Cavidades e modos acústicos

Tubos, salas e instrumentos



Três perguntas

- Porque é que um clarinete, com o mesmo comprimento de uma flauta, toca uma oitava abaixo?
- Porque é que o som de uma garrafa a encher fica cada vez mais agudo?
- Porque é que cantar no duche soa melhor?

CONCEITOS

O que vamos usar

- Corda presa nas duas pontas: $L = n\lambda/2$, $f_n = nv/2L$.
- Numa onda estacionária sonora, onde p' tem um nó, u tem um antinó, e vice-versa.
- Ressonância: um oscilador forçado responde muito perto da sua frequência própria; $Q = f/\Delta f$.
- Tempo de reverberação: $T_{60} = 0{,}161\, V/A$.

PERGUNTA: O CLARINETE

As extremidades de um tubo

Porque é que o clarinete toca uma oitava abaixo da flauta?

Num tubo estreito, o som vai e vem ao longo do eixo, reflectindo-se nas pontas.

- **Ponta fechada**: o ar não se pode mexer, $u = 0$; acumula-se e rarefaz-se contra a parede: p' tem um antinó.
- **Ponta aberta**: fora está a atmosfera, a p_0: $p' \approx 0$, e u tem um antinó.

$u = 0$, p' máximo	$p' \approx 0$, u máximo

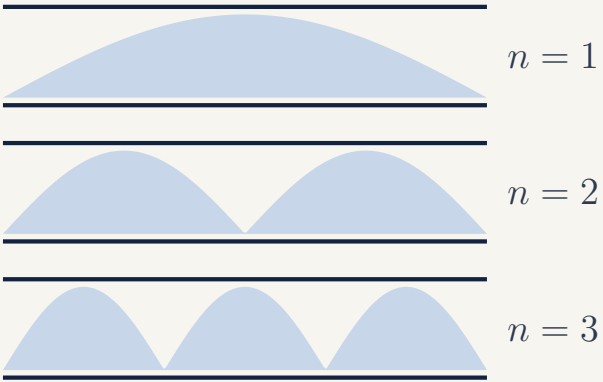
PERGUNTA: O CLARINETE

Tubo aberto nas duas pontas

Nós de p' nas duas pontas, como numa corda presa: cabem meios comprimentos de onda.

$$L = n\,\frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; f_n = n\,\frac{v}{2L}$$

Todas as harmónicas.



Amplitude de p' ao longo do tubo.

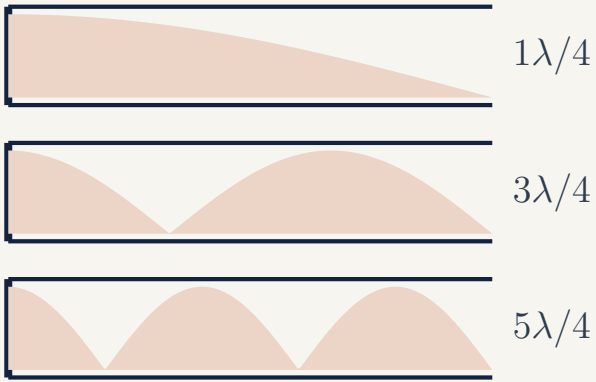
PERGUNTA: O CLARINETE

Tubo fechado numa ponta

Antinó de p' na ponta fechada, nó na aberta. De antinó a nó vai $\lambda/4$; a seguir só se juntam meios λ: $L = \lambda/4,\ 3\lambda/4, \ldots$

$$f = (2m-1)\,\frac{v}{4L}$$

Só harmónicas ímpares.



Fechado à esquerda; amplitude de p'.

PERGUNTA: O CLARINETE

Correcção de extremidade

A ponta aberta não é exactamente um nó: o ar que oscila estende-se um pouco para fora do tubo. O tubo comporta-se como se fosse mais comprido:

$$L_{\text{ef}} = L + 0{,}6\,a \qquad (a\text{: raio do tubo, por cada ponta aberta})$$

Flauta com $L = 60\,\text{cm}$ e $a = 0{,}95\,\text{cm}$:

$$L_{\text{ef}} = 60 + 2 \times 0{,}6 \times 0{,}95 = 61{,}1\,\text{cm}, \qquad f_1 = \frac{343}{2 \times 0{,}611} = 281\,\text{Hz}$$

RESPOSTA

O clarinete e a flauta

- **Flauta transversal**: o flautista sopra sobre a aresta de um orifício aberto para o ar. O tubo é aberto nas duas pontas.
- **Clarinete**: sopra-se para dentro do tubo; a palheta e os lábios fecham-no na boquilha. É fechado numa ponta.

$$f_{\text{flauta}} = \frac{v}{2L}, \qquad f_{\text{clarinete}} = \frac{v}{4L} = \frac{f_{\text{flauta}}}{2}$$

Com o mesmo L, o clarinete tem metade da frequência. Uma **oitava** é o intervalo entre duas notas em que a frequência duplica: o clarinete toca uma oitava abaixo.

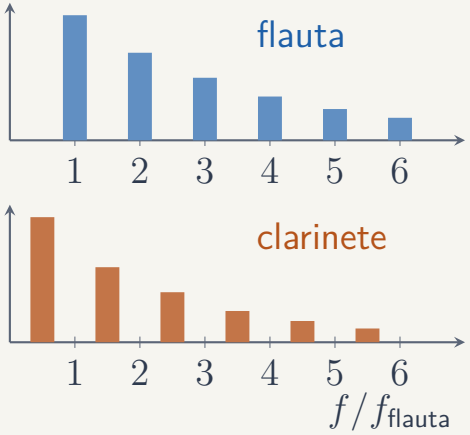
RESPOSTA

Porque soam diferentes

Uma nota tem a fundamental e as frequências dos modos seguintes:

- flauta: $f_1, 2f_1, 3f_1, \ldots$
- clarinete: $f_1, 3f_1, 5f_1, \ldots$

Essa mistura é o **timbre**. Sem as pares, o clarinete soa mais escuro, «oco».



RESPOSTA

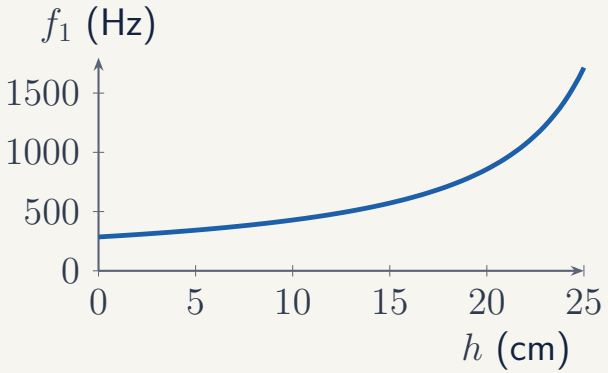
A garrafa a encher

O ar acima da água: tubo fechado em baixo, aberto em cima, com $H - h$:

$$f_1 = \frac{v}{4\,(H-h)}$$

$H = 30\,\text{cm}$: vazia, $286\,\text{Hz}$; com $5\,\text{cm}$ de ar, $1715\,\text{Hz}$.

Como no clarinete, há também $3f_1, 5f_1, \ldots$, que sobem todas juntas; a nota que ouvimos é f_1.



h: altura da água.

INSTRUMENTOS

Como se faz soar um tubo

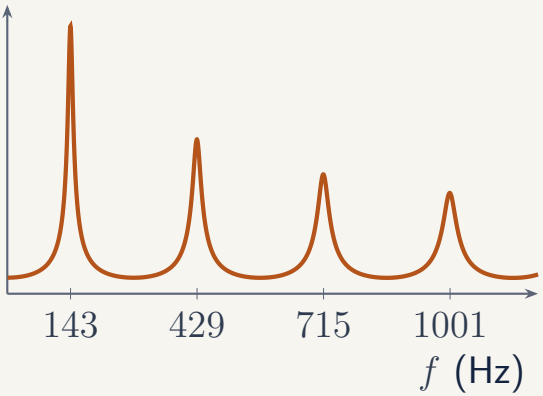
- Um jacto de ar contra uma aresta (flauta), uma palheta (clarinete, oboé) ou os lábios (trompete) abrem e fecham a passagem do ar.
- A onda que volta do tubo empurra a palheta ou desvia o jacto: é o tubo que marca o ritmo da abertura, e por isso a frequência.
- O instrumento oscila num dos modos do tubo. Abrir orifícios encurta o tubo e sobe a nota.

INSTRUMENTOS

A resposta de um tubo

Cada modo é um oscilador: o tubo forçado só responde muito perto dos seus modos.

A largura de cada pico mede as perdas: $Q = f/\Delta f$.



Fechado-aberto, 60 cm.

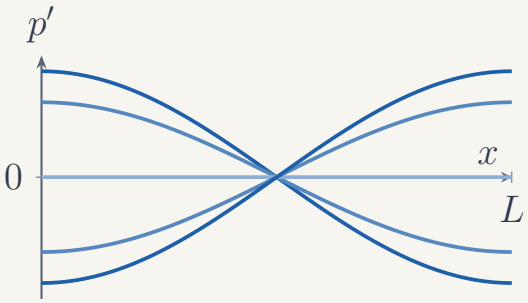
PERGUNTA: O DUCHE

O que é um modo

Porque é que cantar no duche soa melhor?

Uma sala também tem modos, como um tubo. Num modo, todos os pontos oscilam à mesma frequência; a forma fica parada e só a amplitude sobe e desce:

$$p' = P(\text{posição}) \cos \omega t$$



O modo mais simples entre duas paredes, em cinco instantes.

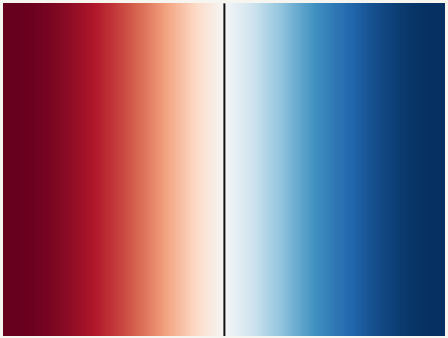
PERGUNTA: O DUCHE

Entre duas paredes

Uma parede rígida é como a ponta fechada de um tubo: o ar não a atravessa, e p' tem lá um antinó.

Entre duas paredes paralelas, à distância L_x, é um tubo fechado nas duas pontas:

$$L_x = n_x \frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; f = n_x \frac{v}{2L_x}$$



Sala vista de cima, $n_x = 1$: vermelho e azul em oposição.

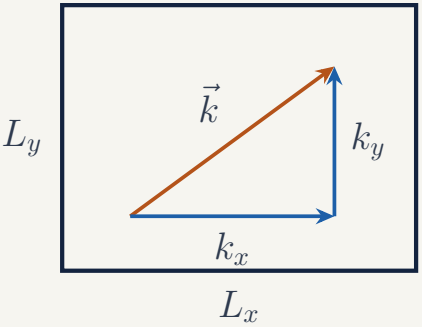
PERGUNTA: O DUCHE

Os modos de uma sala

O som também vai e vem na diagonal. Cada componente de $\vec{k}$ tem de caber entre as paredes, como no tubo: $k_x = n_x\pi/L_x$, e o mesmo em y e z.

Por Pitágoras, $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$; com $f = vk/2\pi$:

$$f = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}}$$



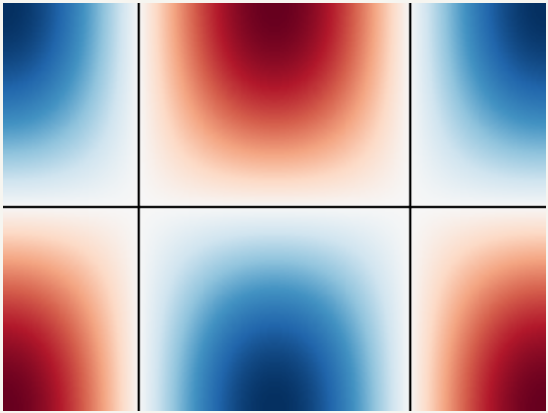
Sala vista de cima.

PERGUNTA: O DUCHE

Como é um modo da sala

Modo $(2,1,0)$ de uma sala de 4×3 m, 103 Hz: dois meios comprimentos de onda ao longo de x, um ao longo de y.

Nas linhas pretas, a pressão não varia: aí, uma nota de 103 Hz quase não se ouve. Nos cantos, ouve-se muito.



PERGUNTA: O DUCHE

Poucos modos nos graves

Com todas as combinações (n_x, n_y, n_z): nos graves, os modos são poucos e espaçados; nos agudos, juntam-se.

Numa sala mais pequena, os primeiros modos sobem e afastam-se.



Modos de uma sala de $4 \times 3 \times 2{,}5\,\text{m}$.

PERGUNTA: O DUCHE

Os modos da cabine de duche

Uma cabine de $1 \times 1 \times 2{,}4\,\mathrm{m}$ é uma sala muito pequena. Com $v/2 = 171{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$:

$$(0,0,1):\ \frac{171{,}5}{2{,}4} = 71\,\mathrm{Hz}, \qquad (0,0,2):\ 143\,\mathrm{Hz}, \qquad (1,0,0):\ 172\,\mathrm{Hz}$$

e depois $186\,\mathrm{Hz}$, $214\,\mathrm{Hz}$, $223\,\mathrm{Hz}$...

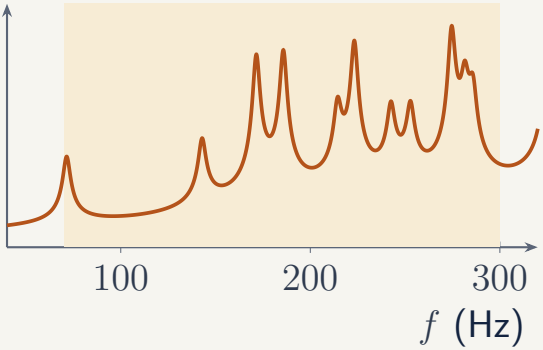
A frequência fundamental da voz falada ou cantada está entre cerca de $70\,\mathrm{Hz}$, nas vozes mais graves, e $300\,\mathrm{Hz}$: os primeiros modos da cabine caem exactamente aí, poucos e separados.

PERGUNTA: O DUCHE

A cabine responde à voz

Cada modo é um oscilador, como os do tubo: forçado pela voz, a cabine responde muito perto dos seus modos.

Uma nota que caia num pico sai muito mais forte.



Sombreado: gama da voz.

PERGUNTA: O DUCHE

O som demora a morrer

Quando se pára de cantar, o som continua a ir e vir entre os azulejos. Com a fórmula de Sabine, $a \approx 0{,}02$ e as seis paredes, $11{,}6\,\mathrm{m}^2$:

$$A = 0{,}02 \times 11{,}6 = 0{,}23\,\mathrm{m}^2, \qquad T_{60} = 0{,}161 \times \frac{2{,}4}{0{,}23} \approx 1{,}7\,\mathrm{s}$$

Numa sala de estar, com sofás e cortinas, $T_{60} \approx 0{,}5\,\mathrm{s}$.

No duche, cada nota ainda soa quando se canta a seguinte: as notas ligam-se umas às outras.

RESPOSTA

Cantar no duche

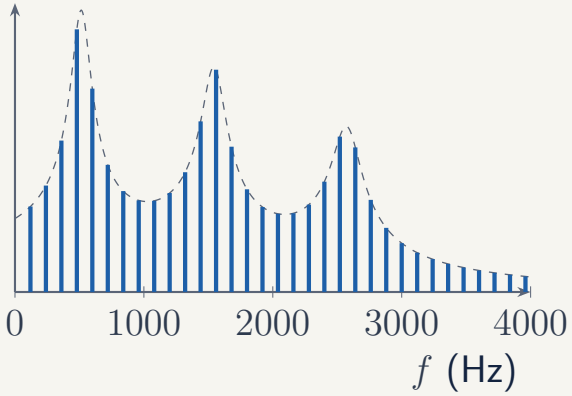
- **Os modos**: a cabine é tão pequena que os seus primeiros modos caem na gama da voz. As notas que lhes coincidem saem reforçadas: a voz soa mais forte e mais cheia nos graves.
- **A reverberação**: os azulejos quase não absorvem, $T_{60} \approx 1{,}7\,\text{s}$. As notas prolongam-se e ligam-se; as pequenas desafinações disfarçam-se.
- Os modos são da cabine: cante-se onde se cantar, reforçam as mesmas notas.

A voz: um tubo com formantes

As pregas vocais dão harmónicas de f_0. O tracto vocal, fechado nas pregas e aberto nos lábios, com $17\,\text{cm}$, reforça

$$F_m = (2m-1)\,\frac{v}{4L}$$

$515\,\text{Hz}$, $1545\,\text{Hz}$, $2575\,\text{Hz}$: os **formantes**.



Tracejado: resposta do tracto.

INSTRUMENTOS

As vogais

- A língua e os lábios mudam a forma do tracto: os formantes deslocam-se.
- Cada vogal tem o seu par (F_1, F_2): em «i», F_1 baixo e F_2 alto; em «a», F_1 alto.
- A mesma vogal pode cantar-se em qualquer nota: f_0 e formantes são independentes.

O timbre de uma vogal está nos formantes, não na frequência fundamental.

ENUNCIADO

Exercício resolvido I

Um tubo de órgão aberto nas duas pontas tem $L = 2{,}00\,\mathrm{m}$. O ar está a $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ ($v = 343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$).

(a) Calcule as três primeiras frequências.

(b) E se o tubo for tapado numa ponta?

(c) Quanto varia f_1 do tubo aberto se o ar aquecer até $30\,^{\circ}\mathrm{C}$?

(d) O tubo tem $5\,\mathrm{cm}$ de raio. Qual o f_1 corrigido?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido I

(a) $f_n = n\,v/2L = n \times 85{,}8\,\text{Hz}$: $85{,}8\,\text{Hz},\ 172\,\text{Hz},\ 257\,\text{Hz}$.

(b) $f = (2m-1)\,v/4L$: $42{,}9\,\text{Hz},\ 129\,\text{Hz},\ 214\,\text{Hz}$.

(c) $v \propto \sqrt{T}$: $v' = 343\sqrt{303{,}15/293{,}15} = 348{,}8\,\text{m s}^{-1}$, $f_1 = 87{,}2\,\text{Hz}$.

(d)

$$L_{\text{ef}} = 2 + 2 \times 0{,}6 \times 0{,}05 = 2{,}06\,\text{m}, \qquad f_1 = \frac{343}{4{,}12} = 83{,}3\,\text{Hz}$$

ENUNCIADO

Exercício resolvido II

Uma sala de paredes rígidas tem $5 \times 4 \times 3\,\mathrm{m}$ ($v = 343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$).

(a) Calcule as três frequências próprias mais baixas.

(b) Onde se deve pôr um altifalante para excitar bem o modo $(1,0,0)$? Onde fica ele inútil?

(c) Quais são todos os modos abaixo de $70\,\mathrm{Hz}$?

(d) Calcule os primeiros modos de uma sala cúbica de $4\,\mathrm{m}$. Porque se evitam salas cúbicas?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(a) Com $v/2 = 171{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$:

$$(1,0,0):\ \frac{171{,}5}{5} = 34{,}3\,\mathrm{Hz}, \quad (0,1,0):\ 42{,}9\,\mathrm{Hz}, \quad (1,1,0):\ 54{,}9\,\mathrm{Hz}$$

(b) $P \propto \cos(\pi x/5)$: máximo nas paredes $x = 0$ e $x = 5\,\mathrm{m}$, nulo a meio. Junto à parede excita-se o modo; a meio da sala, não.

(c) Juntam-se $(0,0,1)$ $57{,}2\,\mathrm{Hz}$, $(1,0,1)$ $66{,}7\,\mathrm{Hz}$ e $(2,0,0)$ $68{,}6\,\mathrm{Hz}$: seis modos abaixo de $70\,\mathrm{Hz}$.

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido II

(d) Num cubo, $L_x = L_y = L_z = 4\,\text{m}$:

> $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$: $42{,}9\,\text{Hz}$ $(1,1,0)$ e semelhantes: $60{,}6\,\text{Hz}$

Os modos coincidem três a três e deixam intervalos vazios entre si. Os graves ficam muito desiguais: umas notas ressoam muito, outras quase nada. Dimensões diferentes espalham os modos e tornam a resposta mais regular.

ENUNCIADO

Exercício resolvido III

Tracto vocal: tubo fechado-aberto, $L = 17\,\text{cm}$, $v = 350\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

(a) Calcule os três primeiros formantes.

(b) E numa criança, com $L = 11\,\text{cm}$?

(c) Com $f_0 = 120\,\text{Hz}$, que harmónicas ficam mais perto de F_1 e F_2?

(d) O canal auditivo tem $2{,}5\,\text{cm}$ e é fechado pelo tímpano. Onde ressoa?

RESOLUÇÃO

Exercício resolvido III

(a) $F_m = (2m-1) \times 350/(4 \times 0{,}17)$: $515\,\text{Hz}$, $1545\,\text{Hz}$, $2575\,\text{Hz}$.

(b) Com $11\,\text{cm}$: $795\,\text{Hz}$, $2390\,\text{Hz}$, $3980\,\text{Hz}$.

(c) $515/120 = 4{,}3$ e $1545/120 = 12{,}9$: a 4.ª harmónica, $480\,\text{Hz}$, e a 13.ª, $1560\,\text{Hz}$.

(d) $f_1 = 343/(4 \times 0{,}025) \approx 3{,}4\,\text{kHz}$.

Os sons de $3\,\text{kHz}$ a $4\,\text{kHz}$ são reforçados: é onde o ouvido é mais sensível.