Dedução formal proposicional

Fernando Ferreira

Uma forma tradicional de gerar as tautologias consiste em deduzi-las no âmbito dum sistema de dedução formal. No que se segue apresentamos um sistema de dedução "à Hilbert" em que, por motivos de economia, nos confinamos aos conectivos $\neg$ e $\rightarrow$ (como vimos, tal não constitui uma restrição real). O sistema consiste em três axiomas esquema lógicos e uma regra de dedução. Os axiomas esquemas são:

1. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$;
2. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \rho)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \rho))$;
3. $(\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \phi)$.

O carácter *esquemático* dos axiomas advém do facto de cada um deles ser, na realidade, constituído por uma infinidade de fórmulas (pois ϕ e ψ são fórmulas quaisquer). Note-se que os axiomas lógico são tautologias. A regra de dedução é o *Modus Ponens*:

De ϕ e $\phi \rightarrow \psi$ infere-se ψ.

Definição 1. *Seja Γ um conjunto de fórmulas duma dada linguagem do cálculo proposicional. Uma* dedução *duma fórmula ϕ a partir de Γ é uma sequência finita de fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ em que ϕ_n é a fórmula ϕ e tal que, para todo $i \leq n$,* (a) *ϕ_i é um axioma lógico ou $\phi_i \in \Gamma$; ou* (b) *existem $j, k < i$ de tal modo que ϕ_k é a fórmula $\phi_j \rightarrow \phi_i$* (Modus Ponens)*. Diz-se que ϕ é* consequência formal *de Γ, e escreve-se $\Gamma \vdash \phi$, se existir uma dedução de ϕ a partir de Γ.*

A propriedade (a) abaixo é imediata, enquanto as outras duas argumentam-se facilmente através de apropriadas concatenações de deduções formais.

Proposição 1. *O seguinte é verdade:*

(a) *Se $\Sigma \vdash \phi$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$ então $\Gamma \vdash \phi$.*

(b) *Se $\Gamma \vdash \phi$ e $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ então $\Gamma \vdash \psi$.*

(c) *Se $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \phi$ e, para cada $i \leq n$, $\Sigma \vdash \phi_i$ então $\Sigma \vdash \phi$.*

Como iremos ver, toda a tautologia é consequência formal do conjunto vazio de fórmulas (escreve-se $\vdash \phi$ em vez de $\emptyset \vdash \phi$). Não obstante, o sistema acima não é agradável para se fazer deduções. Como exemplo, damos uma dedução de cinco passos de (4) $\phi \rightarrow \phi$:

i. $\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$, pelo axioma lógico do tipo 1;

ii. $(\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$, pelo axioma lógico do tipo 2;

iii. $(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$, por *Modus Ponens* a partir de (i) e (ii);

iv. $\phi \to (\phi \to \phi)$, pelo axioma lógico do tipo 1;

v. $\phi \to \phi$, por *Modus Ponens* a partir de (iii) e (iv).

Teorema da Correcção do Cálculo Proposicional. *Seja Γ um conjunto de fórmulas e ϕ uma fórmula. Se $\Gamma \vdash \phi$ então $\Gamma \models \phi$.*

Demonstração. Suponhamos que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ é uma dedução de ϕ a partir de Γ. Tome-se v uma valoração que torne todas as fórmulas de Γ verdadeiras. Demonstra-se facilmente, por indução completa em $i \leq n$, que $\tilde{v}(\phi_i) = 1$. Em particular, $\tilde{v}(\phi_n) = 1$, i.e., $\tilde{v}(\phi) = 1$. Como se queria. $\square$

O recíproco do resultado anterior é mais difícil de demonstrar e, para o fazer, necessitamos de nos assegurar da existência de algumas deduções formais. O seguinte resultado é instrumental nesta tarefa:

Teorema da Dedução do Cálculo Proposicional. *Se $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ então $\Gamma \vdash \phi \to \psi$.*

Demonstração. Seja $\psi_1, \ldots, \psi_n$ uma dedução de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\phi\}$. Mostramos, por indução completa em $i \leq n$, que $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$. O caso $i = n$ dá-nos o resultado desejado. Seja dado $i \leq n$. Se ψ_i é axioma lógico ou $\psi_i \in \Gamma$, é claro que $\Gamma \vdash \psi_i$. Pelo primeiro axioma lógico e *Modus Ponens* conclui-se que $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$. Se ψ_i é a fórmula ϕ sai, por (4), $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$. Resta analisar o caso de ψ_i decorrer duma aplicação da regra de *Modus Ponens*. Sejam $j, k < i$ com ψ_k a fórmula $\psi_j \to \psi_i$. Por hipótese de indução tem-se $\Gamma \vdash \phi \to \psi_j$ e $\Gamma \vdash \phi \to (\psi_j \to \psi_i)$. Obtém-se uma dedução de $\phi \to \psi_i$ a partir de Γ concatenando deduções de $\phi \to \psi_j$ e $\phi \to (\psi_j \to \psi_i)$ com os três seguintes passos:

$$\begin{cases} (\phi \to (\psi_j \to \psi_i)) \to ((\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i)), \\ \qquad (\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i), \phi \to \psi_i. \end{cases}$$

A primeira fórmula acima é um axioma e as duas últimas obtêm-se por aplicações de *Modus Ponens*. $\square$

Corolário 1. *Tem-se:*

5. $\vdash (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \rho) \to (\phi \to \rho))$;

6. $\vdash \neg\neg\phi \to \phi$;

7. $\vdash \neg\phi \to (\phi \to \psi)$;

8. $\vdash (\phi \to \psi) \to ((\phi \to \neg\psi) \to \neg\phi)$;

9. $\vdash \phi \to \neg\neg\phi$;

10. $\vdash \phi \to (\neg\psi \to \neg(\phi \to \psi))$;

11. $\vdash (\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$;

12. $\vdash (\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \psi) \to \psi)$.

Demonstração. Tem-se claramente $\{\phi \to \psi, \psi \to \rho, \phi\} \vdash \rho$ através de duas aplicações de *Modus Ponens*. Três aplicações do teorema da dedução permitem concluir (5). Para ver (6) observe-se que $\{\neg\neg\phi\} \vdash \neg\phi \to \neg\neg\phi$ (pelo primeiro axioma) e que, por (4), $\{\neg\neg\phi\} \vdash \neg\phi \to \neg\phi$. Agora aplique-se o terceiro axioma para concluir $\{\neg\neg\phi\} \vdash \phi$. O resultado sai pelo teorema da dedução. Argumenta-se facilmente $\{\phi, \neg\phi\} \vdash \psi$ usando (essencialmente) o primeiro e terceiro axiomas. Agora (7) sai pelo teorema da dedução. (8) é consequência do terceiro axioma e de (5) e (6) (e do teorema da dedução). Com efeito, $\{\phi \to \psi\} \vdash \neg\neg\phi \to \psi$ e $\{\phi \to \neg\psi\} \vdash \neg\neg\phi \to \neg\psi$ por (5) e (6). Logo, pelo terceiro axioma e *Modus Ponens* (duas vezes), $\{\phi \to \psi, \phi \to \neg\psi\} \vdash \neg\phi$. Duas aplicações do teorema da dedução permitem concluir (8). Da hipótese ϕ pode concluir-se $\neg\phi \to \phi$ e, claro, $\neg\phi \to \neg\phi$. Logo, por (8), conclui-se $\{\phi\} \vdash \neg\neg\phi$. Pelo teorema da dedução, vem (9). Tem-se claramente $\{\phi\} \vdash (\phi \to \psi) \to \psi$ e $\{\neg\psi\} \vdash (\phi \to \psi) \to \neg\psi$. Portanto, por (8), $\{\phi, \neg\psi\} \vdash \neg(\phi \to \psi)$. (10) sai de duas aplicações do teorema da dedução. Quanto a (11), note-se que $\{\phi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\phi$ através de (8). O resultado sai pelo teorema da dedução. Por (11) tanto se deduz $\neg\psi \to \neg\phi$ como $\neg\psi \to \neg\neg\phi$ a partir de $\{\phi \to \psi, \neg\phi \to \psi\}$. Logo, pelo terceiro axioma, $\{\phi \to \psi, \neg\phi \to \psi\} \vdash \psi$. (12) segue-se do teorema da dedução. □

Dada uma fórmula ϕ e uma valoração v define-se a fórmula ϕ^v da seguinte maneira:

$$\phi^v = \begin{cases} \phi & \text{se } \tilde{v}(\phi) = 1 \\ \neg\phi & \text{se } \tilde{v}(\phi) = 0 \end{cases}$$

Lema 1. *Seja ϕ uma fórmula e $p_1, \ldots, p_n$ as letras proposicionais que nela ocorrem. Para toda a valoração v tem-se $\{p_1^v, \ldots, p_n^v\} \vdash \phi^v$.*

Demonstração. Fixe-se v uma valoração. Demonstra-se por indução na complexidade de ϕ que $\{p_1^v, \ldots, p_n^v\} \vdash \phi^v$, onde $p_1, \ldots, p_n$ são as letras proposicionais que ocorrem em ϕ. O caso em que ϕ é uma letra proposicional é imediato. Suponhamos que ϕ é $\neg\psi$. Caso $\tilde{v}(\psi) = 1$ tem-se, por hipótese de indução, $\{p_1^v, \ldots, p_n^v\} \vdash \psi$. Logo, por (9), $\{p_1^v, \ldots, p_n^v\} \vdash \neg\neg\psi$. Ora $\tilde{v}(\phi) = 0$ e, portanto, ϕ^v é $\neg\neg\psi$. O caso $\tilde{v}(\psi) = 0$ ainda é mais imediato. Resta estudar o caso em que ϕ é um condicional $\psi \to \rho$. Se $\tilde{v}(\psi) = 0$ ou $\tilde{v}(\rho) = 1$, tem-se $\phi^v = \phi$. Por hipótese de indução ou se deduz $\neg\psi$ ou se deduz ρ a partir de $\{p_1^v, \ldots, p_n^v\}$. Mas, então, também se deduz ϕ, por causa de (respectivamente) (7) e do primeiro axioma. Finalmente, suponhamos que $\tilde{v}(\psi) = 1$ e $\tilde{v}(\rho) = 0$. Por hipótese de indução, deduzem-se ψ e $\neg\rho$ a partir de $\{p_1^v, \ldots, p_n^v\}$. Por (10) também se deduz $\neg(\psi \to \rho)$, i.e., ϕ^v. □

Proposição (Completude Fraca do Cálculo Proposicional). *Se ϕ é uma tautologia, então $\vdash \phi$.*

Demonstração. Suponhamos que a fórmula ϕ é uma tautologia e sejam $\{p_1, \ldots, p_n\}$ as letras proposicionais que nela ocorrem. Mostramos, por indução simples em $j \leq n$ que, para toda a valoração v, se tem

$$\{p_1^v, \ldots, p_{n-j}^v\} \vdash \phi$$

onde na notação se subentende que não há premissas no caso $j = n$. Aliás, a conclusão da proposição é precisamente este caso. O caso base $j = 0$ é o lema anterior. Seja dado $j < n$ e considere-se v uma valoração ao arbítrio. Definem-se duas valorações v_0 e v_1 exactamente como v excepto que $v_0(p_{n-j}) = 0$ e $v_1(p_{n-j}) = 1$. Por hipótese de indução têm-se:

$$\{p_0^v, \ldots, p_{n-(j+1)}^v, \neg p_{n-j}\} \vdash \phi \quad \text{e}$$

$$\{p_0^v, \ldots, p_{n-(j+1)}^v, p_{n-j}\} \vdash \phi.$$

Por (12) e o Teorema da Dedução, conclui-se $\{p_0^v, \ldots, p_{n-(j+1)}^v\} \vdash \phi$, conforme ao passo de indução. □

Teorema da Completude do Cálculo Proposicional. *Seja Γ um conjunto de fórmulas e ϕ uma fórmula. Se $\Gamma \models \phi$ então $\Gamma \vdash \phi$.*

Demonstração. Admitamos $\Gamma \models \phi$. Pelo teorema da compacidade existem fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ em Γ tais que $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \phi$. Daqui sai imediatamente que $\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots (\phi_n \to \phi) \ldots)$ é uma tautologia. Logo, por completude fraca, $\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots (\phi_n \to \phi) \ldots)$. Aplicando n vezes *Modus Ponens* tem-se, claramente, $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \phi$. O resultado segue-se. $\square$