Compacidade

Fernando Ferreira

Definição 1. *Um conjunto de fórmulas Γ diz-se* satisfazível *se existe uma valoração que torna todas as fórmulas de Γ verdadeiras. Uma fórmula ϕ diz-se* satisfazível *se o conjunto singular $\{\phi\}$ é satisfazível.*

Note que uma fórmula ϕ é satisfazível se, e somente se, $\neg\phi$ não é uma tautologia.

Definição 2. *Um conjunto de fórmulas Γ do cálculo proposicional diz-se* finitamente satisfazível *se todo o subconjunto finito de Γ é satisfazível.*

Segue-se um teorema muitíssimo importante:

Teorema da Compacidade do Cálculo Proposicional. *Um conjunto de fórmulas do cálculo proposicional é satisfazível se, e somente se, é finitamente satisfazível.*

Claro que se um conjunto de fórmulas é satisfazível então é finitamente satisfazível. Para demonstrar o recíproco necessitamos de algum trabalho preparatório. A seguinte noção é importante a este respeito: um conjunto Γ de fórmulas do cálculo proposicional diz-se *maximalmente satisfazível* se é finitamente satisfazível e não está contido propriamente em nenhum conjunto finitamente satisfazível.

Lema 1. *Seja M um conjunto maximalmente satisfazível. Então, para qualquer fórmula ϕ do cálculo proposicional, $\phi \in M$ ou $\neg\phi \in M$ (e não ambos).*

Demonstração. Seja M maximalmente satisfazível e, com vista a um absurdo, suponhamos que $\phi \notin M$ e $\neg\phi \notin M$. Por maximalidade, nem $M \cup \{\phi\}$ nem $M \cup \{\neg\phi\}$ são finitamente satisfazíveis. Então existem $\Sigma, \Lambda \subseteq M$ finitos tais que nem $\Sigma \cup \{\phi\}$ nem $\Lambda \cup \{\neg\phi\}$ são satisfazíveis. Como $\Sigma \cup \Lambda \subseteq M$ é finito e M é finitamente satisfazível, $\Sigma \cup \Lambda$ é satisfazível. Seja v uma valoração que torna todas as fórmulas de $\Sigma \cup \Lambda$ verdadeiras. Ora, $\tilde{v}(\phi) = 1$ ou $\tilde{v}(\neg\phi) = 1$. No primeiro caso, $\Sigma \cup \{\phi\}$ é satisfazível, o que é absurdo. No segundo caso, $\Lambda \cup \{\neg\phi\}$ é satisfazível, o que também é absurdo.

Não se dá simultaneamente $\phi \in M$ e $\neg\phi \in M$ porque M é finitamente satisfazível. □

Lema 2. *Seja M maximalmente satisfazível. Tem-se:*

(i) $\phi \to \psi \in M$ *sse* $\phi \notin M$ *ou* $\psi \in M$*;*

(ii) $\phi \wedge \psi \in M$ *sse* $\phi \in M$ *e* $\psi \in M$*;*

(iii) $\phi \vee \psi \in M$ *sse* $\phi \in M$ *ou* $\psi \in M$*.*

Demonstração. Vamos demonstrar a primeira alínea, deixando as outras duas a cargo do leitor. Suponhamos que $\phi \to \psi \in M$ e, com vista a um absurdo, admitamos que $\phi \in M$ e $\psi \notin M$. Pelo lema anterior, $\neg\psi \in M$ e, portanto, $\{\phi \to \psi, \phi, \neg\psi\} \subseteq M$. Ora este conjunto não é satisfazível, contradizendo a satisfazibilidade finita de M. Reciprocamente, suponhamos que $\phi \to \psi \notin M$. Pelo lema anterior, $\neg(\phi \to \psi) \in M$. Como $\{\neg(\phi \to \psi), \neg\phi\}$ não é satisfazível, vem $\neg\phi \notin M$ e, pelo lema anterior, $\phi \in M$. Também se tem $\psi \notin M$, visto que $\{\neg(\phi \to \psi), \psi\}$ não é satisfazível. Como se queria. □

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema da Compacidade. Para o efectuar, temos que ver que qualquer conjunto Γ de fórmulas finitamente satisfazível está contido num conjunto maximalmente satisfazível. Usamos, para isso, o Lema de Zorn (caso o leitor não esteja familiarizado com este lema, no final deste capítulo damos uma demonstração alternativa deste resultado para o caso da linguagem ter apenas uma cardinalidade numerável de letras proposicionais). Considere-se $\mathcal{O}$ a classe de todos os conjuntos de fórmulas Δ, finitamente satisfazíveis, que contenham Γ. Ordene-se $\mathcal{O}$ pela relação de "estar contido". É fácil de ver que $\mathcal{O}$, ordenado desta forma, está nas condições da aplicação do Lema de Zorn. Logo $\mathcal{O}$ tem um elemento maximal M. Claro que $\Gamma \subseteq M$ e M é maximalmente satisfazível. Define-se agora a seguinte valoração v:

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in M \\ 0 & \text{se } p \notin M \end{cases}$$

Vamos demonstrar, por indução na complexidade das fórmulas ϕ, que $\tilde{v}(\phi) = 1$ sse $\phi \in M$. Este facto mostra que a valoração v torna todas as fórmulas de M e, portanto de Γ, verdadeiras. Como se pretende.

Se ϕ é uma letra proposicional p a equivalência sai por definição de v. No caso da negação note-se que $\tilde{v}(\neg\phi) = 1$ sse $\tilde{v}(\phi) = 0$ sse (por hipótese de indução) $\phi \notin M$ sse $\neg\phi \in M$ (por maximalidade). No caso do condicional, $\tilde{v}(\phi \to \psi) = 1$ sse $\tilde{v}(\phi) = 0$ ou $\tilde{v}(\psi) = 1$ sse (por hipótese de indução) $\phi \notin M$ ou $\psi \in M$ sse (pelo lema anterior) $\phi \to \psi \in M$. Os casos da conjunção e disjunção são análogos.

Demonstrámos, pois, o Teorema da Compacidade do Cálculo Proposicional.

Definição 3. *Seja Γ um conjunto de fórmulas. Uma fórmula ϕ diz-se* consequência semântica *de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \phi$, se para toda a valoração v, então ϕ é verdadeira sob v sempre que todas as fórmulas de Γ são verdadeiras sob v.*

No caso de Γ ser o conjunto vazio, escrevemos $\models \phi$ em vez do descómodo $\emptyset \models \phi$. Note-se que escrever $\models \phi$ é o mesmo que dizer que ϕ é uma tautologia.

Corolário 1. *Seja Γ um conjunto de fórmulas e ϕ tal que $\Gamma \models \phi$. Então existe um subconjunto finito Σ de Γ tal que $\Sigma \models \phi$.*

Demonstração. Admitamos que não se tem $\Sigma \models \phi$ para nenhum subconjunto finito Σ de Γ. Deste facto decorre imediatamente que $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ é satisfazível para todo $\Sigma \subseteq \Gamma$ finito. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é finitamente satisfazível. Por compacidade, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é satisfazível. Conclui-se que $\Gamma \not\models \phi$. $\square$

Como prometido, vamos demonstrar – sem usar o Lema de Zorn – o teorema da compacidade no caso em que a cardinalidade do conjunto das letras proposicionais é numerável. Como sabemos, basta mostrar que todo o conjunto Γ, finitamente satisfazível, de fórmulas está contido num conjunto maximalmente satisfazível de fórmulas. Por causa da numerabilidade das letras proposicionais, o conjunto de fórmulas também é numerável. Seja $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ uma enumeração de todas as fórmulas. Defina-se, por recursão, uma sucessão $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de fórmulas da seguinte maneira: Γ_0 é Γ e

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \text{ é finitamente satisfazível} \\ \Gamma_n & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Claramente, por indução em n, cada Γ_n é finitamente satisfazível. Considere-se $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$. Claro que M contém Γ e é finitamente satisfazível. Vamos ver que M é maximalmente satisfazível. Seja M' um conjunto que contenha M e que seja finitamente satisfazível. Tome-se ϕ uma fórmula de M' ao arbítrio. Ora, ϕ é ϕ_n, para algum $n \in \mathbb{N}$. Como $\Gamma_n \subseteq M \subseteq M'$, sai que $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \subseteq M'$. Logo, $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ é finitamente satisfazível. Por definição, $\phi_n \in \Gamma_{n+1}$. Conclui-se que $\phi \in M$.