DMFCUL ALGA II

2º Semestre de 2016/2017 Exercícios - Folha 1

1. Sejam $U = \, < (1,2,1),(2,1,2) > \, \leq \mathbb{R}^3$ e $W = \, < (1,2,3) > \, \leq \mathbb{R}^3$. Mostre que $U \cap W = 0$ e que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

2. Sejam $U, \, W \leq \mathbb{R}^3$ tais que $\dim(U) = \dim(W) = 2$. Mostre que $\dim(U \cap W) \geq 1$ e que ou $U = W$ ou $U + W = \mathbb{R}^3$.

3. Sejam $U, \, W \leq \mathbb{R}^4$ tais que $\dim(U) = \dim(W) = 2$. Quais são as possibilidades para $\dim(U \cap W)$?

4. Sejam $U, \, W \leq \mathbb{R}^4$ definidos como a seguir:

$$\begin{aligned} U &= \, < (1,1,1,0),(1,1,0,1),(0,0,1,\,-1) > \\ W &= \, < (1,1,2,\,-1),(1,2,1,2) > . \end{aligned}$$

$\dim(U) = ?$ $\dim(W) = ?$ $\dim(U + W) = ?$ $\dim(U \cap W) = ?$ Encontre uma base de $U + W$ e uma base de $U \cap W$.

5. Sejam $U, \, W \leq \mathbb{R}^4$ definidos como a seguir:

$$\begin{aligned} U &= \, < (1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1) > \\ W &= \, < (3,2,2,2),(1,2,1,2) > . \end{aligned}$$

$\dim(U) = ?$ $\dim(W) = ?$ $\dim(U + W) = ?$ $\dim(U \cap W) = ?$ Encontre uma base de $U + W$ e uma base de $U \cap W$.

6. Seja V um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam $U, W \leq V$ tais que $\dim(U) = \dim(W) = 1$. Mostre que ou $U = W$ ou $U + W = U \oplus W$.

7. No espaço $\mathbb{R}^2$, mostre que $< (1,0) > \, \oplus \, < (0,1) > \, = \, < (1,0) > \, \oplus \, < (1,1) >$ (sendo ambas as somas iguais a $\mathbb{R}^2$), logo não podemos "cortar" o subespaço $< (1,0) >$ na igualdade.

8. Em $V = \mathbb{R}^2$ sejam $U = \, < (1,0) >$ e $V = \, < (0,1) >$ pelo que $V = U \oplus W$. Seja $Z = \, < (1,1) >$. Mostre que $Z \cap U = Z \cap W = 0$ pelo que $Z \neq (Z \cap U) \oplus (Z \cap W)$.

9. Encontre um espaço vectorial V sobre um corpo e subespaços $W_1, W_2, W_3 \leq V$ tais que $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = W_3 \cap W_1 = 0$ mas tal que a soma $W_1 + W_2 + W_3$ **não** é directa.

10. Seja V um espaço vectorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $U \leq V$. Mostre que existe $W \leq V$ tal que $V = U \oplus W$. No caso em que $0 \neq U \neq V$ mostre que existem $W_1 \neq W_2$ tais que $V = U \oplus W_1 = U \oplus W_2$.

11. Seja V um espaço vectorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $\mathcal{B} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ uma base de V. Mostre que

$$V = \, < x_1 > \, \oplus \cdots \oplus \, < x_n > .$$

DMFCUL ALGA II

2º Semestre de 2016/2017 Exercícios - Folha 2

12. Seja V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $W \leq V$. Verificar as afirmações seguintes para concluir que V/W, com respeito a às operações de $+$ e multiplicação escalar, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.
(a) e (b) A operação $+$ é comutativa e associativa.
(c) O elemento $0_V + W$ é o elemento neutro para a operação $+$ em V/W. Se $h \in W$ então $0_V + W = h + W$, pelo que $h + W$ é outra maneira de escrever o elemento neutro de V/W.
(d) O elemento $-x + W$ é o elemento "simétrico" de $x + W$.
(e) Temos $\lambda((x + W) + (y + W)) = \lambda(x + W) + \lambda(y + W)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall\ x, y \in V$.
(f) Temos $(\lambda + \mu)(x + W) = \lambda(x + W) + \mu(x + W)\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\forall\ x \in V$.
(g) Temos $1_{\mathbb{K}}(x + W) = (x + W)\ \forall\ x \in V$.
(h) Temos $\lambda(\mu(x + W) = (\lambda\mu)(x + W)\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\forall\ x, y \in V$.

13. Seja V um espaço vectorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $W \leq V$.
(a) Se X for um conjunto de geradores de V (ou seja, $V = < X >$) mostre que $\overline{X} = \{x + W : x \in X\}$ é um conjunto de geradores de V/W.
(b) Seja $\{w_1, \cdots, w_a\}$ base de W. Por ALGA I podemos completar esta base para uma base $\{w_1, \cdots, w_a, x_1, \cdots, x_b\}$ de V. Mostre que $\{x_1 + W, \cdots, x_b + W\}$ é base de V/W.
(c) Concluir (independentemente da Proposiçaõ I.1.4 das aulas teóricas) que

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W).$$

14. Seja V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja W um subespaço de V. Seja $\{v_1, \cdots, v_r\} \subseteq V$ um conjunto linearmente independent (L.I.). Mostre que o conjunto $\{v_1 + W, \cdots, v_r + W\} \subseteq V/W$ é L.I. se e só se $< v_1, \cdots, v_r > \cap W = (0)$.

15. Seja $V = \mathbb{R}^4$ e seja $W = < (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0) >$.
(a) $\dim(V/W) =$?
(b) Diga se o conjunto $\{(1, 0, 0, 1) + W, (1, 1, -1, 1) + W\} \subseteq V/W$ é L.I.
(c) Diga se o conjunto $\{(1, 1, 1, 1) + W, (1, -1, 1, -1) + W\} \subseteq V/W$ é L.I.
(d) Diga se o conjunto $\{(1, 0, 1, 2) + W, (0, 2, 2, 1) + W\} \subseteq V/W$ é L.I.
(e) Encontre uma base de V/W.

16. Sejam $V = \mathbb{R}^4$ e seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canónica de V, onde

$$e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Define-se $f : V \to V$ a aplicação linear definida por

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + 3t, x + y + z + t, z + 2t, z + t).$$

Seja $W = < e_1, e_2 >$, um subespaço de V.
(a) Mostre que $\mathcal{B}_W = \{e_1, e_2\}$ é uma base de W e que $\overline{\mathcal{B}} = \{e_3 + W, e_4 + W\}$ é uma base de V/W.
(b) Mostre que W é f-invariante.
(c) Calcule a matriz $M(f_W; \mathcal{B}_W, \mathcal{B}_W)$, sendo f_W como em I.2.9(a).
(d) Calcule a matriz $M(\overline{f}; \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{B}})$, sendo $\overline{f}$ como em I.2.9(b).
(e) Calcule a matriz $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

DMFCUL ALGA II

2º Semestre de 2016/2017 Exercícios - Folha 3

Notação de matrizes usada em Exº 16:
Sejam E e V evs / $\mathbb{K}$, dim$E = n \geq 1$, dim$V = m \geq 1$. Sejam $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ e $\gamma = (v_1, \ldots, v_m)$ bases de E e V (resp$^{\text{te.}}$) / $\mathbb{K}$. Seja $f : E \to V$ linear; então $f(e_1), \ldots, f(e_n) \in V$, e existem **únicos** $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ tais que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m \\ f(e_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{m2}v_m \\ \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ f(e_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{mn}v_m. \end{aligned}$$

Define-se a matriz de f em relação às bases β e γ, $M(f; \beta, \gamma)$:

$$M(f; \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

17. Seja V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $W \leq V$ (ou seja, W é um subespaço de V).
(a) Se $W \leq X \leq V$ define-se $\overline{X} := \{x + W : x \in X\} \subseteq V/W$. Mostre que $\overline{X} \leq V/W$.
(b) Suponhamos que $\overline{Y} \leq V/W$. Define-se $Y := \{y \in V : y + W \in \overline{Y}\}$. Mostre que $Y \leq V$ e que $W \subseteq Y$ (de facto, que $W \leq Y$).

18. Seja V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.
(a) Mostre que o espaço quociente V/V contém só um vector, a saber o elemento $0 + V$
(b) Mostre que o espaço quociente $V/(0)$ é isomorfo a V, ou seja, mostre que a aplicação $f : V \to V/(0)$ definida por $f(v) = v + (0)$ é um isomorfismo. (Aqui escrevemos (0) para o subespaço cujo único elemento é 0, para evitar ambiguidade quando escrevemos $v + 0$).

19. Seja V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e sejam $U, W \leq V$. Construir uma aplicação linear bijectiva $f : W/(U \cap W) \to (U + W)/U$

20. Para cada uma das matrizes $A_i \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ a seguir, calcule o polinómio característico e os valores próprios. Escolha um valor próprio, λ, e calcule um vector próprio v_λ associado a λ. Determine, pelo processo da demonstração das aulas teóricas, utilizando v_λ para o vector C daquela demonstração, uma matriz invertível P_i tal que $P_i^{-1}A_iP_i$ é triangular superior e calcule esta matriz triangular.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$. **(b)** $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. **(c)** $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(d) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. **(e)** $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Finalmente, fazer Ex 14 da Folha 3 dos exercícios de revisão e, em particular, calcule

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$