Tautologias

Fernando Ferreira

Definição 1. *Considere-se uma linguagem do cálculo proposicional dada por um conjunto de letras proposicionais L. A uma função $v : L \mapsto \{0, 1\}$ dá-se o nome de* valoração.

Usando recursão na complexidade das fórmulas, as valorações v estendem-se a aplicações $\tilde{v}$ definidas em todas as fórmulas do cálculo proposicional através das seguintes cláusulas:

i. $\tilde{v}(\phi) = v(\phi)$, para ϕ letra proposicional;

ii. $\tilde{v}(\neg\phi) = 1 - \tilde{v}(\phi)$;

iii. $\tilde{v}((\phi \to \psi)) = \max(1 - \tilde{v}(\phi), \tilde{v}(\psi))$;

iv. $\tilde{v}((\phi \wedge \psi)) = \min(\tilde{v}(\phi), \tilde{v}(\psi))$; e

v. $\tilde{v}((\phi \vee \psi)) = \max(\tilde{v}(\phi), \tilde{v}(\psi))$.

A $\tilde{v}(\phi)$ chama-se o *valor de verdade* de ϕ sob a valoração v.

Definição 2. *Seja v uma valoração. Uma fórmula ϕ diz-se* verdadeira *sob a valoração v se $\tilde{v}(\phi) = 1$. Nesta caso, escreve-se $\models_v \phi$ e diz-se também que v é modelo de ϕ. Diz-se* falsa *se $\tilde{v}(\phi) = 0$.*

Note-se que ϕ é verdadeira se, e somente se, $\neg\phi$ é falsa. Também se tem, por exemplo, que um condicional $(\phi \to \psi)$ é falso se, e somente se, ϕ é verdadeira e ψ é falsa. Uma *tautologia* é uma fórmula que é verdadeira sob todas as valorações. São exemplos de tautologias as seguintes fórmulas: $(\phi \to \phi)$; $(\psi \to (\phi \to \psi))$; $(\neg\phi \to (\phi \to \psi))$; $(\phi \vee \neg\phi)$ (lei do terceiro excluído), $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$ (lei da não contradição); $((\phi \wedge \psi) \to \phi)$; $(\phi \to (\phi \vee \psi))$; $(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)$ (lei de Peirce); $((\phi \to (\psi \to \rho)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \rho)))$; e $((\neg\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \neg\psi) \to \phi))$. Para simplificar a leitura, passamos a omitir os parênteses exteriores. Assim, a penúltima tautologia atrás escreve-se

$$(\phi \to (\psi \to \rho)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \rho)).$$

Há métodos efetivos (automáticos) para decidir se uma dada fórmula é, ou não, uma tautologia. O mais conhecido é o método das tabelas de verdade. Essencialmente, se $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as letras proposicionais distintas que ocorrem numa dada fórmula ϕ, a tabela de verdade lista sistematicamente todos as possíveis valorações restritas a estas n letras proposicionais (pois, é claro, somente esta restrição interessa para avaliar o valor de verdade de ϕ) e determina, para cada entrada desta lista, se o valor de verdade de ϕ é 1. Note-se que a listagem tem 2^n entradas. Um dos grandes problemas da matemática actual, conhecido por problema P *versus* NP (diz-se 'éne pê'), pergunta se existe um método efetivo para decidir se uma fórmula é, ou não, uma tautologia em apenas um número polinomial de passos. Muitos investigadores acreditam que tal não é o caso (acreditam em $P \neq NP$) mas *ninguém* sabe como o demonstrar.

Uma *contradição* é uma fórmula que é falsa sob todas as valorações. E.g., $\phi \wedge \neg\phi$ é uma contradição. É claro que uma fórmula é uma contradição se, e somente se, a sua negação é uma tautologia. Duas fórmulas ϕ e ψ dizem-se *tautologicamente* equivalentes, e escreve-se $\phi \Leftrightarrow \psi$, se para toda a valoração v, $\tilde{v}(\phi) = \tilde{v}(\psi)$. Algumas equivalências lógicas têm nomes especiais:

- Dupla negação, ou estabilidade: $\neg\neg\phi \Leftrightarrow \phi$.
- Idempotência: $\begin{cases} \phi \wedge \phi \Leftrightarrow \phi \\ \phi \vee \phi \Leftrightarrow \phi \end{cases}$
- Comutatividade: $\begin{cases} \phi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \phi \\ \phi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \phi \end{cases}$
- Associatividade: $\begin{cases} \phi \wedge (\psi \wedge \rho) \Leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \wedge \rho \\ \phi \vee (\psi \vee \rho) \Leftrightarrow (\phi \vee \psi) \vee \rho \end{cases}$

  [Se apenas estivermos interessados nas fórmulas a menos de equivalência lógica então as leis associativas permitem-nos simplificar a escrita. Por exemplo, podemos escrever $\phi \wedge \psi \wedge \rho$ sem parêntesis.]
- Distributividade: $\begin{cases} \phi \wedge (\psi \vee \rho) \Leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \rho) \\ \phi \vee (\psi \wedge \rho) \Leftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \rho) \end{cases}$
- De Morgan: $\begin{cases} \neg(\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi \\ \neg(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi \end{cases}$

O *bicondicional* entre duas fórmulas ϕ e ψ define-se como $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$ e denota-se por $\phi \leftrightarrow \psi$. Observe-se $\phi \Leftrightarrow \psi$ sse o bicondicional $\phi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Há uma certa redundância no número de conectivos lógicos primitivos que admitimos. Com efeito, a menos de equivalência lógica, um só dos três conectivos $\to$, $\wedge$ e $\vee$ é, juntamente com o conectivo da negação, suficiente para obter os outros dois. Por exemplo, o condicional e a negação bastam pois $\phi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\phi \to \neg\psi)$ e $\phi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\phi \to \psi$. Mais interessante é saber se os conectivos discutidos são suficientes para definir qualquer "conectivo", seja qual fôr a sua aridade. Segue-se a formulação rigorosa desta questão, com resposta afirmativa.

Proposição (Completude Vero-Funcional). *Dado $n \neq 0$, seja $F : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ uma aplicação. Nestas circunstâncias, existe uma fórmula ϕ do cálculo proposicional, na qual apenas ocorrem n letras proposicionais $p_1, \ldots, p_n$, com a seguinte propriedade: para qualquer valoração v, $\tilde{v}(\phi) = F(v(p_1), \ldots, v(p_n))$.*

Demonstração. Faz-se uma demonstração por indução simples em n. No caso $n = 1$ há quatro funções de $\{0,1\}$ para si próprio. São elas F_1, F_2, F_3 e F_4, as quais passamos a descrever. A primeira é a função constantemente igual a 0; a segunda, a constantemente igual a 1; a terceira é a função identidade e a quarta é a função que troca os valores de verdade. As fórmulas $p_1 \wedge \neg p_1$, $p_1 \vee \neg p_1$, p_1 e $\neg p_1$, respectivamente, desempenham o papel desejado.

Seja dada $F : \{0,1\}^{n+1} \mapsto \{0,1\}$ ao arbítrio. Considerem-se as aplicações F_0 e F_1 de $\{0,1\}^n$ para $\{0,1\}$ definidas assim:

$$F_i(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}) = F(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}, i),$$

para $i = 0, 1$. Por hipótese de indução, existem fórmulas ϕ_0 e ϕ_1 (nas quais ocorrem apenas as letras proposicionais $p_1, \ldots, p_n$) tais que, para toda a valoração v,

$$\tilde{v}(\phi_i) = F_i(v(p_1), \ldots, v(p_n))$$

para $i = 0, 1$. Tome-se ϕ a fórmula $(\phi_0 \wedge \neg p_{n+1}) \vee (\phi_1 \wedge p_{n+1})$. Não custa ver que ϕ tem as propriedades desejadas. $\square$

Curiosamente, basta *um único* conectivo binário para definir todos os conectivos. E.g., a *barra de Sheffer*, denotada usualmente pela barra vertical $|$ e definida por meio da seguinte tabela, é suficiente para tal:

ϕ	ψ	$\phi \mid \psi$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Observe-se que $\neg\phi \Leftrightarrow \phi \mid \phi$ e $\phi \wedge \psi \Leftrightarrow (\phi \mid \psi) \mid (\phi \mid \psi)$.