DMFCUL ALGA II

2º Semestre de 2016/2017

Exercícios de Revisão - Folha R1 (Valores e Vectores Próprios)

1. Mostre que $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ não é vector próprio de $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

2. Mostre que $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ é vector próprio de $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e determine o valor próprio a ele associado.

3. **(a)** Diga se 0 é valor próprio de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Em caso afirmativo, determine um vector próprio associado a 0.

(b) Diga se 2 é valor próprio de $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Em caso afirmativo, determine um vector próprio associado a 2.

(c) Diga se 4 é valor próprio de $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Em caso afirmativo, determine um vector próprio associado a 4.

4. **(a)** Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ não tem nenhum valor próprio em $\mathbb{Q}$. Podemos encarar A como sendo uma matriz em $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Mostre que $\sqrt{2}$ é um valor próprio de A. Determine um vector próprio (em $\mathbb{R}^{2\times 1}$) de A associado ao valor próprio $\sqrt{2}$.

(b) Mostre que a matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ não tem nenhum valor próprio em $\mathbb{R}$. Podemos encarar B como sendo uma matriz em $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Mostre que i é um valor próprio de B (onde $i \in \mathbb{C}$ é tal que $i^2 = -1$). Determine um vector próprio em ($\mathbb{C}^{2\times 1}$) de B associado ao valor próprio i.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que, para cada $i = 1, \cdots, n$, temos $\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \lambda$. Ou seja, a soma das entradas de cada linha de A é igual ao constante λ. Mostre que o vector $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ (em que cada entrada é igual a 1) é vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

6. Para cada uma das matrizes seguintes, calcule o polinómio característico e determine os valores próprios. Para cada valor próprio λ, determine o subespaço próprio E_λ e uma sua base.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, **(c)** $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

(d) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, **(e)** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, **(f)** $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

DMFCUL ALGA II

2º Semestre de 2016/2017

Exercícios de Revisão - Folha R2 (Valores e Vectores Próprios)

7. (a) Mostre que 0 é o único valor próprio de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Determine o subespaço próprio, E_0 de A.

(b) Mostre que 2 e 9 são valores próprios de $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Determine os subespaços próprios E_2 e E_9 de B. Determine um vector próprio, x_2 de B associado ao valor próprio 2 e um vector próprio, x_9, de B associado ao valor próprio 9. Mostre que $(x_2,\, x_9)$ é base de $\mathbb{R}^{2\times 1}$. Seja X a matriz tipo 2×2

$$X = [\,[x_2]\,[x_9]\,].$$

Mostre que $BX = X\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$. Mostre que X é invertível e que $X^{-1}BX = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

(c) Mostre que os valores próprios de $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ são 1 e 2. Para cada $\lambda \in \{1, 2\}$ determine o subespaço próprio E_λ e determine uma base de E_λ.

8. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Mostre que 4 é um valor próprio de A e calcule o polinómio característico $p_A(t)$. Determine o subespaço próprio E_4.

9. Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ com $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que A^2 é a matriz nula (ou seja, a matriz em $\mathbb{K}^{n\times n}$ cujas entradas são todas iguais a zero). Se λ for valor próprio de A, mostre que $\lambda = 0$.

10. Para cada uma das matrizes seguintes, determine o polinómio característico, $P_A(t)$, e os valores próprios (em $\mathbb{C}$) da matriz. Para cada valor próprio λ, determine o subespaço próprio E_λ e uma sua base.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$; **(b)** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$;

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$; **(d)** $\begin{bmatrix} -4 & -1 & 7 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$

11. Determine o polinómio característico, $P_A(x)$, e os valores próprios (em $\mathbb{C}$) das matrizes seguintes:

(a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -7 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$; **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$.

Em cada caso, escolha um valor próprio λ de A e calcule um vector próprio de A associado a λ.

12. (a) Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ com $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que A é invertível. Seja λ um valor próprio de A. Mostre que $\lambda \neq 0$ e que λ^{-1} é valor próprio de A^{-1}.

(b) Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ com $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $P_A(x) = P_{A^T}(x)$ e que se $\lambda \in \mathbb{K}$ então λ é valor próprio de A se e só se λ é valor próprio de A^T.

DMFCUL ALGA II

2º Semestre de 2016/2017

Exercícios de Revisão - Folha R3 (Valores e Vectores Próprios)

13. Para cada uma das matrizes $A_i \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ a seguir, calcule o polinómio característico e os valores próprios. Escolha um valor próprio, λ, e calcule um vector próprio v_λ associado a λ. Determine, pelo processo da demonstração das aulas teóricas, utilizando v_λ para o vector C daquela demonstração, uma matriz invertível P_i tal que $P_i^{-1}A_iP_i$ é triangular superior. No caso em que A_i tem dois valores próprios distintos $\lambda \neq \mu$ repita o processo com um vector próprio v_μ associado a μ.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. **(b)** $A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. **(c)** $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Mostre que não existe matriz invertível P tal que $P^{-1}A_1P$ é matriz diagonal.

14. Mostre que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é a sua própria inversa e que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$.

15. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ onde $b \neq 0$ e $a \neq d$. Seja $k = \frac{d-a}{b} \neq 0$. Mostre que $\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A associado aos valores próprios d, a, respectivamente. Mostre que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & k^{-1} \\ 1 & -k^{-1} \end{bmatrix}$ e que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

16. Mostre que se $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tem valores próprios distintos $a \neq d \in \mathbb{C}$, então A é semelhante à matriz diagonal $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ e também à matriz diagonal $\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

17. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -10 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Determine os valores próprios e vectores próprios de A.
(b) Mostre que A é diagonalizável.
(c) Determine uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

18. Construa uma matriz real, diagonalizável, com valores próprios 0, -1, e -2 em que $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio associado a -1, $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vector próprio associado a -2, $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio associado a 0.

19. Sejam $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ e $C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Mostre que $P_{C_2}(t) = t^2 - at - b$ e $P_{C_3}(t) = t^3 - at^2 - bt - c$. Em geral, mostre por indução em n que se $n \geq 2$ e

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

então $P_{C_n}(t) = t^n - a_1t^{n-1} - \cdots - a_{n-1}t - a_n$.