Unicidade de leitura

Fernando Ferreira

Um *alfabeto* do cálculo proposicional consiste num conjunto infinito L de *letras proposicionais*, cujos elementos denotamos usualmente por p, q, r, p', etc, juntamente com quatro símbolos lógicos '$\neg$', '$\rightarrow$', '$\wedge$', '$\vee$' e dois símbolos de pontuação: o parêntesis esquerdo '(' e o parêntesis direito ')'. Ao símbolo lógico $\neg$ dá-se o nome de *negação*. Os símbolos $\rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$ são conectivos proposicionais binários, respectivamente o *condicional*, a *conjunção* e a *disjunção*. Uma *palavra* do alfabeto é uma sequência finita de símbolos do alfabeto. Cada palavra tem um comprimento bem determinado, o qual pode ser o número natural 0 (é unicamente o caso da sequência vazia). A *concatenação* de duas palavras s e q denota-se por $s\hat{\ }q$ ou, simplesmente, sq. Também podemos concatenar uma palavra com um determinado símbolo, adoptando uma notação similar. Uma palavra s diz-se um *segmento inicial* duma palavra r se existir uma palavra q tal que $r = s\hat{\ }q$.

Definição 1. *Diz-se que uma palavra ϕ do alfabeto do cálculo proposicional é uma* fórmula *se existir uma sequência finita $\phi_1, \ldots, \phi_n$ de palavras tal que $\phi = \phi_n$ e, para cada $1 \leq i \leq n$, se tem* (a) *ϕ_i é p, onde p é uma letra proposicional; ou* (b) *ϕ_i é da forma $\neg\phi_j$, com $j < i$; ou* (c) *ϕ_i é da forma $(\phi_j \diamondsuit \phi_k)$, com $\diamondsuit$ um conectivo binário e $j, k < i$.*

Uma sequência $\phi_1, \ldots, \phi_n$ nas condições da definição diz-se uma *sequência de formação* de ϕ. Habitualmente denotamos as fórmulas do cálculo proposicional por letras minúsculas do alfabeto grego $\phi, \psi, \theta, \rho, \phi'$, etc. O seguinte resultado é imediato por indução completa no comprimento da sequência de formação de uma fórmula.

Proposição (Indução na Complexidade das Fórmulas). *Seja X um conjunto de fórmulas. Suponhamos que toda a letra proposicional está em X e que sempre que $\phi, \psi \in X$ então $\neg\phi \in X$ e $(\phi \diamondsuit \psi) \in X$, onde $\diamondsuit$ é um conectivo binário. Então X é o conjunto de todas as fórmulas.*

O seguinte lema demonstra-se imediatamente por indução na complexidade das fórmulas:

Lema 1. *Toda a fórmula ou é uma letra proposicional, ou é da forma $\neg\phi$ com ϕ uma fórmula, ou é da forma $(\phi \diamondsuit \psi)$, com ϕ, ψ fórmulas e $\diamondsuit$ um conectivo proposicional binário.*

Trivialmente, os três casos acima (i.e., ser uma letra proposicional, ser uma negação ou advir dum dos conectivos binários) são mutuamente incompatíveis. Mostrar que, no terceiro caso, o conectivo binário está bem determinado necessita dum argumento.

Lema 2. *Nenhuma fórmula é segmento inicial próprio de outra fórmula.*

Demonstração. Queremos ver que nenhum segmento inicial próprio de uma dada fórmula ϕ ainda é uma fórmula. Admitamos o contrário. Tome-se uma fórmula ϕ nessas condições de comprimento mínimo. Vamos mostrar que se θ é fórmula e segmento inicial de ϕ, então θ é ϕ (o que é um absurdo). Isto é claro quando ϕ é uma letra proposicional. Suponhamos que ϕ é da forma $\neg\psi$. Vem que θ é da forma $\neg\gamma$, em que γ é fórmula e é segmento inicial de ψ. Por minimalidade, γ é ψ, como se queria. Finalmente, suponhamos que ϕ é da forma $(\psi \diamondsuit \gamma)$, com $\diamondsuit$ um conectivo proposicional binário. Então θ começa com um parêntesis esquerdo e, portanto, é da forma $(\rho \heartsuit \eta)$, com ρ e η fórmulas e $\heartsuit$ um conectivo proposicional binário. As fórmulas ρ e ψ não podem ter comprimentos diferentes, pela suposição de minimalidade. Logo, ρ é ψ. Conclui-se que os conectivos $\diamondsuit$ e $\heartsuit$ são o mesmo e que η é segmento inicial de γ. Novamente pela suposição de minimalidade, infere-se que η é γ. Como se queria. $\square$

Como consequência imediata:

Proposição (Unicidade de Leitura). *Se uma fórmula ρ é da forma $(\phi\diamondsuit\psi)$, com $\diamondsuit$ um conectivo proposicional binário, então tanto o conectivo $\diamondsuit$ como as fórmulas ϕ e ψ estão univocamente determinados por ρ.*

Pela propriedade da unicidade de leitura referimo-nos não somente ao enunciado acima como também à observação (já efetuada) de que uma fórmula cai *apenas* num dos três casos seguintes: ou é uma letra proposicional, ou é uma negação, ou advém dum conectivo binário. No segundo caso, é claro que a fórmula que se nega está determinada pela fórmula original. Assim, quando uma fórmula não é uma letra proposicional, podemos falar no conectivo principal dessa fórmula e na(s) sua(s) componente(s).

Do discutido, é agora claro que podemos definir funções no conjunto de todas as fórmulas por recursão na sua complexidade, i.e., dizendo qual é o valor da função nas letras proposicionais e qual é o valor da função nas restantes fórmulas em termos do valor da função na(s) sua(s) fórmula(s) componente(s).