

Oscilações e Ondas

Exercícios Mini-teste 1

Âmbito. Oscilador harmónico; oscilações amortecidas e forçadas; osciladores acoplados e modos normais; descritores das ondas; equação da onda.

Convenções. Use unidades SI e apresente os resultados numéricos com três algarismos significativos, sem arredondamentos intermédios. Os dados são nominais. ω_0 designa a frequência angular própria, ω_d a amortecida, Ω a de excitação e $\gamma = b/(2m)$. Nos problemas de ondas, k é o número de onda e v a velocidade de propagação; nos de molas, k é a constante elástica. T é o período e F_T a tensão de uma corda. A fase inicial é ϕ_0 e o atraso de fase da resposta forçada é ϕ . As coordenadas e os deslocamentos apresentados são componentes escalares segundo os eixos indicados.

Exercício 1 — Movimento e energia de uma massa ligada a uma mola

Uma massa de $m = 0,200 \text{ kg}$ oscila horizontalmente, sem atrito, ligada a uma mola de constante $k = 80,0 \text{ N m}^{-1}$. A coordenada x é medida a partir do equilíbrio. No instante inicial, $x(0) = 30,0 \text{ mm}$ e $\dot{x}(0) = -0,800 \text{ m s}^{-1}$.

- Determine a frequência angular própria e o período.
- Escreva $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$, com $A > 0$ e $\phi_0 \in (-\pi, \pi]$.
- Calcule a energia mecânica e o módulo máximo da velocidade.

Exercício 2 — Calibração de um sensor elástico

Um sensor contém uma massa de $25,0 \text{ g}$ ligada a uma mola linear. Uma força constante de $0,180 \text{ N}$ desloca a massa $1,50 \text{ mm}$ relativamente ao equilíbrio sem essa força. Retira-se a força e liberta-se a massa do repouso nessa posição. Despreze o amortecimento.

- Determine a constante elástica e a frequência própria em hertz.
- Obtenha o movimento após a libertação e o primeiro instante em que a massa passa pelo equilíbrio.
- Determine o módulo máximo da aceleração e a energia mecânica.

Exercício 3 — Modelo elástico de uma pequena estrutura biológica

Num modelo idealizado de uma pequena estrutura biológica, uma massa efetiva de $2,00 \text{ mg}$ realiza oscilações de pequena amplitude com frequência 250 Hz . O movimento é unidimensional, linear e não amortecido.

- a) Determine a rigidez efetiva.
- b) A amplitude é $4,00 \mu\text{m}$. Calcule a energia mecânica e os módulos máximos da velocidade e da força elástica.
- c) Adiciona-se uma massa de $0,500 \text{ mg}$, sem alterar a rigidez. Qual é a nova frequência e a sua variação percentual?

Exercício 4 — Determinação do amortecimento por máximos sucessivos

Um oscilador satisfaz $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$, com $m = 0,500 \text{ kg}$. Dois máximos positivos consecutivos são $12,0 \text{ mm}$ e $9,00 \text{ mm}$, separados por $0,400 \text{ s}$.

- a) Determine $\gamma = b/(2m)$, a frequência angular amortecida ω_d e a frequência angular própria ω_0 .
- b) Calcule b e k e classifique o regime de amortecimento.
- c) Tomando o primeiro máximo como $t = 0$, obtenha $x(t)$ e a razão entre as energias mecânicas nos dois máximos.

Exercício 5 — Resposta de um suporte a uma força periódica

Um equipamento de massa $m = 40,0 \text{ kg}$ está montado num suporte de rigidez $k = 1,60 \times 10^4 \text{ N m}^{-1}$ e coeficiente viscoso $b = 240 \text{ kg s}^{-1}$. Uma força $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, com $F_0 = 80,0 \text{ N}$, atua segundo a coordenada de movimento. Considere apenas o regime estacionário.

- a) Determine ω_0 , γ e a frequência angular que maximiza a amplitude do deslocamento.
- b) Para $\Omega = 16,0 \text{ rad s}^{-1}$, calcule a amplitude e o atraso de fase em $x(t) = X \cos(\Omega t - \phi)$.
- c) Calcule a amplitude máxima e compare-a com a amplitude obtida na alínea anterior.

Exercício 6 — Sintonia de uma bobina de medição

Uma bobina de um dispositivo de medição biomédica é representada por um circuito RLC série com $L = 2,00 \mu\text{H}$, $R = 1,00 \Omega$ e $C = 200 \text{ pF}$. A tensão aplicada é $V(t) = V_0 \cos(\Omega t)$, com $V_0 = 0,500 \text{ V}$ (amplitude, não valor eficaz). Neste exercício, Ω (itálico) é a frequência de excitação e Ω (direito) o ohm. O modelo é

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = V_0 \cos(\Omega t), \quad I(t) = \dot{q}(t).$$

- a) Estabeleça a correspondência com um oscilador mecânico amortecido e forçado.

- b) Deduza a amplitude da corrente estacionária e determine a frequência de ressonância da corrente em hertz e a amplitude nessa frequência.
- c) Calcule a amplitude da corrente para $\Omega = 0,950\omega_0$, com $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Exercício 7 — Duas massas e dois modos normais

Duas massas iguais, $m = 0,200\text{ kg}$, movem-se horizontalmente. Cada massa está ligada a uma parede por uma mola de constante $k = 18,0\text{ N m}^{-1}$, e uma mola de constante $k_c = 7,00\text{ N m}^{-1}$ liga as massas entre si. As coordenadas x_1, x_2 são medidas a partir do equilíbrio, no mesmo sentido. Não há atrito.

- a) Escreva as equações do movimento e determine as frequências e os padrões dos modos normais.
- b) Inicialmente, $x_1 = a = 10,0\text{ mm}$, $x_2 = 0$ e ambas as velocidades são nulas. Determine $x_1(t)$ e $x_2(t)$ por sobreposição dos modos.
- c) Calcule a energia mecânica inicial, incluindo a mola de acoplamento.

Exercício 8 — Absorvedor de vibrações

Uma máquina de massa $M = 8,00\text{ kg}$ está ligada a uma base fixa por uma mola $K = 3200\text{ N m}^{-1}$. Liga-se à máquina uma massa auxiliar $m = 0,500\text{ kg}$ por uma mola k_c , sem ligação direta da massa auxiliar à base. A máquina é excitada por $F_0 \cos(\Omega t)$, com $F_0 = 12,0\text{ N}$ e $\Omega = 24,0\text{ rad s}^{-1}$. Despreze o amortecimento. Considere a solução particular harmônica $x_1 = X_1 \cos \Omega t$, $x_2 = X_2 \cos \Omega t$, com coeficientes com sinal.

- a) Escreva as equações para X_1 e X_2 e escolha k_c de modo que $X_1 = 0$.
- b) Determine X_2 nessa situação e explique o equilíbrio das forças sobre a máquina.
- c) Calcule as duas frequências angulares próprias do sistema com o valor escolhido de k_c . Explique por que razão a solução particular não descreve necessariamente todo o movimento.

Exercício 9 — Identificação da rigidez de duas estruturas acopladas

Duas pequenas estruturas de um modelo biomecânico têm massas efetivas iguais $m = 1,00\text{ mg}$. Cada uma está ligada a um suporte fixo por uma rigidez k , e existe uma rigidez de acoplamento k_c entre elas. Despreze o amortecimento. Medem-se frequências próprias de 800 Hz no modo em fase e 1200 Hz no modo em oposição de fase.

- a) Determine k e k_c .

- b) Liberta-se o sistema do repouso com $x_1(0) = 3,00 \mu\text{m}$ e $x_2(0) = -1,00 \mu\text{m}$. Determine o movimento de cada estrutura.
- c) Calcule a energia associada a cada modo e verifique a energia total diretamente a partir das deformações iniciais.

Exercício 10 — Leitura de uma onda progressiva

O deslocamento transversal de uma corda é

$$y(x, t) = (2,50 \times 10^{-3} \text{ m}) \cos \left[(5\pi \text{ rad m}^{-1})x - (80\pi \text{ rad s}^{-1})t + \frac{\pi}{3} \right].$$

- a) Identifique a amplitude, o número de onda, a frequência angular, o comprimento de onda, o período e a velocidade de propagação, incluindo o sentido.
- b) Calcule o deslocamento e a velocidade transversal em $x = 0$, $t = 0$.
- c) Determine a menor distância positiva entre pontos que oscilam em oposição de fase e o tempo que uma crista demora a percorrê-la.

Exercício 11 — Medição de velocidade com dois sensores

Uma onda harmónica propaga-se no sentido positivo de x numa guia uniforme. Dois sensores, separados por $d = 0,180 \text{ m}$, registam oscilações de frequência 300 Hz . O sinal do segundo sensor está atrasado de $3\pi/5 \text{ rad}$ relativamente ao primeiro, módulo 2π . Sabe-se, por uma medição independente, que $120 < v < 240 \text{ m s}^{-1}$.

- a) Escreva os valores possíveis de k compatíveis com a fase medida.
- b) Use o intervalo de velocidades para seleccionar o valor de k e determine v e λ .
- c) Se a amplitude for $0,200 \text{ mm}$ e o primeiro sensor, situado em $x = 0$, registar um máximo em $t = 0$, escreva a onda e o atraso de propagação entre sensores.

Exercício 12 — Descritores de uma perturbação num meio biológico

Num modelo homogéneo de tecido, uma perturbação longitudinal harmónica tem frequência $f = 1,50 \text{ MHz}$, velocidade de propagação $v = 1500 \text{ m s}^{-1}$ e amplitude de deslocamento $A = 8,00 \text{ nm}$. Propaga-se no sentido positivo de x e o deslocamento em $x = 0$ é máximo em $t = 0$. Não considere absorção nem interfaces.

- a) Calcule λ , k e ω e escreva o deslocamento $u(x, t)$.
- b) Determine o módulo máximo da velocidade local das partículas e a razão entre esse valor e v .

- c) Calcule o tempo de propagação ao longo de 30,0 mm e o número de períodos correspondente. Dois pontos separados por 0,250 mm têm que diferença de fase, no mesmo instante?

Exercício 13 — Da força transversal à equação da onda

Uma corda uniforme, suficientemente longa para desprezar reflexões, tem densidade linear $\mu = 5,00 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$ e está sob tensão constante $F_T = 72,0 \text{ N}$. Admita pequenos declives e movimentos transversais.

- Aplicando a segunda lei de Newton a um elemento de comprimento dx , deduza a equação da onda e calcule a velocidade de propagação.
- Verifique por substituição se $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ é solução para $A = 0,500 \text{ mm}$, $k = 4,00 \text{ rad m}^{-1}$ e $\omega = 480 \text{ rad s}^{-1}$.
- Determine a amplitude máxima que assegura $|\partial y / \partial x| \leq 0,0100$ e verifique se a amplitude dada respeita esse limite.

Exercício 14 — Propagação longitudinal numa barra

Uma barra longa, fina e uniforme tem densidade volúmica $\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$, módulo de Young $E_Y = 6,75 \times 10^{10} \text{ Pa}$ e secção constante S . No modelo unidimensional de pequenas deformações, o deslocamento longitudinal é $u(x, t)$ e a força interna axial é $N = E_Y S \partial_x u$. Despreze efeitos laterais (a secção é muito menor do que o comprimento de onda), dispersão e reflexões.

- Deduza a equação de movimento de um elemento e a velocidade de propagação. Explique por que razão S não aparece na velocidade.
- Um máximo de uma perturbação percorre 1,20 m. Calcule o tempo de trânsito. Para uma oscilação de 25,0 kHz, calcule o comprimento de onda.
- Se ρ permanecer constante e E_Y diminuir 19,0 %, determine as variações percentuais da velocidade e do tempo de trânsito para a mesma distância.

Exercício 15 — Uma perturbação localizada num modelo de tecido

Num modelo unidimensional, linear e sem perdas de um tecido elástico, a componente transversal do deslocamento satisfaz

$$\partial_t^2 u = v^2 \partial_x^2 u, \quad v = \sqrt{G/\rho},$$

com módulo de corte $G = 9,00 \times 10^3 \text{ Pa}$ e densidade $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$. Considere um meio ilimitado e as condições iniciais

$$u(x, 0) = g(x) = A e^{-x^2/a^2}, \quad \partial_t u(x, 0) = -v g'(x),$$

onde $A = 20,0 \mu\text{m}$ e $a = 6,00 \text{ mm}$.

- a) Calcule v e verifique diretamente que $u(x, t) = g(x - vt)$ satisfaz a equação e ambas as condições iniciais. Identifique o sentido de propagação.
- b) Determine a posição e a amplitude do máximo em $t = 4,00 \text{ ms}$ e o deslocamento em $x = 0$ nesse instante.
- c) Se a velocidade inicial fosse nula em todos os pontos, verifique que $u(x, t) = \frac{1}{2}g(x - vt) + \frac{1}{2}g(x + vt)$ seria a solução correspondente. Descreva fisicamente as duas contribuições.