e junto à costa (2):

$$\frac{1}{2} \rho g A_1^2 v_1 = \frac{1}{2} \rho g A_2^2 v_2 \implies A_2 = A_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}$$

A onda abranda: a mesma energia concentra-se e A cresce.

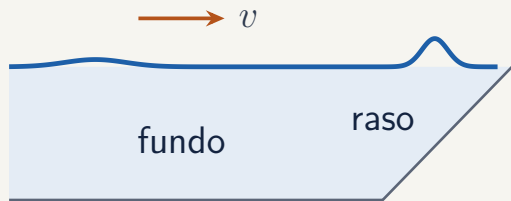
RESPOSTA

Um metro ao largo, metros na costa

Com $A_1 = 1 \text{ m}$ e $v_1/v_2 = 200/10$:

$$A_2 = 1 \times \sqrt{\frac{200}{10}} = \sqrt{20} \approx 4,5 \text{ m}$$

- O período não muda: $\lambda = vT$ encurta 20 vezes.
- Ao largo, a subida estende-se por dezenas de km.



A onda abranda, encurta e cresce.

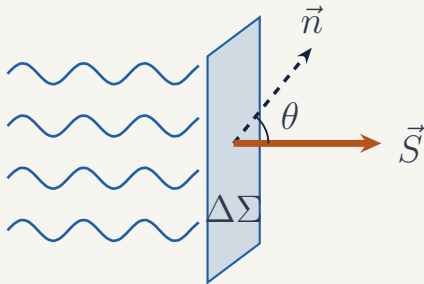
FLUXO E POTÊNCIA

Vector fluxo de energia

Em três dimensões, $\vec{S}(\vec{r}, t)$ aponta no sentido em que a energia flui:

$$\vec{S} \cdot \vec{n} = \lim \frac{\Delta E}{\Delta \Sigma \Delta t} \quad (\text{W m}^{-2})$$

- $\vec{n}$: normal unitária à superfície.
- Só a componente de $\vec{S}$ segundo $\vec{n}$ atravessa a superfície.



FLUXO E POTÊNCIA

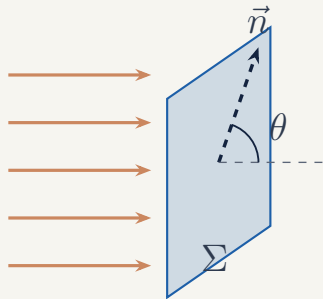
Potência através de uma superfície

$$P = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$$

Se $\vec{S}$ é uniforme e Σ é plana:

$$P = S \Sigma \cos \theta$$

Nula se $\vec{S}$ for paralelo à superfície.



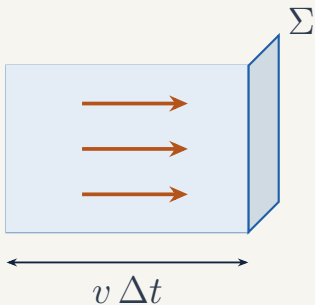
FLUXO E POTÊNCIA

Intensidade

Potência média por unidade de área perpendicular à propagação:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = v \langle u \rangle \quad (\text{W m}^{-2})$$

- $\vec{S}$ oscila; I é constante.
- Numa corda não há área: o equivalente é $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2$.



Em Δt atravessa Σ a energia do volume $\Sigma v \Delta t$.

FLUXO E POTÊNCIA

Intensidade longe de uma fonte

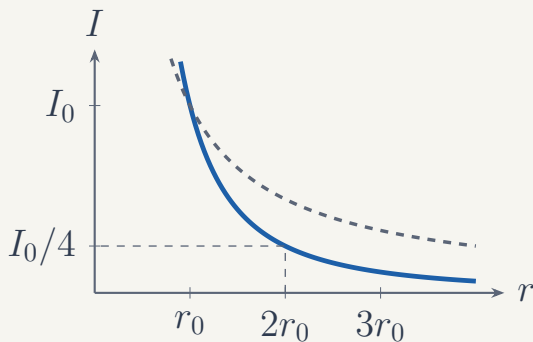
A potência P da fonte atravessa todas as superfícies que a envolvem.

Fonte pontual

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Fonte linear de comprimento L

$$I(\rho) = P/(2\pi\rho L)$$



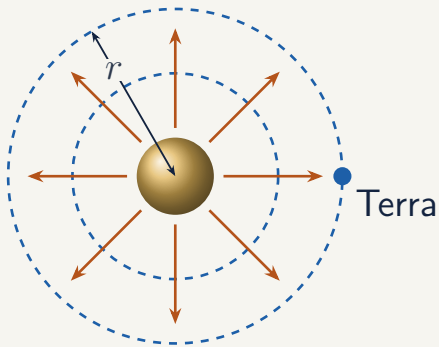
Tracejado: fonte linear.

RESPOSTA

A potência atravessa cada esfera

- O Sol emite P em todas as direcções.
- Sem perdas, a mesma P atravessa qualquer esfera centrada no Sol.
- Na esfera da Terra, de raio r , mede-se I :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \implies P = 4\pi r^2 I$$



RESPOSTA

A potência do Sol

Com $r = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ e $I = 1,4 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$:

$$4\pi r^2 = 4\pi (1,5 \times 10^{11})^2 \approx 2,8 \times 10^{23} \text{ m}^2$$

$$P = 2,8 \times 10^{23} \times 1,4 \times 10^3 \approx 4 \times 10^{26} \text{ W}$$

- A Terra intercepta só $\pi R_T^2 / 4\pi r^2 \approx 5 \times 10^{-10}$ dessa potência.
- Uma medição na Terra dá a potência total do Sol.

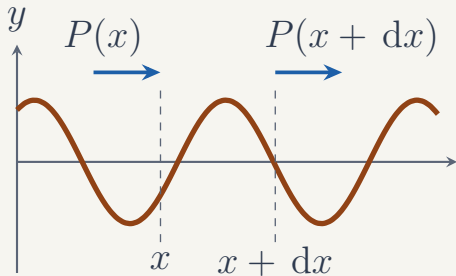
EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE

Conservação da energia numa corda

Num troço dx , a energia varia pela diferença entre o que entra e o que sai:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \, dx) = P(x) - P(x + dx)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$



EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE

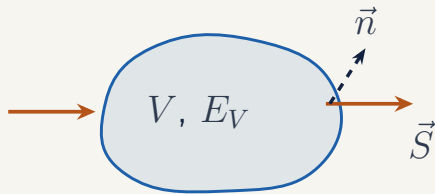
Conservação da energia num volume

Energia dentro de um volume V fixo:

$$E_V = \int_V u \, dV$$

Sem fontes nem perdas, E_V só varia pelo que atravessa a fronteira ∂V :

$$\frac{d}{dt} \int_V u \, dV = - \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$$



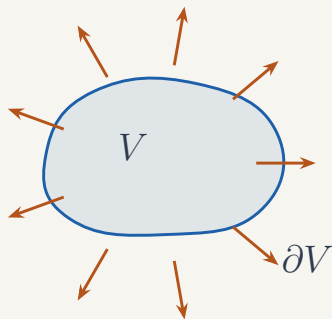
EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE

O significado da divergência

Fluxo líquido para fora, por unidade de volume:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$$

- Positiva: sai mais do que entra.
- Negativa: entra mais do que sai.



EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE

Equação de continuidade

Para um volume V muito pequeno, pela definição de divergência:

$$\frac{\partial u}{\partial t} V = - \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = -(\nabla \cdot \vec{S}) V$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

- Na corda, $\nabla \cdot \vec{S}$ reduz-se a $\partial P / \partial x$.

SÍNTESE

O que é geral e o que é da corda

	Corda	Qualquer onda
Energia	$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F_T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$	$u(\vec{r},t)$
Transporte	$P = -F_T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$	$\vec{S}(\vec{r},t)$
Média	$\langle P \rangle = v\langle u \rangle$	$I = v\langle u \rangle$
Conservação	$\partial_t u + \partial_x P = 0$	$\partial_t u + \nabla \cdot \vec{S} = 0$

A dependência em A^2 e ω^2 é comum a todas as ondas harmónicas.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Uma corda com $\mu = 5,0 \text{ g m}^{-1}$ e $F_T = 80 \text{ N}$ transporta uma onda harmónica de frequência 50 Hz e amplitude $4,0 \text{ mm}$.

- (a) Calcule a velocidade da onda e a potência média transportada.
- (b) Calcule a densidade média de energia.
- (c) Que amplitude é precisa para transportar o dobro da potência, com a mesma frequência?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $v = \sqrt{F_T/\mu} = 126 \text{ m s}^{-1}, \quad \omega = 2\pi f = 314 \text{ rad s}^{-1}$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 = 0,50 \text{ W}$$

(b) $\langle u \rangle = \langle P \rangle / v = 3,9 \times 10^{-3} \text{ J m}^{-1}$

(c) $\langle P \rangle \propto A^2$: $A' = \sqrt{2} A = 5,7 \text{ mm}$

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

A luz solar chega ao solo com intensidade 1000 W m^{-2} . Um painel fotovoltaico com $1,6 \text{ m}^2$ tem a normal a fazer 35° com a direcção do Sol.

- (a) Que potência luminosa atravessa o painel?
- (b) Para que ângulo se reduz essa potência a metade da máxima?
- (c) Com eficiência de 20 %, que energia eléctrica produz em 5 h nas condições de (a)?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a)

$$P = I \Sigma \cos \theta = 1000 \times 1,6 \times \cos 35^\circ = 1,31 \text{ kW}$$

(b) $\cos \theta = \frac{1}{2}$, logo $\theta = 60^\circ$.

(c) $E = 0,20 \times 1,31 \text{ kW} \times 5 \text{ h} = 1,3 \text{ kW h}$

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Numa incubadora, trata-se a icterícia de um recém-nascido com luz azul. A lâmpada emite 12 W de luz azul, igualmente em todas as direcções, e está a 35 cm do bebé.

- (a) Que intensidade chega ao bebé?
- (b) O tratamento exige pelo menos 5 W m^{-2} . Até que distância pode ir a lâmpada?
- (c) Que energia recebe, em 2 h , uma área de pele de $0,080\text{ m}^2$?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a)

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{12}{4\pi (0,35)^2} = 7,8 \text{ W m}^{-2}$$

(b) $r = \sqrt{P/(4\pi I)} = \sqrt{12/(4\pi \times 5)} = 44 \text{ cm}$

(c) $E = I \Sigma t = 7,8 \times 0,080 \times 7200 = 4,5 \text{ kJ}$