

**EXERCÍCIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA**  
**FOLHA A**

FERNANDO FERREIRA  
FEVEREIRO DE 2017

- (1) Dê exemplos de fórmulas  $\phi$  e  $\psi$  e palavras  $\rho$  e  $\theta$  tais que  $(\phi \wedge \psi)$  e  $(\rho \wedge \theta)$  são a mesma palavra mas  $\phi$  não é a mesma palavra que  $\rho$ .
- (2) Mostre que, para todo  $n$ , a seguinte fórmula do cálculo proposicional é uma tautologia:

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{k=1}^n p_{ik} \rightarrow \bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} \bigvee_{k=1}^n (p_{ik} \wedge p_{jk}),$$

onde os  $p_{ik}$ 's são letras proposicionais. [Sugestão: pense em pombos ou gavetas...]

- (3) Diga se o conjunto de fórmulas  $\{\neg(\phi \rightarrow \psi), \theta \rightarrow \neg\phi, \neg\psi \rightarrow \theta\}$  é ou não satisfazível. Justifique.
- (4) Seja  $\Gamma$  um conjunto finitamente satisfazível de fórmulas do cálculo proposicional. Dada uma fórmula  $\varphi$  do cálculo proposicional, mostre que ou  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  é finitamente satisfazível ou  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  é finitamente satisfazível.
- (5) Pode evitar-se a ambiguidade sem utilizar parênteses. Isto pode ser feito através da notação *polaca*. Esta notação obtém-se da usual substituindo-se as cláusulas de formação associadas aos conectivos binários pelas seguintes cláusulas: se  $\phi$  e  $\psi$  são fórmulas, então  $\rightarrow\phi\psi$ ,  $\wedge\phi\psi$  e  $\vee\phi\psi$  também são fórmulas.
- (a) Escreva em notação polaca as fórmulas  $\neg(p \rightarrow (q \vee \neg r))$  e  $\neg(\neg p \wedge (\neg p \rightarrow q))$ .
- (b) Escreva na notação usual a fórmula  $\rightarrow \wedge pq \vee \neg r \rightarrow sr$ .
- (c) Enuncie e demonstre a propriedade de unicidade de leitura para a notação polaca.
- (6) Segue-se a tabela de verdade do conectivo ternário  $\spadesuit$ . Defina este conectivo através duma fórmula do cálculo proposicional. Faça-o seguindo o algoritmo implícito na demonstração dada na aula teórica.

$p$	$q$	$r$	$\spadesuit(p, q, r)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1